

КВАНТОВЫЕ РОДСТВЕННИКИ МНОГОЧЛЕНА АЛЕКСАНДЕРА

© О. Я. ВИРО

Функция Конвея многих переменных обобщается на оснащенные ориентированные трехвалентные графы, снабженные дополнительной структурой (раскраской). Это осуществляется с помощью функторов Решетихина–Тураева, основанных на неприводимых представлениях квантовых $gl(1|1)$ и $sl(2)$. Приводятся соответствующие граневые статсуммы для обобщенной функции Конвея.

Оглавление

Введение	63
§1. Предварительные геометрические сведения о заузленных графах	69
§2. Функтор Решетихина–Тураева, основанный на $gl(1 1)$	76
§3. Функтор Решетихина–Тураева, основанный на $sl(2)$	87
§4. Соотношения между функторами Решетихина–Тураева	98
§5. Скейн принципы и скейн соотношения	105
§6. Инвариант Александра замкнутых крашенных оснащенных графов	110
§7. Специальные свойства $gl(1 1)$ -инварианта Александра	115
§8. Специальные свойства $sl(2)$ -инварианта Александра	124
§9. Графические скейн соотношения	127
§10. Граневые суммы состояний	130
§11. Приложение 1. Квантовая $gl(1 1)$ и ее неприводимые представления	140
§12. Приложение 2. Представления квантовой $sl(2)$ в $\sqrt{-1}$	151
Список литературы	156

Введение

Многочлен Александра и функция Конвея. Многочлен Александра является одним из наиболее классических топологических инвариантов. Он был определен [1] еще в 1928 г. Недавняя статья Финтушела и Стерна

[5] снова привлекла внимание к многочлену Александера, связав его с инвариантами Зайберга–Виттена четырехмерных многообразий.

Многочлен Александера можно представлять себе многими разными способами. Имеется гомологическое определение в терминах свободных абелевых накрытий, определение, использующее свободное дифференциальное исчисление Фокса, определение в терминах кручения Райдемайстера и диаграмматическое определение Конвея. См. обзор Тураева [18]. В действительности, Конвей [3] усовершенствовал сам многочлен, исключив неопределенность. Он определил также инвариант зацепления, который содержит ту же информацию, что и обобщенный многочлен Александера, но является более удобным с нескольких точек зрения. Конвей назвал его *потенциальной функцией* зацепления. Следуя Тураеву [18], мы называем его *функцией Конвея*.¹

Определения (обобщенного) многочлена Александера и функции Конвея даны в п. 7.7. Напомню здесь лишь формальный вид этих инвариантов. Для ориентированного зацепления $L \subset S^3$ со связными компонентами L_1, \dots, L_k многочлен Александера $\Delta_L(t_1, \dots, t_k)$ является многочленом Лорана от переменных $t_1^{\frac{1}{2}}, \dots, t_k^{\frac{1}{2}}$, а функция Конвея $\nabla(L)(t_1, \dots, t_k)$ является рациональной функцией от переменных t_1, \dots, t_k . Они связаны соотношениями $\nabla(L)(t_1, \dots, t_k) = \Delta_L(t_1^2, \dots, t_k^2)$, если $k > 1$, и $\nabla(L)(t) = \frac{\Delta_L(t^2)}{t-t^{-1}}$, если L является узлом, т.е., если $k = 1$.

Многочлен Александера и квантовая топология. Интервенция квантовой теории поля в маломерную топологию, начавшаяся в середине восьмидесятых открытием многочлена Джоунса, дала еще одну точку зрения на многочлен Александера. Он был включен в ряд других квантовых полиномиальных инвариантов зацепления таких, как многочлены Джоунса и Кауфмана и HOMFLY.

Инварианты топологического объекта, изучаемые в квантовой топологии, задаются явными формулами, мотивированными квантовой теорией поля. Особенная не вполне понятая сила этих формул позволяет обобщить

¹Некоторые авторы называют его *многочленом Александера–Конвея*, (см., например, [8, 13] и [14]). Однако имеется несколько причин не использовать эту терминологию. Во-первых, он не является многочленом даже в том смысле, в котором таковым является многочлен Александера: это не многочлен Лорана, а рациональная функция. Например, для тривиального узла он равен $\frac{1}{t-t^{-1}}$. Во-вторых, имеется другой инвариант, который стоит называть многочленом Александера–Конвея. Это полиномиальный инвариант узла, введенный Конвеем в той же статье [3]: многочлен Александера, нормализованный и представленный в виде многочлена от $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$, где t — исходная переменная. Поэтому, следуя Тураеву [18], мы используем термин *функция Конвея*.

упомянутые инварианты на более широкие классы объектов и найти аналоги этих инвариантов для совершенно других объектов. Например, многочлен Джоунса был сперва обобщен на крашенные зацепления, а затем на трехвалентные оснащенные заузленные графы. Затем были обнаружены их аналоги (инварианты Решетихина–Тураева–Виттена) для замкнутых ориентированных трехмерных многообразий, усовершенствованные вскоре до топологических квантовых теорий поля, т.е. до функторов из категорий замкнутых поверхностей и их кобордизмов с подходящей дополнительной структурой в категорию конечномерных векторных пространств. Инвариант трехмерных многообразий (инвариант Виттена–Решетихина–Тураева) был формально определен как инвариант четырехмерных многообразий с краем (см. [20]). Хотя значение этого инварианта зависит только от края, в его построении участвует четырехмерное многообразие. До некоторой степени та же схема работает для любого квантового многочлена зацепления.

Однако квантовая теория многочлена Александра не развита до той степени, которая достигнута в теории, базирующейся на многочлене Джоунса. Сделаны только первые шаги: показано, что многочлен Александра можно определить с помощью представлений квантовых групп. Функция Конвея многих переменных была получена в духе конструкции инвариантов зацепления, связанных с квантовыми группами (см. Юн Мураками [11], [12], Розанский и Салёр [13] и Решетихин [15]). Розанский, Салёр и Решетихин применили эту конструкцию к квантовой супергруппе $gl(1|1)$ (т.е. к квантовой деформации $U_q gl(1|1)$ универсальной обертывающей алгебры супералгебры $gl(1|1)$ (см. приложение А к [14]). Мураками делал это с помощью квантовой группы $sl(2)$ при $q = \sqrt{-1}$. Дегучи и Акутсу [4] включили функцию Конвея в семейство инвариантов, связанных с представлениями квантовой группы $sl(2)$ в корнях из единицы, обобщили эти инварианты на крашенные оснащенные трехвалентные графы и нашли граневые статсуммы, представляющие эти обобщения. Однако, случай функции Конвея не исследовался отдельно от обобщений.

Таким образом, функция Конвея многих переменных изучалась методами квантовой топологии в двух направлениях: с помощью квантовой супергруппы $gl(1|1)$ Решетихиным, Розанским и Салёр и с помощью квантовой группы $sl(2)$ Мураками, Дегучи и Акутсу. Подход, основанный на $sl(2)$, был развит до явного обобщения на крашенные оснащенные трехвалентные графы и граневые статсуммы, хотя результаты представлены в виде довольно сложных формул, которые не были исследованы с геометрической точки зрения. В рамках $gl(1|1)$ подхода обобщение на крашенные оснащенные трехвалентные графы не рассматривалось.

Результаты. Цель этой статьи — дальнейшее развитие квантовых инвариантов, связанных с многочленом Александера. Мы делаем следующие два шага в $gl(1|1)$ подходе: обобщаем функцию Конвея многих переменных на трехвалентные графы, снабженные некоторой дополнительной структурой (раскраской), и находим для этого обобщения (и, в частности, для функции Конвея классических зацеплений) представление в виде граневой статсуммы. При $sl(2)$ подходе соответствующие шаги кажутся сделаны в [4], но для дальнейшего развития теории мы воспроизводим все с самого начала, чтобы получить более простые формулы и геометрические представления. В частности, это дает нам возможность сравнить результаты $gl(1|1)$ и $sl(2)$ подходов.

Ни один из них не сводится к другому. Раскраски, применяемые при $gl(1|1)$ подходе, используют большую палитру. Раскраски, использующие некоторую часть этой палитры, можно превратить в $sl(2)$ -раскраски, но не все $sl(2)$ -раскраски могут быть получены таким образом. Большое количество цветов делает $gl(1|1)$ подход более гибким, но приводит к более сложным граневым статсуммам. По-видимому, оба подхода заслуживают исследования, так как они могут быть полезны для разных целей.

В настоящей статье мы изучаем следующих родственников многочлена Александера:

- функторы Решетихина–Тураева \mathcal{RT}^1 и \mathcal{RT}^2 , основанные на неприводимых представлениях квантовых групп $gl(1|1)$ и $sl(2)$ соответственно;
- модификацию \mathcal{A}^c функтора \mathcal{RT}^c для $c = 1, 2$;
- инварианты $\underline{\Delta}^c$ замкнутых крашенных оснащенных трехвалентных графов, похожих на функцию Конвея ∇ зацеплений и в некотором смысле обобщающих ее.

Следующим шагом могло бы быть построение инвариантов статсуммы для теневых полиэдров и, в конечном счете, для четырехмерных многообразий. Однако на этом пути обнаружились препятствия, делающие построение не совсем очевидным. Пока неясно, какое семейство обобщений функции Конвея лучше подходит для этой цели.

Хотя возможность последующих четырехмерных приложений была главной мотивацией этой работы, мне кажется, что полученные результаты интересны и сами по себе. Любопытно, например, что формулы, появляющиеся в граневой модели, оказались намного проще своих аналогов даже для многочлена Джоунса.

Функторы Решетихина–Тураева. Как показали Решетихин и Тураев [16], построение инварианта зацеплений, связанного с квантовой группой, усовершенствуется до построения функтора из категории, в которой морфизмами являются крашенные оснащенные трехвалентные графы, в категорию конечномерных представлений квантовой группы. В [16] дано явное описание ограничения этого функтора на категорию связок (т.е. графов, состоящих из непересекающихся окружностей и интервалов), в то время как в случае графов с трехвалентными вершинами построение Решетихина и Тураева [16] оставляет выбор.

Насколько мне известно, в случае квантовой группы $gl(1|1)$ этот выбор никогда не осуществлялся, хотя о функторе Решетихина–Тураева из категории связок в категорию представлений квантовой группы $gl(1|1)$ и его связь с функцией Конвея упоминается в нескольких статьях, см., например, статью Розанского и Салера [14].

В настоящей статье дается явное построение функтора Решетихина–Тураева заданием весов Больцмана (см. табл. 1 и 2) на всей категории крашенных оснащенных трехвалентных графов. Выбор, оставленный Решетихиным и Тураевым [16], может быть осуществлен многими способами, но мне кажется, что тот, который сделан в настоящей статье, заслуживает особого внимания, так как получающийся функтор \mathcal{RT}^1 имеет особо хорошие свойства. Например, коэффициент в скейн соотношении 15 очень прост, а веса Больцмана являются многочленами от q .

Особенности квантовой $gl(1|1)$ делают построение интересным и не совсем очевидным. Так как $gl(1|1)$ является супералгеброй, все формулы приобретают необычный облик, странный для всех, кроме опытных суперматематиков (т.е. математиков, работающих с суперобъектами). В свою очередь, необычная алгебра приводит к необычным топологическим свойствам. Например, раскраски графов включают ориентации одномерной страты более тонким образом, и в некоторых вершинах циклический порядок примыкающих одномерных страт должен также быть включен в раскраску.

Модификации функтора Решетихина–Тураева. Очевидный полиномиальный вид весов Больцмана в табл. 1 и 2 и полиномиальная природа многочлена Александра подсказывают модификацию функтора \mathcal{RT}^1 , которая приводит к функтору \mathcal{A}^1 , действующему из почти такой же категории крашенных оснащенных трехвалентных графов в категорию свободных конечномерных модулей над некоторым коммутативным кольцом B . Например, роль кольца B может играть $\mathbb{Z}[M]$, где M — свободная абелева мультипликативная группа. В этом случае B является кольцом многочленов Лорана. Таким образом, \mathcal{A}^1 ближе к многочлену Александра.

Грубо говоря, \mathcal{A}^1 получается из \mathcal{RT}^1 исключением постоянной Планка q (параметра квантовой деформации в квантизации $U_q gl(1|1)$), достигаемой посредством замены степеней постоянной Планка q независимыми переменными в формулах для весов Больцмана. Веса Больцмана для \mathcal{A}^1 представлены в табл. 3 и 4.

При переходе от \mathcal{RT}^1 к \mathcal{A}^1 квантовая природа не исчезает вместе с q . Хотя $U_q gl(1|1)$ не действует на B -модулях, являющихся значениями функтора \mathcal{A}^1 на объектах, имеется подалгебра Хопфа в $U_q gl(1|1)$, для которой \mathcal{A}^1 можно поднять до функторов из той же категории в категорию модулей над этой подалгеброй.

Инвариант Александера. Схема, которую использовали Розанский и Салёр в [13] и [14] для того, чтобы связать функцию Конвея с квантовой $gl(1|1)$ версией функтора Решетихина–Тураева для связок, преобразует \mathcal{A}^1 в **инвариант Александера** $\underline{\Delta}$ крашенных оснащенных замкнутых трехвалентных графов в \mathbb{R}^3 .

Каждому крашеному оснащеному замкнутому графу Γ в \mathbb{R}^3 инвариант $\underline{\Delta}^1$ сопоставляет некоторый элемент $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$ кольца B . Раскраска графа Γ состоит из ориентации одномерных страт графа Γ , сопоставления каждой одномерной страте **кратность**, взятую из $\{t \in M \mid t^4 \neq 1\}$, и целый вес, а также фиксацией циклического порядка одномерных страт, примыкающих к некоторым вершинам. Зависимость инварианта Александера от весов, кратностей и циклических порядков ясна полностью и описана ниже. Существуют универсальные кратности на графе Γ с $M = H^1(\Gamma; \mathbb{Z})$ такие, что для данных ориентаций инвариант Александера графа Γ , раскрашенного этими ориентациями, с произвольными циклическими порядками, весами и кратностями может быть восстановлен по инварианту Александера графа Γ , раскрашенного теми же ориентациями, с универсальными кратностями и произвольными циклическими порядками и весами. Ориентации составляют наиболее тонкую часть раскраски. Это показано в случае одномерного остова тетраэдра, рассмотренного в п. 7.2. Однако, инвариант Александера этого графа с любой раскраской намного проще многочлена Джоунса того же графа, который является по существу $6j$ -символом и играет важную в топологической квантовой теории поля, основанной на квантовой группе $su(2)$.

Для зацепления L , раскрашенного подходящим образом,

$$\nabla(L)(t_1, \dots, t_k) = \underline{\Delta}^1(t_1^2, \dots, t_k^2).$$

Таким образом, $\underline{\Delta}^1$ можно рассматривать как обобщение функции Конвея на графы. Так же как и при переходе от многочлена Александера к функции Конвея, здесь мы должны заменить исходные переменные на квадратные

корни из них. Следовательно, переменные в инварианте Александра являются корнями четвертой степени от переменных в многочлене Александра. Сравните это с соотношением между скобками Кауфмана и многочленом Джоунса.

Граневые модели. Все формулы квантовой топологии можно грубо разделить на два класса: статсуммы по вершинам (вершинные статсуммы) и статсуммы по граням (граневые статсуммы). Граневые статсуммы более универсальны. Они по крайней мере более единообразны для топологических объектов различной природы. Однако формулы в определении инварианта Александра имеют вершинный тип.

В этой статье получены граневые статсуммы, представляющие многочлен Александра. Это делается посредством „перехода в мир теней“, изобретенного Кирилловым и Решетихиным [7] для получения граневой статсуммы, которая представляет квантовый $sl(2)$ инвариант крашенных оснащенных графов, обобщающий многочлен Джоунса. Конструкция, используемая здесь, является другой специальной разновидностью более общей конструкции, которую я обнаружил, изучая Кауфмановскую конструкцию „квантовых спинорных сетей“ [6] для инвариантов Тураева–Виро [21], рассказывая о них в своих лекциях в Калифорнийском университете в Сан Диего весной 1991 г. Я рассказывал об общей конструкции в нескольких докладах, но никогда не публиковал ее, так как в полной общности она довольно громоздка, в то время как в частных случаях, которые мне были известны до этой статьи и в которых она выглядела хорошо, результат уже был известен прежде.

Благодарности. Я благодарен Льву Розанскому за ценные консультации по суперматематике, $gl(1|1)$ и статьям [13] и [14] и Александру Шумаковичу, нашедшему ошибку в предварительной версии этой статьи.

§1. Предварительные геометрические сведения о заузленных графах

1.1. Общие графы. Под *графом общего положения* или *трехвалентным графом* мы понимаем одномерное клеточное пространство, в котором каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную либо \mathbb{R} , либо полупрямой \mathbb{R}_+ , либо объединению трех экземпляров полупрямой \mathbb{R}_+ , пересекающихся в общей концевой точке. Каждый трехвалентный граф стратифицирован естественным образом. Под одномерными стратами мы понимаем связные компоненты множества точек, имеющих окрестности, гомеоморфные \mathbb{R} . Под нульмерными стратами трехвалентного графа Γ мы понимаем вершины валентности 3 и 1 графа Γ . Первые называются *внутренними вершинами* и

последние — *концами* или *граничными точками* графа. Множество граничных точек графа Γ называется *границей* графа Γ и обозначается $\partial\Gamma$, дополнение $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ называется *внутренностью* графа Γ и обозначается $\text{Int } \Gamma$. Трехвалентный граф Γ с пустой внутренней частью называется *замкнутым*. Одномерные страты, гомеоморфные \mathbb{R} , называются *ребрами*. (Таким образом, компонента трехвалентного графа может не иметь вершин.)

Трехвалентный граф Γ называется *собственно вложенным* в трехмерное многообразие M , если $\Gamma \subset M$ и $\partial\Gamma = \Gamma \cap \partial M$.

1.2. Дополнительные структуры на трехвалентных графах. Трехвалентные графы, вложенные в трехмерные многообразия, часто снабжаются различными дополнительными структурами. Наиболее традиционными являются ориентации и оснащения. *Ориентация* трехвалентного графа Γ представляет собой ориентацию всех его одномерных страт.

Пусть Γ — трехвалентный граф, собственно вложенный в трехмерное многообразие M . Расширение графа Γ до вложенной компактной поверхности F , в которой Γ располагается как деформационный ретракт, называется *оснащением* графа Γ (в M), если $\partial F \cap \partial\Gamma = F \cap \partial\Gamma$ и каждая компонента пересечения $F \cap \partial M$ является дугой, содержащей в точности одну граничную точку графа Γ . Эти дуги образуют оснащение границы $\partial\Gamma$ в ∂M . Под оснащением дискретного подмножества поверхности мы понимаем набор непересекающихся дуг, гладко вложенных в поверхность так, что каждая дуга содержит в точности одну точку этого подмножества и каждая точка содержится в одной из дуг.

Под изотопией оснащенного трехвалентного графа мы понимаем объемлющую изотопию графа в объемлющем пространстве, продолженную до изотопии оснащения. В случае собственно вложенных оснащенных трехвалентных графов изотопия предполагается неподвижной на пересечении с границей объемлющего многообразия.

Понятие оснащенного трехвалентного графа обобщает понятие оснащенного зацепления. В самом деле, набор окружностей можно рассматривать как трехвалентный граф, и если поверхность оснащения ориентируема, то оснащение определено с точностью до изотопии с помощью ненулевого векторного поля нормального к окружностям и касательного к поверхности. Напомним, что обычно под оснащением зацепления понимают ненулевое нормальное векторное поле на нем. В случае, когда поверхность оснащения неориентируема, она связана аналогичным образом с полем нормальных прямых, а не векторов.

Третья дополнительная структура, рассматриваемая ниже — это *ориентация вершин*. Трехвалентный граф называется *ориентированным в (трехвалентной) вершине*, если ростки ребер, примыкающих к этой вершине,

циклически упорядочены. Мы говорим здесь о ростках, а не о ребрах, поскольку ребро может примыкать к вершине дважды, и тогда имеется только два примыкающих ребра (а двухэлементное множество не может быть *циклически* упорядоченным!). Если граф является оснащенный, то его ориентация в вершине определяет локальную ориентацию поверхности оснащения в этой вершине.

1.3. Диаграммы. Для того чтобы описать трехвалентный граф в \mathbb{R}^3 с точностью до изотопии, используется естественное обобщение диаграмм зацеплений. Пусть Γ — трехвалентный граф, вложенный в \mathbb{R}^3 . Проекция графа Γ в \mathbb{R}^2 называется *общей*, если

- (1) ее ограничение на каждую одномерную страту графа Γ является погружением;
- (2) она не имеет точек кратности ≥ 3 ;
- (3) ни одна двойная точка не является образом вершины графа Γ ;
- (4) в каждой двойной точке образы одномерных страт пересекаются трансверсально;
- (5) никакие две ветви одномерных страт не касаются в образе вершины.

Ясно, что термин *общая* является подходящим здесь в том смысле, что вложенные трехвалентные графы с необщей проекцией в \mathbb{R}^2 образуют нигде не плотное множество в пространстве всех вложенных трехвалентных графов: произвольно малой изотопией можно сделать произвольный вложенный трехвалентный граф имеющим общую проекцию и никакой достаточно малой изотопией общую проекцию нельзя сделать необщей.

Для того чтобы получить описание трехвалентного графа, вложенного в \mathbb{R}^3 , с точностью до изотопии, необходимо добавить к общей проекции информацию о том, какая ветвь лежит выше, а какая ниже в каждой двойной точке. Если это сделано разрывом нижней ветви, то полученная картина, как и в случае зацеплений, называется *диаграммой* графа.

1.4. Страты диаграммы. Образом трехвалентного графа Γ при общей проекции является граф, вложенный в \mathbb{R}^2 . Его вершинами являются двойные точки проекции и образы вершин графа Γ . Первые называются также *точками скрещивания*. Естественная стратификация этого графа продолжается до стратификации плоскости \mathbb{R}^2 , в которой двумерными стратами являются компоненты связности дополнения проекции. Страты этой стратификации называются *стратами диаграммы*, а двумерные страты — также *гранями* диаграммы.

1.5. Преобразования диаграмм. Диаграммы изотопных друг другу трехвалентных графов, вложенных в \mathbb{R}^3 , могут быть получены друг из друга

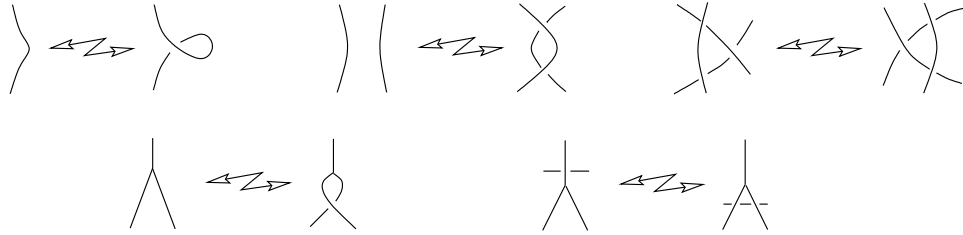


Рис. 1. Элементарные изотопии трехвалентных графов.

последовательными преобразованиями пяти типов, показанных на рис. 1. Здесь два преобразования относятся к одному типу, если преобразования происходят в кругах, которые могут быть отображены друг на друга с помощью гомеоморфизма, переводящего одну картину на другую, возможно, с последующей одновременной заменой проходов на переходы во всех точках скрещивания (эта замена соответствует отражению в плоскости, параллельной плоскости диаграммы). Эти типы находятся во взаимно-однозначном соответствии с условиями в определении общей проекции: каждое из преобразований на рис. 1 может быть осуществлено с помощью изотопии, при которой ровно один раз нарушается в точности одно из условий, причем самым простым способом. Первые три преобразования — это хорошо известные преобразования Райдемайстера. Они не затрагивают вершин и могут быть использованы для получения одной диаграммы изотопных зацеплений из другой.

1.6. Демонстрация дополнительных структур на диаграмме. Всякий трехвалентный граф с общей проекцией в \mathbb{R}^2 можно снабдить таким оснащением, что проекция в \mathbb{R}^2 , ограниченная на оснащение, является погружением (напомним, что оснащение является поверхностью). Это оснащение единственно с точностью изотопии. Оно называется *диаграммным оснащением*.

Аналогично трехвалентный граф с общей проекцией в \mathbb{R}^2 можно снабдить *диаграммной* ориентацией в вершине: циклическим порядком примыкающих ростков ребер в направлении против часовой стрелки. Произвольную ориентацию вершины можно показать на диаграмме круговой стрелкой вокруг вершины, указывающей циклический порядок. Для простоты мы опускаем все стрелки в положительном направлении.

Пусть Γ — оснащенный трехвалентный граф с общей проекцией в \mathbb{R}^2 . На каждой одномерной страте графа Γ можно сравнить два оснащения: диаграммное и исходное. Разность представляет собой либо целое число, либо полуцелое. Это — число (полных) правых оборотов, которое нужно

добавить к диаграммному оснащению на одномерной страте, чтобы получить оснащение, включенное в исходное оснащение графа Γ . Для описания оснащенного трехвалентного графа с точностью до изотопии достаточно нарисовать его диаграмму, снабженную этими числами, приписанными ко всем одномерным стратам графа. Другой способ показать разницу между оснащением и диаграммным оснащением состоит в том, чтобы поместить на дугу диаграммы фрагмент \curvearrowright на положительном полуобороте и фрагмент \curveleft на отрицательном полуобороте. Конечно, изотопический тип оснащения описывается общим числом полуоборотов на каждой компоненте. Однако иногда, особенно при описании изменений в диаграмме, удобно локализовать места, где оснащение ортогонально плоскости диаграммы и установить локальное поведение оснащения в этих местах, как это делают рисунки \curvearrowright и \curveleft . **Диаграммой оснащенного графа** мы называем диаграмму, дополненную разностями между оснащением и диаграммным оснащением, которые представлены либо числами, либо изображениями полуоборотов.

Диаграммы изотопных оснащенных трехвалентных графов могут быть получены друг из друга последовательными преобразованиями семи типов,² показанных на рис.2. Первые пять из них являются преобразованиями рис. 1, снабженными описанием поведения оснащения. Последние два описывают появление и преобразование точек полуоборота.

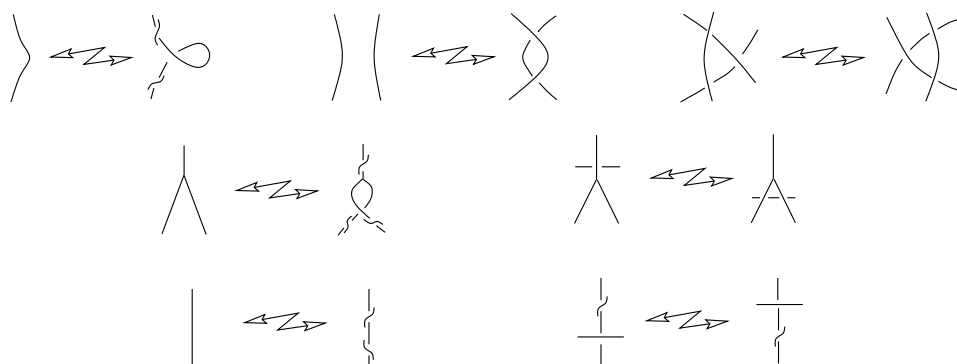


Рис. 2. Элементарные изотопии оснащенных трехвалентных графов.

Понятие диаграммы распространяется очевидным образом на трехвалентные графы и оснащенные трехвалентные графы, лежащие в произведении поверхности P на \mathbb{R} или $[0, 1]$. Эти диаграммы рисуются на P . Чтобы

²С точностью до той же грубой эквивалентности, что и выше, где рассматривались изотопии неоснащенных графов.

исключить ситуации, в которых диаграммы не совсем понятны, мы условимся считать, что граничные точки графов находятся над краем поверхности P , что нет двойных точек на границе поверхности P и что оснащения в конечных точках графов являются диаграммными.

1.7. Категория графов. Оснащенные графы приводят к категории \mathcal{G} , которая определяется следующим образом. Ее объекты находятся во взаимно-однозначном соответствии с натуральными числами. Объектом, отвечающим натуральному числу k , является пара, состоящая из \mathbb{R}^2 и множества Π_k из k точек $(1, 0), (2, 0), \dots, (k, 0)$, снабженного оснащением, состоящим из маленьких интервалов оси абсцисс. Морфизмом из k -го объекта в l -й является изотопический класс оснащенного трехвалентного графа Γ , вложенного в $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ с $\partial\Gamma = \Pi_k \times 0 \cup \Pi_l \times 1 = \partial(\mathbb{R}^2 \times [0, 1]) \cap \Gamma$. Оснащенный трехвалентный граф такого типа называется **(оснащенным) (k, l) -графом**. Композиция двух морфизмов строится посредством расположения одного из графов непосредственно над другим и последующего объединения графов. Тожественным морфизмом объекта (\mathbb{R}^2, Π_k) является $(\mathbb{R}^2 \times [0, 1], \Pi_k \times [0, 1])$.

Имеется еще одна важная операция над оснащенными (k, l) -графами, которая называется **тензорным произведением**. Тензорное произведение оснащенного (k, l) -графа Γ на (m, n) -граф Γ' — это $(k + m, l + n)$ -граф, который получится, если поместить Γ' слева от Γ .

1.8. Образующие и соотношения категории. Оснащенные (k, l) -графы представляются диаграммами на полосе $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Применяя соображения общего положения к диаграммам и их деформациям при изотопии, можно легко найти естественные образующие и соотношения категории оснащенных трехвалентных графов, которые описаны в следующих теоремах.

1.8.A. *Всякий морфизм категории \mathcal{G} может быть представлен в виде композиции морфизмов, каждый из которых является тензорным произведением тождественных морфизмов (т.е. изотопических классов графов $\Pi_i \times [0, 1]$ с диаграммным оснащением) и одного из морфизмов, показанных на рис. 3.*

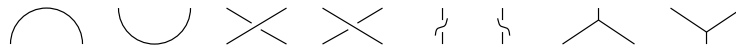


Рис. 3. Образующие категории \mathcal{G} .

Действительно, малой изотопией мы можем добиться того, чтобы ограничение второй координаты на каждую одномерную страту плоской проекции

графа имело лишь невырожденные изолированные критические точки. Далее, можно добиться того, чтобы значения второй координаты в этих точках, в точках полуоборота оснащения и в вершинах проекции были попарно различны. После этого проведем горизонтальные прямые, отделяющие друг от друга критические точки, точки полуоборота и вершины. Куски между соседними линиями являются графами требуемых типов.

Похожие рассуждения, примененные к однопараметрическому семейству графов вместе с представлением некоторых элементарных соотношений как следствий других элементарных соотношений, доказывают следующую теорему.

1.8.В. Два произведения графов, порождающих \mathcal{G} в силу теоремы 1.8.А, изотопны в том и только в том случае, если они могут быть преобразованы друг в друга последовательными элементарными преобразованиями, показанными на рис. 4.

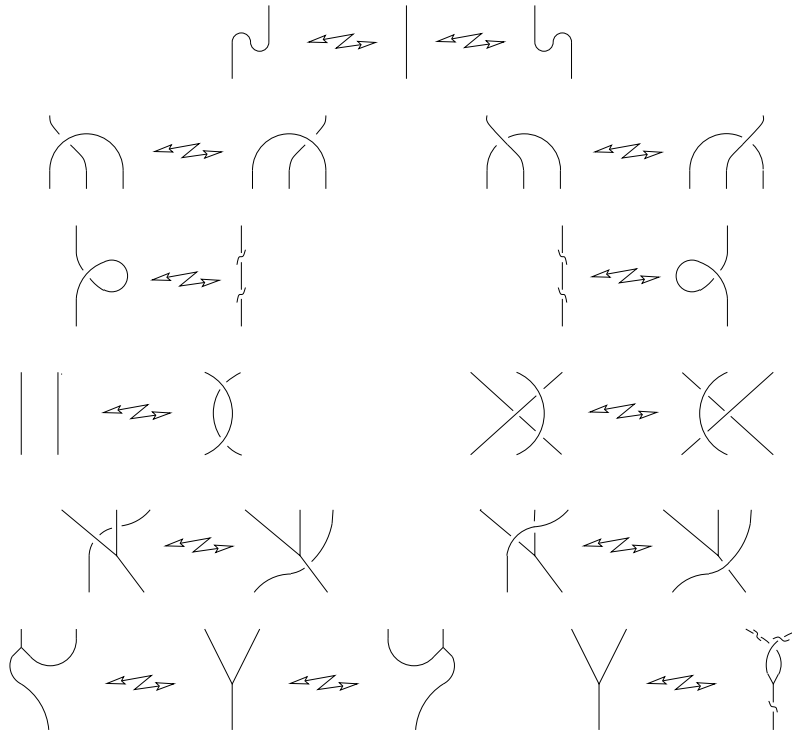


Рис. 4. Соотношения категории \mathcal{G} .

§2. Функтор Решетихина–Тураева, основанный на $gl(1|1)$

2.1. Категория крашенных оснащенных графов. Объекты. Напомню, что по схеме Решетихина–Тураева [16] инварианты строятся с помощью функтора из категории крашенных оснащенных графов, объектами и морфизмами которой являются объекты и морфизмы категории \mathcal{G} , снабженные дополнительными структурами (крашенные), в категорию конечномерных представлений некоторой квантовой группы. Здесь схему Решетихина–Тураева нужно немного модифицировать.

Пусть h — отличное от нуля комплексное число. Ниже мы определим категорию \mathcal{G}_h^1 . Она также обозначается \mathcal{G}^1 , если зависимость от h не подчеркивается. Ее объектами являются конечные последовательности троек, состоящих из двух комплексных чисел, скажем, j и J , и знака δ (т.е. $\delta = +$ или $-$). Первое число должно быть таким, чтобы $2jh\sqrt{-1}/\pi$ не было целым. Первое число называется *кратностью*, второе — *весом*.

Удобно связывать тройки $(j_1, J_1, \delta_1), \dots, (j_k, J_k, \delta_k)$, образующие объект, с точками $(1, 0), \dots, (k, 0)$ плоскости \mathbb{R}^2 . Объект $\{(j_1, J_1, \delta_1), \dots, (j_k, J_k, \delta_k)\}$ следует рассматривать как множество $\Pi_k = \{(1, 0), \dots, (k, 0)\}$, точки которого окрашены тройками $(j_1, J_1, \delta_1), \dots, (j_k, J_k, \delta_k)$. Знаки $\delta_1, \dots, \delta_k$ следует интерпретировать как ориентации соответствующих точек.

В действительности тройки означают неприводимые $(1|1)$ -мерные $U_q gl(1|1)$ -модули. Напомню (см. приложение 1, п. 11.4), что неприводимые $(1|1)$ -мерные $U_q gl(1|1)$ -модули занумерованы знаком \pm и парой комплексных параметров (j, J) с $j \in \mathbb{C} \setminus \{\pi n\sqrt{-1}/2h : n \in \mathbb{Z}\}$ и $J \in \mathbb{C}$. Здесь h — параметр квантования (постоянная Планка).

2.2. Категория крашенных оснащенных графов. Морфизмы. Морфизм категории \mathcal{G}_h^1

$$\{(i_1, I_1, \epsilon_1), \dots, (i_k, I_k, \epsilon_k)\} \rightarrow \{(j_1, J_1, \delta_1), \dots, (j_l, J_l, \delta_l)\}$$

— это морфизм в \mathcal{G} (см. п. 1.7), снабженный дополнительными структурами, описанными ниже. Напомним, что морфизм категории \mathcal{G} — это оснащенный трехвалентный граф (см. §1.1) Γ , вложенный в $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ с $\partial\Gamma = \Pi_k \times 0 \cup \Pi_l \times 1 = \partial(\mathbb{R}^2 \times [0, 1]) \cap \Gamma$, рассматриваемый с точностью до объемлемой изотопии, неподвижной на $\partial\Gamma$. Его оснащение в концевых точках параллельно оси x .

Все дополнительные структуры на Γ вместе называются \mathcal{G}^1 -*раскраской*. Каждая одномерная страта окрашена с помощью ориентации и пары комплексных чисел, первое из которых не принадлежит $\{\pi n\sqrt{-1}/2h : n \in \mathbb{Z}\}$. Эти числа называются также *кратностью* и *весом* соответственно. Ориентации ребер смежных граничным точкам определяются знаками цветов

точек: ребро, смежное точке с + ориентировано в этой точке вверх (вдоль стандартного направления оси z), в противном случае оно ориентировано вниз. Кратность и вес ребра, примыкающего к концевой точке, совпадают с соответствующими ингредиентами цвета этой концевой точки. В каждой вершине валентности три цвета смежных ребер удовлетворяют следующим условиям.

2.2.A. Условия допустимости. Пусть (j_1, J_1) , (j_2, J_2) и (j_3, J_3) — компоненты кратностей и весов компонент цветов трех ребер, ростки которых примыкают к одной и той же вершине, и пусть $\epsilon_i = -1$, если i -е ребро ориентировано в эту вершину и $\epsilon_i = 1$ в противном случае. Тогда

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i j_i = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i J_i = - \prod_{i=1}^3 \epsilon_i. \tag{2}$$

Вершина, для которой примыкающие ребра ориентированы все в ее сторону (т.е. $\sum_{i=1}^3 \epsilon_i = -3$) или все — в противоположном направлении (т.е. $\sum_{i=1}^3 \epsilon_i = 3$) называется **сильной**. В каждой сильной вершине граф Γ ориентирован. Ориентация графа Γ в сильных вершинах рассматривается как часть раскраски графа Γ наряду с ориентациями, кратностями и весами одномерных страт.

Уравнение (1) похоже на уравнение Кирхгофа на токи. Более топологическая интерпретация такова: граница цепи $\sum j_i e_i$, где сумма берется по всем ребрам e_i графа (с их ориентациями) и где j_i является первой компонентой цвета e_i , равна сумме всех граничных точек графа Γ , взятых с коэффициентами, являющимися кратностями этих точек с подходящими знаками. В частности, сумма $\sum j_i e_i$ является относительным циклом в графе Γ по модулю $\partial\Gamma$ с вещественными коэффициентами, так что она определяет элемент группы $H_1(\Gamma, \partial\Gamma; \mathbb{C})$.

2.2.A.1. Замечание. В схеме Решетихина–Тураева ориентацию ребра можно заменить на противоположную с одновременным изменением численной компоненты цвета. Здесь это сделать нельзя. Ориентации следует рассматривать как неотделимые ингредиенты цветов. Изменение ориентации одной одномерной страты нельзя компенсировать изменением других компонент раскраски.

Ориентации в сильных вершинах не настолько важны. Изменение одной из них приводит к умножению на -1 образа функтора Решетихина–Тураева

(см. п.2.5). Поэтому в дальнейшем многие формулы кажутся не содержащими ориентаций в вершинах. Ориентации в вершинах скрыты исключением сильных вершин с ориентацией по часовой стрелке. Напомним, что мы договорились не показывать ориентации против часовой стрелки в вершинах диаграммы.

Вершина с нечетным числом смежных ребер, ориентированных в нее (т.е. $\prod_{i=1}^3 \epsilon_i = -1$), называется *нечетной*. Если представлять себе веса как токи, тогда (2) будет означать, что каждая нечетная вершина является источником производительности 1, а четная вершина — стоком производительности 1. Другими словами, $\partial \sum J_i e_i$ включает в себя каждую нечетную вершину с коэффициентом -1 и каждую четную вершину — с коэффициентом 1.

Композиция двух морфизмов определяется как присоединение одного из них над другим. Имеется другая важная операция над морфизмами, называемая *тензорным произведением*. Тензорное произведение морфизма Γ на морфизм Γ' получается расположением Γ' слева от Γ .

Имеется естественный стирающий функтор $\mathcal{G}_h^1 \rightarrow \mathcal{G}$. Морфизмы категории \mathcal{G}_h^1 , которые переводятся этим функтором в образующие категории \mathcal{G} , порождают категорию \mathcal{G}_h^1 . Поэтому теорема 1.8.A влечет следующее утверждение.

2.2.B. Образующие категории \mathcal{G}_h^1 . *Всякий морфизм категории \mathcal{G}_h^1 может быть представлен как композиция морфизмов, каждый из которых является тензорным произведением тождественных морфизмов (т.е. изотопических классов графов $\Pi_i \times [0, 1]$, имеющего диаграммное оснащение и подходящим образом раскрашенного) и одного из морфизмов, граф которого изображен на рис. 3.*

Аналогично теорема 1.8.B дает соотношения категории \mathcal{G}_h^1 .

2.3. Функтор Решетихина–Тураева на объектах. Пусть \mathcal{R}_q — категория конечномерных модулей над q -деформированной универсальной обертывающей алгеброй $U_q gl(1|1)$ супералгебры $gl(1|1)$. Нашей целью является построение функтора $\mathcal{RT}^1 : \mathcal{G}_h^1 \rightarrow \mathcal{R}_q$.

Образ объекта $\{(j_1, J_1, \epsilon_1), \dots, (j_k, J_k, \epsilon_k)\}$ категории \mathcal{G}_h^1 при \mathcal{RT}^1 определяется как тензорное произведение $(j_1, J_1)_{\epsilon_1} \otimes \dots \otimes (j_k, J_k)_{\epsilon_k}$ неприводимых $(1|1)$ -мерных $U_q gl(1|1)$ -модулей.

Каждый множитель $(j_i, J_i)_{\epsilon_i}$ является двумерным векторным пространством с каноническим базисом. Векторы e_0 и e_1 , образующие этот базис,

отличаются своей природой: e_0 является бозоном, а e_1 — фермионом.³ Таким образом, $(j_1, J_1)_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes (j_k, J_k)_{\epsilon_k}$ является комплексным векторным пространством размерности 2^k . Его базис состоит из векторов $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$, так что базисные векторы можно отождествить с последовательностями из нулей и единиц, помещенных в точки Π_k .

2.4. Отступление: веса Больцмана. Для того чтобы описать образы морфизмов под действием \mathcal{RT}^1 , используют геометрическую интерпретацию, заимствованную из статистической механики. Напомню, как это делается.

Образ произвольного морфизма категории \mathcal{G}_h^1 под действием \mathcal{RT}^1 является линейное отображение соответствующих пространств. Это отображение можно представить матрицей. Элементами этой матрицы являются комплексные числа, соответствующие парам, состоящим из базисных векторов этих двух векторных пространств. Напомним, что базисные векторы интерпретируются как последовательности из нулей и единиц. Нули и единицы помещены в концевые точки крашеного оснащенного графа, представляющего морфизм. Значит, чтобы определить образ этого под действием \mathcal{RT}^1 , нужно каждому распределению нулей и единиц в концевых точках графа сопоставить комплексное число.

Конечно, достаточно определить образы всех образующих категории \mathcal{G}_h^1 (см. рис. 3) таким образом, чтобы эти образы удовлетворяли соотношениям, изображенным на рис. 4.

Для графа, соответствующего образующей, всякое распределение нулей и единиц в концевых точках естественно распространяется на смежные одномерные страты диаграммы. Матричный элемент морфизма, являющегося образом образующей категории \mathcal{G}_h^1 , соответствует такой раскраске одномерной страты диаграммы.

Мы имеем дело с двумя раскрасками: первая является \mathcal{G}^1 -раскраской, а вторая сопоставляет нуль или единицу каждой одномерной страте диаграммы. Эти раскраски означают базисные векторы модуля, ассоциированного с \mathcal{G}^1 -раскраской одномерной страты. Чтобы отличить эти раскраски друг от друга, мы будем называть первую из них (т.е. \mathcal{G}^1 -раскраску) *первичной раскраской*, а вторую — *вторичной раскраской*.

Значит, чтобы определить образ образующей категории \mathcal{G}^1 под действием \mathcal{RT}^1 , нам нужно с каждой парой раскрасок элементарных графов, изображенных на рис. 3, связать подходящее комплексное число. В статистической механике, откуда эта графическая интерпретация пришла, эти числа называют *весами Больцмана*.

³Что бы это ни означало! См. краткие пояснения в приложении 1.

Как только веса Больцмана известны, для всех пар раскрасок элементарных графов матричный элемент для образа произвольного морфизма категории \mathcal{G}_h^1 может быть вычислен следующим образом: выберем диаграмму для соответствующего графа, рассмотрим все продолжения данных распределений нулей и единиц в концевых точках графа на вторичные раскраски всей диаграммы. Для каждой из вторичных раскрасок образуем произведение всех весов Больцмана их элементарных фрагментов. Сумма этих произведений по всем таким вторичным раскраскам является требуемым матричным элементом. Вторичная раскраска в терминологии статистической механики именовалась бы *состоянием* (графа). Следовательно, сумма всех произведений является суммой по всем состояниям или *статсуммой*.

2.5. Уточнение функтора Решетихина–Тураева на морфизмах. В главной теореме статьи Решетихина–Тураева [16] приводятся образы образующих с шестью графами, изображенными слева от рис. 3. Для двух правых это должны быть морфизмы Клебша–Гордана, масштабированные так, чтобы выполнялись соотношения, соответствующие нижней строчке рис. 4.

Выбор масштаба не предписан теоремой Решетихина–Тураева и, более того, не является единственным. Однако свойства функтора зависят от выбора, сделанного здесь, и оправдывают его.

Образы образующих заданы ниже в табл. 1 и 2 весами Больцмана. Вторичные раскраски показаны там следующим образом. Дуги, окрашенные бозонным базисным вектором e_0 , изображены пунктирными линиями, дуги, окрашенные фермионным базисным вектором e_1 , изображены сплошными линиями. (Мы следуем Кауфману и Салёру [8].)

Самый левый граф на рис. 3 может быть ориентирован двумя способами. Если он ориентирован справа налево, то его образ под действием \mathcal{RT}^1 должен отображать $(j, J)_- \otimes (j, J)_+$ в \mathbb{C} . Теорема Решетихина–Тураева дает ⁴спаривание \curvearrowright , которое действует по правилу $(e_a \otimes e_b) \mapsto (-1)^a q^{-2ja} \delta_{ab}$, (см. п. 11.5). Для того же графа с противоположной ориентацией теорема Решетихина–Тураева дает „квантово-сопряженное“ спаривание \curvearrowleft , которое действует по правилу $(e_a \otimes e_b) \mapsto q^{2j(1-a)} \delta_{ab}$, см. §11.5.

Следующий граф на рис. 3, ориентированный справа налево, отображается посредством \mathcal{RT}^1 в $\mathbb{C} \rightarrow (j, J)_- \otimes (j, J)_+$. Теорема Решетихина–Тураева дает коспаривание $\curvearrowright : 1 \mapsto e_0 \otimes e_0 - e_1 \otimes q^{2j} e_1$ (знак минус появляется снова благодаря суперматематике). Для того же графа с противоположной ориентацией формула имеет вид

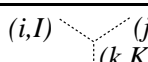
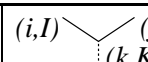
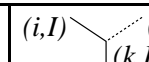
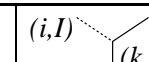










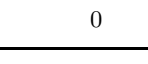
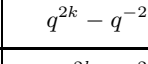
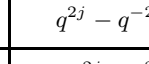
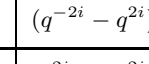










$$\curvearrowleft : \mathbb{C} \rightarrow (j, J)_+ \otimes (j, J)_- : 1 \mapsto q^{-2j} e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1.$$

⁴Это отличается знаком от спаривания Решетихина–Тураева, поскольку мы действуем в рамках суперматематики, см. приложение 1.

ТАБЛИЦА 1

	+1	$-q^{2j}$	q^{-2j}	1
	+1	$-q^{-2j}$	q^{2j}	1
	q^{-jJ}	q^{-jJ}	q^{-jJ}	q^{-jJ}
	q^{jJ}	q^{jJ}	q^{jJ}	q^{jJ}
	$q^{-iJ-jI} q^{i+j}$	$q^{-iJ-jI} q^{i+j}$	$q^{-iJ-jI} q^{i+j}$	$q^{-iJ-jI} q^{i+j}$
	$q^{-iJ-jI} q^{j-i}$	$q^{-iJ-jI} q^{j-i}$	$q^{-iJ-jI} q^{j-i}$	$q^{-iJ-jI} q^{j-i}$
	$q^{-iJ-jI} q^{i-j}$	$q^{-iJ-jI} q^{i-j}$	$q^{-iJ-jI} q^{i-j}$	$q^{-iJ-jI} q^{i-j}$
	$-q^{-iJ-jI} q^{-i-j}$	$-q^{-iJ-jI} q^{-i-j}$	$-q^{-iJ-jI} q^{-i-j}$	$-q^{-iJ-jI} q^{-i-j}$
	0	$\frac{1-q^{-4i}}{q^{+iJ+jI-i-j}}$	0	0
	$\frac{q^{4i}-1}{q^{+iJ+jI+i+j}}$	0	0	0
	0	0	$\frac{1-q^{-4j}}{q^{+iJ+jI+i-j}}$	0
	0	0	0	$\frac{1-q^{4j}}{q^{+iJ+jI-i+j}}$
	$q^{iJ+jI} q^{-i-j}$	$q^{iJ+jI} q^{-i-j}$	$q^{iJ+jI} q^{-i-j}$	$q^{iJ+jI} q^{-i-j}$
	$q^{iJ+jI} q^{i-j}$	$q^{iJ+jI} q^{i-j}$	$q^{iJ+jI} q^{i-j}$	$q^{iJ+jI} q^{i-j}$
	$q^{iJ+jI} q^{j-i}$	$q^{iJ+jI} q^{j-i}$	$q^{iJ+jI} q^{j-i}$	$q^{iJ+jI} q^{j-i}$
	$-q^{iJ+jI} q^{i+j}$	$-q^{iJ+jI} q^{i+j}$	$-q^{iJ+jI} q^{i+j}$	$-q^{iJ+jI} q^{i+j}$
	$\frac{1-q^{4j}}{q^{-iJ-jI+i+j}}$	0	0	0
	0	$\frac{q^{-4j}-1}{q^{-iJ-jI-i-j}}$	0	0
	0	0	0	$\frac{1-q^{-4i}}{q^{-iJ-jI-i+j}}$
	0	0	$\frac{1-q^{4i}}{q^{-iJ-jI+i-j}}$	0

ТАБЛИЦА 2

				
	0	1	$-q^{2i}$	1
	0	-1	q^{2i}	-1
	0	$q^{2k} - q^{-2k}$	$q^{2j} - q^{-2j}$	$(q^{-2i} - q^{2i})q^{2j}$
	0	$q^{-2k} - q^{2k}$	$q^{-2j} - q^{2j}$	$(q^{2i} - q^{-2i})q^{2j}$
	$q^{2k} - q^{-2k}$	0	$(q^{2i} - q^{-2i})q^{-2j}$	$q^{2j} - q^{-2j}$
	1	$-q^{2i}$	1	0
	$q^{2j} - q^{-2j}$	$(q^{-2i} - q^{2i})q^{2j}$	0	$q^{2k} - q^{-2k}$
	q^{-2i}	1	0	1
	$(q^{2i} - q^{-2i})q^{-2j}$	$q^{2j} - q^{-2j}$	$q^{2k} - q^{-2k}$	0
	1	0	1	q^{-2i}
				
	0	$q^{2k} - q^{-2k}$	$q^{2j} - q^{-2j}$	$(q^{-2i} - q^{2i})q^{-2j}$
	0	$q^{-2k} - q^{2k}$	$q^{-2j} - q^{2j}$	$(q^{2i} - q^{-2i})q^{-2j}$
	0	1	$-q^{-2i}$	1
	0	-1	q^{-2i}	-1
	1	0	1	q^{2i}
	$(q^{2i} - q^{-2i})q^{2j}$	$q^{2j} - q^{-2j}$	$q^{2k} - q^{-2k}$	0
	q^{2i}	1	0	1
	$q^{2j} - q^{-2j}$	$(q^{-2i} - q^{2i})q^{-2j}$	0	$q^{2k} - q^{-2k}$
	1	$-q^{-2i}$	1	0
	$q^{2k} - q^{-2k}$	0	$(q^{2i} - q^{-2i})q^{2j}$	$q^{2j} - q^{-2j}$

Следующие два графа на рис. 3 являются диаграммами окрестностей точек скрещивания. В точке скрещивания, где нити окрашены модулями M и N , теорема Решетихина–Тураева дает композицию действия универсальной R -матрицы в тензорном произведении $M \otimes N$ и транспозиции $M \otimes N \rightarrow N \otimes M$. Эта композиция вычисляется в приложении 1, п. 11.6. Ненулевые веса Больцмана приведены в табл. 1.

Каждый из следующих двух графов на рис. 3 состоит из единственной нити с полуоборотом оснащения. Нам нужно ассоциировать с ними действия квадратного корня из v^{-1} и v соответственно в модуле, соответствующем цвету нити. v действует как в $(j, J)_+$, так и в $(j, J)_-$ как умножение на q^{2jJ} (см. п. 11.4). Поэтому весами Больцмана для

$$\downarrow_{(j,J)}, \quad \downarrow_{(j,J)}, \quad \downarrow_{(j,J)}, \quad \downarrow_{(j,J)}$$

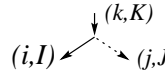
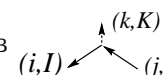
являются соответственно

$$q^{-jJ}, \quad q^{-jJ}, \quad q^{jJ}, \quad q^{jJ}.$$

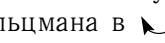
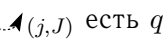
Последние два графа рис. 3 являются регулярными окрестностями трехвалентной вершины. Они допускают много ориентаций, и веса Больцмана существенно зависят от них. Как отмечалось выше, веса являются коэффициентами Клебша–Гордана, которые нормированы так, чтобы статсумма была инвариантна относительно преобразований, изображенных на рис. 4. Морфизмы Клебша–Гордана вычисляются в п. 11.6.

Доказательство того, что веса Больцмана дают корректно определенный функтор, можно дать либо ссылкой на теорему Решетихина–Тураева [16] и рутинной проверкой инвариантности относительно преобразований, приведенных в нижней строчке на рис. 4, или более долгой рутинной проверкой инвариантности относительно всех преобразований, приведенных на рис. 4. Так как каждое из этих доказательств длинное и прямое, я оставляю их читателю.

2.6. Симметрия весов Больцмана. Весы Больцмана в табл. 1 и 2, которые не содержат ни весовых компонент цветов, ни ориентаций по часовой стрелке в сильных вершинах, обладают замечательной симметрией. Если обратить ориентацию двух ребер какого-либо элемента в табл. 2 и одновременно переставить бозоны с фермионами на них, то в весах Больцмана каждое выражение вида q^{2j} , где j — кратность дуги, участвующей в этой замене, заменится на $-q^{-2j}$.

Например, так как вес Больцмана в  есть $(q^{2i} - q^{-2i})q^{2j}$, то весом Больцмана в  является $(q^{2i} - q^{-2i})(-q^{-2j}) = (q^{-2i} - q^{2i})q^{-2j}$.

Эта симметрия позволяет восстановить всю табл. 2 по ее первому столбцу. Требование замены двух ребер можно заменить требованием сохранения четности трехвалентной вершины.

Веса Больцмана в табл. 1 в точках максимума и минимума удовлетворяют симметрии того же сорта: так как вес Больцмана в  есть $-q^{2j}$, то вес Больцмана в  есть q^{-2j} .

2.7. Как исключить постоянную Планка. Все веса Больцмана в табл. 1 и 2 являются линейными комбинациями степеней q . Показатели степеней являются линейными комбинациями кратностей и произведений кратностей на вес. Число q никогда не появляется без показателя такого вида.

Веса Больцмана в табл. 1 и 2 тождественно удовлетворяют уравнениям, выражающим инвариантность статсумм относительно преобразований, изображенных на рис. 4. Эти уравнения имеют вид целых полиномиальных уравнений по степеням q с показателями $\pm j_i$ и $J_k j_i$, где j_1, \dots, j_n — кратности и J_1, \dots, J_n — веса участвующих цветов. Уравнения удовлетворяются тождественно для показателей, удовлетворяющих условиям допустимости. Последние появляются только в уравнениях, соответствующих преобразованиям из двух нижних строк рис. 4. Каждое из этих преобразований включает в себя единственную тройную вершину. Следовательно, условия допустимости позволяют исключить кратность и вес одного из ребер. После этого уравнения будут удовлетворяться тождественно степенями q с алгебраически независимыми показателями.

Заменяем в них каждое q^{j_i} на t_i и ограничимся целыми J_i 's. Так как исходные уравнения удовлетворяются тождественно по j_i и J_i , удовлетворяющим условиям допустимости, то новые уравнения удовлетворяются тождественно при условии, что t_i и J_i удовлетворяют тождествам, соответствующим условиям допустимости.

Это наводит на мысль исключить q , заменив его степени новыми величинами. Заменители для q^{j_i} могут быть взяты из мультипликативной группы, но должны быть отличны от корней четвертой степени из единицы и настолько независимы, насколько позволяет условие допустимости. Группу необязательно фиксировать раз навсегда. Ее можно каждый раз выбирать по необходимости. Чтобы сохранить все в полиномиальном виде, мы сузим

область изменения весов до целых чисел. Мы будем следовать более общему (но менее полиномиальному) решению: брать веса из аддитивной абелевой подгруппы W в B , снабженной спариванием $M \times W \rightarrow M : (t, T) \mapsto t^T$ линейным по каждой переменной. Для условий допустимости нужно предполагать, что, во-первых, W содержит единицу $1 \in B$ и, во-вторых, что $t^1 = t$ для $t \in M$.

Функторы, полученные таким путем из \mathcal{RT}^1 , кратко описаны в следующих трех пунктах.

2.8. Категории крашенных оснащенных графов. 1-Палитрой будем называть четверку P , состоящую из коммутативного ассоциативного кольца B с единицей, подгруппы M мультипликативной группы кольца B , подгруппы W аддитивной группы B^+ кольца B и (билинейного) спаривания $M \times W \rightarrow M : (m, w) \mapsto m^w$. Мы предполагаем, что W содержит единицу $1 \in B$ и что спаривание переводит $(m, 1)$ в m , т.е. $m^1 = m$ для всех $m \in M$.

В этом пункте мы определим для каждой 1-палитры P категорию \mathcal{G}_P^1 . Ее объектами являются конечные последовательности троек, каждая из которых состоит из $t \in M$, такого что $t^4 \neq 1$, $T \in W$, и знака. Первый и второй элементы тройки называются так же, как и в случае \mathcal{G}_h^1 : **кратностью** и **весом**. Тройки, образующие объект, помещаются в соответствующие точки прямой \mathbb{R}^1 (ср. п. 2.1).

Морфизм \mathcal{G}_P^1

$$\{(t_1, T_1, \epsilon_1), \dots, (t_k, T_k, \epsilon_k)\} \rightarrow \{(u_1, U_1, \delta_1), \dots, (u_l, U_l, \delta_l)\}$$

представляет собой такой оснащенный трехвалентный граф Γ , вложенный в $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, что $\partial\Gamma = \Pi_k \times 0 \cup \Pi_l \times 1 = \partial(\mathbb{R}^2 \times [0, 1]) \cap \Gamma$ с дополнительной структурой, описанной ниже. Он рассматривается с точностью до объемлемой изотопии неподвижной на $\partial\Gamma$. Его оснащение в концевых точках параллельно оси x .

Все эти дополнительные структуры на графе Γ вместе называют его \mathcal{G}_P^1 -**раскраской**. Каждая одномерная страта окрашена ориентацией и парой, состоящей из элемента $\{t \in M \mid t^4 \neq 1\}$ и элемента W . Первый называется **кратностью**, второй — **весом**. Ориентации ребер, смежных граничным точкам, определяются знаками и цветами точек как и в \mathcal{G}_h^1 : ребро, примыкающее к точке с $+$ ориентируется в этой точке вверх (вдоль стандартного направления оси z), в противном случае оно ориентировано вниз. Кратность и вес ребра, примыкающего к концевой точке, совпадают с соответствующими ингредиентами для цвета этой точки. В каждой из трехвалентных вершин цвета смежных ребер удовлетворяют следующим условиям.

2.8.А. Условия допустимости. Пусть (t_1, T_1) , (t_2, T_2) , (t_3, T_3) — компоненты кратности и веса цветов трех ребер, ростки которых примыкают к одной и той же вершине, и пусть $\epsilon_i = -1$, если i -е ребро ориентировано в сторону вершины и $\epsilon_i = 1$ в противном случае. Тогда

$$\prod_{i=1}^3 t_i^{\epsilon_i} = 1, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i T_i = - \prod_{i=1}^3 \epsilon_i. \quad (4)$$

В каждой сильной вершине граф Γ ориентирован. Ориентация графа Γ в сильных вершинах рассматривается как часть \mathcal{G}_P^1 -раскраски графа Γ вместе с ориентациями, кратностями и весами одномерных страт.

Уравнение (3) означает, что $\sum t_i e_i$, где сумма берется по всем ребрам e_i графа с их ориентациями и t_i — первая компонента цвета ребра e_i , является одномерным циклом графа Γ по модулю $\partial\Gamma$ с вещественными коэффициентами, так что он определяет элемент группы $H_1(\Gamma, \partial\Gamma; P)$. Этот элемент называется *гомологическим классом кратности раскраски*.

2.9. Функторы. Пусть $P = (B, M, W, M \times W \rightarrow M)$ есть 1-палитра (см. предыдущий пункт). Пусть \mathcal{M}_B — категория конечно-порожденных свободных B -модулей. Нашей целью является построение функтора $\mathcal{A}^1 : \mathcal{G}_P^1 \rightarrow \mathcal{M}_B$, который будет называться *функтором Александера*.

Пусть Λ обозначает B -модуль $B \oplus B$. Пусть e_0 и e_1 — элементы естественного базиса Λ . Для произвольного объекта $\{(t_1, T_1, \epsilon_1), \dots, (t_k, T_k, \epsilon_k)\}$ в \mathcal{G}_P^1 его образ под действием \mathcal{A}^1 определяется как тензорное произведение

$$\Lambda \otimes_B \cdots \otimes_B \Lambda,$$

в котором k множителей, каждый из которых равен Λ . Это свободный B -модуль ранга 2^k . Он имеет канонический базис, состоящий из $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$. Таким образом, базисные элементы можно отождествить с последовательностями нулей и единиц, помещенных в точки Π_k .

Порождающими морфизмами \mathcal{G}_P^1 являются раскрашенные образующие категории \mathcal{G} , как и в \mathcal{G}_h^1 . Поэтому на морфизмах функтор \mathcal{A}^1 можно описать предъявлением весов Больцмана, как это было сделано для \mathcal{RT}^1 в табл. 1 и 2. Веса Больцмана для \mathcal{A}^1 даны в табл. 3 и 4. В этих таблицах (как и в 1 и 2) нить с e_0 изображена пунктирной дугой, а нить с e_1 — сплошной дугой. Элементы табл. 3 и 4 получены из соответствующих элементов табл. 1 и 2: если ребро, окрашенное в табл. п. 2.5 посредством (j, J) имеет аналог в соответствующей таблице этого пункта, окрашенную посредством (t, T) , то q^j заменяется на t и J на T , как было обещано в п. 2.7. Поэтому

изотопическая инвариантность статсуммы, основанной на весах Больцмана из табл. 1 и 2, влечет изотопическую инвариантность статсуммы, основанной на табл. 3 и 4.

Если $B = \mathbb{Z}[M]$ и $W = \mathbb{Z}$, то морфизм, полученный с помощью \mathcal{A}^1 из крашеного оснащенного графа, представляется матрицей, элементы которой являются многочленами Лорана по кратностям, приписанным нитям графа. Так что он больше похож на многочлен Александра, чем морфизмы, получаемые с помощью \mathcal{RT}^1 . Он даже слишком хорош, так как нам нельзя делить на многочлены, что крайне желательно (ср. (14)). Поэтому нас больше интересует случай, когда M не имеет кручения и B является полем частных $Q(M)$ кольца $\mathbb{Z}[M]$.

2.10. Всё еще представления алгебры Хопфа. В определении функтора \mathcal{RT}^1 , данном в п. 2.3, 2.5, действие $U_qgl(1|1)$ полностью скрыто весами Больцмана и, с первого взгляда, не нужно. Однако если мы забудем его полностью, то рассуждения, основанные на неприводимости представлений, вроде тех, которые используются при доказательстве утверждений 5.1.A, 5.1.B и 5.1.C, станут невозможны.

Область прибытия \mathcal{A}^1 еще не снабжена структурой, которая была бы аналогом структуры модуля над $U_qgl(1|1)$. В действительности это и невозможно. Однако $U_qgl(1|1)$ содержит такую подалгебру Хопфа U^1 (см. п. 11.7), что \mathcal{A}^1 можно достроить до функтора в категорию модулей над этой подалгеброй.

Теперь мы можем переопределить функтор Александра $\mathcal{A}^1 : \mathcal{G}_P^1 \rightarrow \mathcal{M}_B$, введенный в §2.9, как функтор из той же категории \mathcal{G}_P^1 , но принимающий значения в категории конечномерных модулей над $U^1 \otimes_{\mathbb{Z}} B$, который сопоставляет объекту $\{(t_1, T_1, \epsilon_1), \dots, (t_k, T_k, \epsilon_k)\}$ категории \mathcal{G}_P^1 тензорное произведение

$$U(t_1, T_1)_{\epsilon_1} \otimes_B \cdots \otimes_B U(t_k, T_k)_{\epsilon_k}$$

см. п. 11.8 На морфизмах этот функтор определяется теми же весами Больцмана, что и раньше.

§3. Функтор Решетихина–Тураева, основанный на $sl(2)$

В этом параграфе мы построим функтор \mathcal{RT}^2 , аналогичный функтору \mathcal{RT}^1 , построенному в §2. Это модификация специального случая функтора, введенного Дегучи и Акутсу в §5 статьи [4]. Функтор, построенный в [4], зависит от натурального числа N . Наша модификация относится к случаю $N = 2$.

ТАБЛИЦА 3

	1	$-t^2$	t^{-2}	1
	1	$-t^{-2}$	t^2	1
	t^{-T}	t^{-T}	t^{-T}	t^{-T}
	t^T	t^T	t^T	t^T
	$t^{1-U} u^{1-T}$	$t^{1-U} u^{1-T}$	$t^{1-U} u^{1-T}$	$t^{1-U} u^{1-T}$
	$t^{-1-U} u^{1-T}$	$t^{-1-U} u^{1-T}$	$t^{1-U} u^{-1-T}$	$t^{1-U} u^{-1-T}$
	$t^{1-U} u^{-1-T}$	$t^{1-U} u^{-1-T}$	$t^{-1-U} u^{1-T}$	$t^{-1-U} u^{1-T}$
	$-t^{-1-U} u^{-1-T}$	$-t^{-1-U} u^{-1-T}$	$-t^{-1-U} u^{-1-T}$	$-t^{-1-U} u^{-1-T}$
	0	$\frac{1-t^{-4}}{t^{-1+U} u^{-1+T}}$	0	0
	$\frac{t^4-1}{t^{1+U} u^{1+T}}$	0	0	0
	0	0	$\frac{1-u^{-4}}{t^{1+U} u^{-1+T}}$	0
	0	0	0	$\frac{1-u^4}{t^{-1+U} u^{1+T}}$
	$t^{-1+U} u^{-1+T}$	$t^{-1+U} u^{-1+T}$	$t^{-1+U} u^{-1+T}$	$t^{-1+U} u^{-1+T}$
	$t^{1+U} u^{-1+T}$	$t^{1+U} u^{-1+T}$	$t^{-1+U} u^{1+T}$	$t^{-1+U} u^{1+T}$
	$t^{-1+U} u^{1+T}$	$t^{-1+U} u^{1+T}$	$t^{1+U} u^{-1+T}$	$t^{1+U} u^{-1+T}$
	$-t^{1+U} u^{1+T}$	$-t^{1+U} u^{1+T}$	$-t^{1+U} u^{1+T}$	$-t^{1+U} u^{1+T}$
	$\frac{1-u^4}{t^{1-U} u^{1-T}}$	0	0	0
	0	$\frac{u^{-4}-1}{t^{-1-U} u^{-1-T}}$	0	0
	0	0	0	$\frac{1-t^{-4}}{t^{-1-U} u^{1-T}}$
	0	0	$\frac{1-t^4}{t^{1-U} u^{-1-T}}$	0

ТАБЛИЦА 4

	$(u, U) \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ (t, T) \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ (v, V) \end{array}$	$(u, U) \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ (t, T) \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ (v, V) \end{array}$	$(u, U) \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ (t, T) \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ (v, V) \end{array}$	$(u, U) \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ (t, T) \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ (v, V) \end{array}$
	0	1	$-u^2$	1
	0	-1	u^2	-1
	0	$t^2 - t^{-2}$	$v^2 - v^{-2}$	$(u^{-2} - u^2)v^2$
	0	$t^{-2} - t^2$	$v^{-2} - v^2$	$(u^2 - u^{-2})v^2$
	$t^2 - t^{-2}$	0	$(u^2 - u^{-2})v^{-2}$	$v^2 - v^{-2}$
	1	$-u^2$	1	0
	$v^2 - v^{-2}$	$(u^{-2} - u^2)v^2$	0	$t^2 - t^{-2}$
	u^{-2}	1	0	1
	$(u^2 - u^{-2})v^{-2}$	$v^2 - v^{-2}$	$t^2 - t^{-2}$	0
	1	0	1	u^{-2}

	$(u, U) \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ (t, T) \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ (v, V) \end{array}$	$(u, U) \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ (t, T) \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ (v, V) \end{array}$	$(u, U) \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ (t, T) \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ (v, V) \end{array}$	$(u, U) \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ (t, T) \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ (v, V) \end{array}$
	0	$t^2 - t^{-2}$	$v^2 - v^{-2}$	$(u^{-2} - u^2)v^{-2}$
	0	$t^{-2} - t^2$	$v^{-2} - v^2$	$(u^2 - u^{-2})v^{-2}$
	0	1	$-u^{-2}$	1
	0	-1	u^{-2}	-1
	1	0	1	u^2
	$(u^2 - u^{-2})v^2$	$v^2 - v^{-2}$	$t^2 - t^{-2}$	0
	u^2	1	0	1
	$v^2 - v^{-2}$	$(u^{-2} - u^2)v^{-2}$	0	$t^2 - t^{-2}$
	1	$-u^{-2}$	1	0
	$t^2 - t^{-2}$	0	$(u^2 - u^{-2})v^2$	$v^2 - v^{-2}$

Выбор масштабирования в морфизмах Клебша–Гордана, использованный Дегучи и Акутсу [4], основан на соотношениях ортогональности. Его недостатком является то, что в каждой вершине одно из смежных ребер выделено и должно быть направлено вверх.

Здесь я использую другое масштабирование. Оно не удовлетворяет соотношениям ортогональности, но устраняет неравноправность ребер в каждой трехвалентной вершине. Это, вместе с другим выбором базисных векторов в представлениях, делает формулы намного проще, чем в [4].

3.1. Категория крашенных оснащенных графов. Категория, на которой задан функтор \mathcal{RT}^2 обозначается \mathcal{G}^2 и определяется следующим образом.

Объект категории \mathcal{G}^2 — это класс конечных последовательностей пар. Каждая пара состоит из комплексного числа и знака. Комплексным числам не разрешается быть нечетными целыми. В паре можно умножать комплексное число на -1 и одновременно менять знаковую компоненту. Объект категории \mathcal{G}^2 состоит из всех последовательностей, которые можно получить друг из друга последовательностью операций этого типа.

Морфизм категории \mathcal{G}^2

$$\{(A_1, \epsilon_1), \dots, (A_k, \epsilon_k)\} \rightarrow \{(B_1, \delta_1), \dots, (B_l, \delta_l)\}$$

является морфизмом $\Gamma : k \rightarrow l$ категории \mathcal{G} (см. п. 1.7), снабженным дополнительной структурой, описанной ниже.

Каждая одномерная страта окрашена ориентацией и комплексным числом. Последнее называется *весом*. Ему запрещается быть нечетным целым. Ориентацию одномерной страты можно изменить вместе с одновременным умножением веса на -1 . Другими словами, это элемент C группы $H_1(\Gamma, \{\text{vertices}\}; \mathbb{C})$, т.е. одномерная цепь графа Γ с комплексными коэффициентами. Эта цепь должна удовлетворять следующему условию.

3.1.A. Условие допустимости. *Граница ∂C цепи C должна включать в себя каждую вершину валентности три графа Γ с коэффициентом ± 1 , граничную вершину $(i, 0)$, $i = 1, \dots, k$ с коэффициентом $-\epsilon_i A_i$ и граничную вершину $(i, 1)$, $i = 1, \dots, l$ с коэффициентом $\delta_i B_i$ соответственно.*

К свойствам весовой цепи C следует добавить, что каждая одномерная страта входит в C с коэффициентом, который не может быть нечетным целым.

Внутренняя вершина называется *источником*, если она входит в ∂C с коэффициентом -1 , и *сток* — в противном случае. На рисунках сток изображен маленьким светлым кружком.

3.2. Построение функтора Решетихина–Тураева. Наша цель — построить функтор \mathcal{RT}^2 из \mathcal{G}^2 в категорию конечномерных представлений алгебры Хопфа $U_{\sqrt{-1}}sl(2)$. Сводку результатов об этой квантовой алгебре и ее представлениях, используемых ниже, можно найти в приложении 2. Образ объекта $\{(A_1, \epsilon_1), \dots, (A_k, \epsilon_k)\}$ категории \mathcal{G}^2 определяется как тензорное произведение $I(\epsilon_1 A_1) \otimes \dots \otimes I(\epsilon_k A_k)$ (см. п. 12.4).

Каждый из сомножителей $I(\epsilon A)$ является двумерным векторным пространством с каноническим базисом e_0, e_1 . Таким образом, $I(\epsilon_1 A_1) \otimes \dots \otimes I(\epsilon_k A_k)$ имеет канонический базис, состоящий из $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$. Базисные векторы $I(\epsilon_1 A_1) \otimes \dots \otimes I(\epsilon_k A_k)$ можно отождествить с последовательностями нулей и единиц. Эти нули и единицы связаны с ориентациями соответствующих точек.













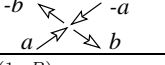
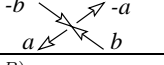




Для представления образов морфизмов с помощью весов Больцмана нужно рассмотреть диаграммы графов, представляющих морфизмы в \mathcal{G}^2 , и раскраски их одномерных страт базисными векторами представлений, связанных с цветами одномерных страт. Удобно отождествлять эти цвета с ориентациями одномерных страт: если одномерная страта ориентирована вверх, то она окрашивается с помощью e_0 , в противном случае — с помощью e_1 . Те же ориентации можно использовать для представления \mathcal{G}^2 -раскраски, т.е. раскраски парами (ориентация, вес). Напомню, что ориентацию в этой паре можно обратить, если одновременно умножить вес на -1 . Поэтому для того, чтобы задать \mathcal{G}^2 -цвет, можно использовать любую ориентацию, и естественно использовать ту же ориентацию для обеих целей: для описания представления, связанного с нитью, и базисного вектора, выбранного в этом представлении. Вес показан на нити. Та же картина может быть использована и для \mathcal{G}^2 -крашеного графа. Для того чтобы подчеркнуть двойное использование ориентаций, мы используем светлые наконечники стрелок.

Таким образом, ребро со смотрящей вверх светлой стрелкой и числом $A \in \mathbb{C}$ и ребро с направленной вниз светлой стрелкой и числом $-A$ означают нить, окрашенную тем же первичным цветом (ориентация вверх, A), который ассоциирован с тем же представлением $I(A)$. Вторичные цвета — это векторы e_0 и e_1 соответственно в первом и втором случае. То же ребро с теми же ориентациями и кратностями, но изображенное темными стрелками, окрашено тем же первичным цветом (связанным с $I(A)$), но без вторичного цвета, т.е., без выделенного базисного вектора из $I(A)$.

Образ морфизма определяется с помощью весов Больцмана, показанных в табл. 5 и 6. В этих таблицах и далее i означает $\sqrt{-1}$, в то время как i^x означает $\exp(\frac{x\pi i}{2})$. Веса Больцмана находятся на основании теоремы Решетихина–Тураева [16] аналогично весам Больцмана из табл. 1 и 2.

Относящуюся к этому информацию об алгебре Хопфа $U_i sl(2)$ и ее представлениях можно найти в приложении 2. Непосредственно проверяется, что веса Больцмана из табл. 5 и 6 определяют функтор из \mathcal{G}^2 в категорию модулей над $U_i sl(2)$.

ТАБЛИЦА 5

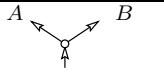
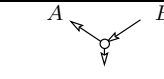
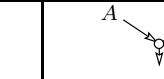
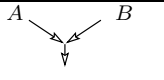
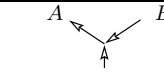
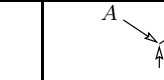
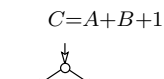
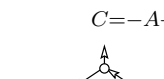

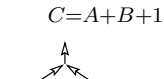
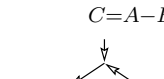

			
1	i^{-A-1}	1	i^{A+1}
			
$i^{\frac{(1+A)(1+B)}{2}}$	$i^{\frac{(1+A)(1+B)}{2}}$	$i^{\frac{(1+A)(1+B)}{2}}$	$i^{\frac{(1+A)(1+B)}{2}}$
			
$i^{\frac{-(1+A)(1+B)}{2}}$	$i^{\frac{-(1+A)(1+B)}{2}}$	$i^{\frac{-(1+A)(1+B)}{2}}$	$i^{\frac{-(1+A)(1+B)}{2}}$
			
$i^{\frac{-(1-A)(1-B)}{2}} (i^{1+A} + i^{1-A})$		$i^{\frac{(1+A)(1+B)}{2}} (i^{-1+B} + i^{-1-B})$	
			
$i^{\frac{A^2-1}{4}}$	$i^{\frac{A^2-1}{4}}$	$i^{\frac{1-A^2}{4}}$	$i^{\frac{1-A^2}{4}}$

3.3. Гомологический смысл раскрасок. Представление вторичной раскраски трехвалентного графа ориентациями одномерных страт доставляет гомологическую интерпретацию вторичной раскраски как целочисленной одномерной цепи, в которую всякая одномерная страта входит с коэффициентом 1, если она берется с ориентацией, отмеченной светлой стрелкой. Обозначим эту цепь через Z .

Простой анализ табл. 6 показывает, что Z обладает любопытным свойством: она дополняет весовую цепь C соответствующей первичной раскраски до цикла по модулю границы графа. Другими словами, $\partial(C + Z)$ не содержит внутренних вершин.

Это наводит на мысль связать с вторичным цветом (т.е. с базисным вектором $I(A)$) коэффициент, с которым он входит в $C + Z$. Для базисного вектора e_i представления $I(A)$, комплексное число $a = (-1)^i A + 1$ называется *зарядом*. Вторичная \mathcal{G}^2 -раскраска трехвалентного графа Γ может быть

ТАБЛИЦА 6

Вершина сток	 $C=A+B+1$	 $C=-A+B-1$	 $C=A-B-1$
	$i^{1+C} + i^{1-C}$	$i^{1+B} + i^{1-B}$	$i^{A-B} + i^{-A-B}$
Вершина источник	 $C=A+B+1$	 $C=A-B-1$	 $C=-A+B-1$
	1	1	i^{-1-A}
Вершина сток	 $C=A+B+1$	 $C=-A+B-1$	 $C=A-B-1$
	$i^{1+C} + i^{1-C}$	$i^{1+B} + i^{1-B}$	$-i^{B+A} - i^{B-A}$
Вершина источник	 $C=A+B+1$	 $C=A-B-1$	 $C=-A+B-1$
	1	1	i^{1+A}

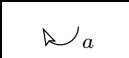

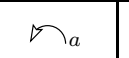
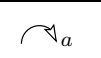
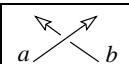
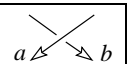
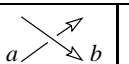
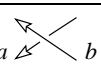
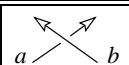
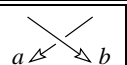
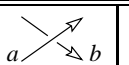
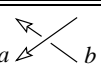



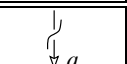
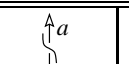
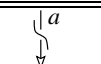
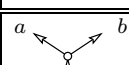
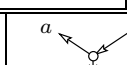
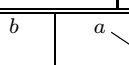
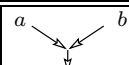
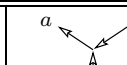
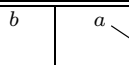
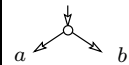
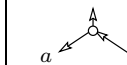
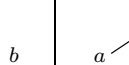
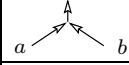
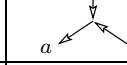
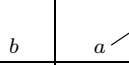
представлена одномерной цепью $c = C + Z$ с комплексными коэффициентами на Γ : каждая одномерная страта в Γ снабжена ориентацией, ассоциированной с вторичной цветом и зарядом. Значит, вторичная раскраска определяет элемент в $H_1(\Gamma, \partial\Gamma; \mathbb{C})$. Однако она не определяется этим классом гомологий: к нему нужно добавить ориентации одномерных страт. Эти ориентации зашиты в Z .

Замена весов зарядами упрощает табл. 5 и 6. См. табл. 7. Различие между вершинами стоками и источниками почти исчезает. Большинство формул, выражающих веса Больцмана, становится проще. Это можно объяснить алгебраической природой заряда: он является собственным значением оператора, отвечающего $K \in U_{\sqrt{-1}}sl(2)$.

Гомологический класс вторичной раскраски по модулю 2 зависит только от первичной раскраски. Он принадлежит $H_1(\Gamma; \mathbb{C}/2\mathbb{Z})$ и может быть описан непосредственно в терминах первичной раскраски прибавлением 1 к каждому весу и редукцией по модулю 2.

Может случиться, что диаграмма трехвалентного графа с первичной \mathcal{G}^2 -раскраской не допускает никакой вторичной раскраски. На рис. 5 такой замкнутый трехвалентный граф с первичной \mathcal{G}^2 -раскраской изображен слева. Это свойство зависит от вложения графа. Справа на рис. 5 тот же граф,

ТАБЛИЦА 7

			
1	i^{-a}	1	i^a
			
$i^{\frac{ab}{2}}$	$i^{\frac{ab}{2}}$	$i^{\frac{ab}{2}}$	$i^{\frac{ab}{2}}$
			
$i^{\frac{-ab}{2}}$	$i^{\frac{-ab}{2}}$	$i^{\frac{-ab}{2}}$	$i^{\frac{-ab}{2}}$
			
$i^{\frac{-ab}{2}}(i^a - i^{-a})$		$i^{\frac{ab}{2}}(i^{-b} - i^b)$	
			
$i^{\frac{a(a-2)}{4}}$	$i^{\frac{a(a-2)}{4}}$	$i^{\frac{a(2-a)}{4}}$	$i^{\frac{a(2-a)}{4}}$
			
$c=a+b$	$c=-a+b$	$c=a-b$	
$i^c - i^{-c}$	$i^b - i^{-b}$	$i^{-b}(i^a - i^{-a})$	
			
$c=a+b$	$c=a-b$	$c=-a+b$	
1	1	i^{-a}	
$c=a+b$	$c=-a+b$	$c=a-b$	
			
$i^c - i^{-c}$	$i^b - i^{-b}$	$i^b(i^a - i^{-a})$	
$c=a+b$	$c=a-b$	$c=-a+b$	
			
1	1	i^a	

но вложенный иначе, показан со вторичной раскраской (чтобы подчеркнуть отношение к первичной раскраске, вторичная раскраска показана не зарядами, а весами).

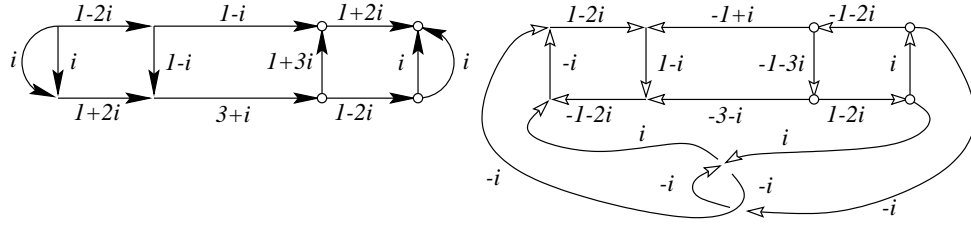


Рис. 5

Конечно, отсутствие вторичных раскрасок влечет то, что \mathcal{RT}^2 отображает окрашенный (первичным цветом) оснащенный граф в нулевой морфизм.

3.4. Алгебраизация. В этом пункте мы делаем с \mathcal{RT}^2 то, что делалось с \mathcal{RT}^1 в 2.7–2.10: мы исключаем формальные степенные ряды. Как и в случае \mathcal{RT}^1 , наиболее очевидное препятствие для этого — присутствие произведений в показателях степеней. В случае \mathcal{RT}^1 все произведения в показателях степеней являются произведениями кратности и веса. На языке формул: веса Больцмана содержат члены вида q^{jI} , где j — компонента кратности цвета и I — весовая компонента, возможно, другого цвета.

В табл. 5 квадратичная часть степеней образована из значений одного параметра — веса, которые представляют собой комплексные числа, отличные от нечетных целых. Таким образом, решение, использованное в случае \mathcal{RT}^1 , нельзя применить здесь буквально. Чтобы записать веса Больцмана в табл. 5 и 6 в формальном алгебраическом виде без экспоненты, можно следовать указанному ниже подходу.

Комплексные параметры заменяются параметрами, взятыми из коммутативного кольца W , а веса Больцмана берутся из большего кольца B . Кроме включения, W и B связаны групповым гомоморфизмом аддитивной группы W^+ кольца W в мультипликативную группу B^\times кольца B .

В исходной конструкции функтора \mathcal{RT}^2 как W , так и B есть \mathbb{C} , и гомоморфизм $W^+ \rightarrow B^\times$ определяется формулой $A \rightarrow i^A$.

В нашем обобщении мы используем то же экспоненциальное обозначение для гомоморфизма $W^+ \rightarrow B^\times$. Это оправдывается тем, что $4 \in W$ должно отображаться этим гомоморфизмом в $1 \in B$, т.е. $i^4 = 1$. Из этого условия вытекает, что B содержит корень степени 4 из единицы: таковым является i^1 ; действительно, $(i^1)^4 = i^{(4 \cdot 1)} = i^4 = 1$. Этот элемент кольца B обозначается через i .

Назовем **2-палитрой** тройку P , состоящую из W , B и отображения $W^+ \rightarrow B^\times : A \rightarrow i^A$ таких, как выше:

- B — коммутативное кольцо с единицей;
- W — его подкольцо, содержащее единицу;
- $W^+ \rightarrow B^\times : A \rightarrow i^A$ — гомоморфизм с $i^4 = 1$.

Категория \mathcal{G}_P^2 крашенных оснащенных графов, заменяющая \mathcal{G}^2 , выглядит следующим образом. Ее объектами являются классы конечных последовательностей пар. Каждая пара состоит из элемента кольца W и знака. Первый называется **весом** цвета. Ему запрещено принадлежать множеству $\{x \in W \mid i^{2x+2} = 1\}$. В паре вес можно умножить на -1 с одновременным изменением знака. Объект — это класс всех последовательностей, которые можно получить друг из друга такого типа операциями, примененными к парам, образующим последовательность.

Морфизм категории \mathcal{G}_P^2

$$\{(A_1, \epsilon_1), \dots, (A_k, \epsilon_k)\} \rightarrow \{(B_1, \delta_1), \dots, (B_l, \delta_l)\}$$

— это морфизм $\Gamma : k \rightarrow l$ категории \mathcal{G} , снабженный дополнительной структурой, называемой \mathcal{G}_P^2 -**раскраской**.

Каждая одномерная страта окрашена ориентацией и элементом из W , называемым **весом** цвета. Он не может принадлежать $\{x \in W \mid i^{2x+2} = 1\}$. Ориентация одномерной страты может быть изменена с одновременным умножением веса на -1 . Другими словами, это элемент C группы $H_1(\Gamma, \{\text{вершины}\}; W)$, т.е. одномерная цепь из Γ с коэффициентами в W . Эта цепь должна удовлетворять следующему условию.

3.4.A. Условие допустимости. *Граница ∂C должна включать в себя каждую внутреннюю (т.е. трехвалентную) вершину графа Γ с коэффициентом ± 1 , граничную вершину $(i, 0)$, $i = 1, \dots, k$ с коэффициентом $-\epsilon_i A_i$ и граничную вершину $(i, 1)$, $i = 1, \dots, l$ с коэффициентом $\delta_i B_i$ соответственно.*

Обобщение \mathcal{A}^2 функтора \mathcal{RT}^2 действует из \mathcal{G}_P^2 в категорию конечно-порожденных свободных модулей над B . Классу последовательностей $\{(\pm A_1, \pm), \dots, (\pm A_k, \pm)\}$ он сопоставляет векторное пространство размерности 2^k , порожденное всеми представителями класса. Это тензорное произведение (над B) k экземпляров свободного B -модуля ранга 2.

Это не просто B -модуль. Он допускает естественное действие алгебры Хопфа U^2 , которое может быть определено в точности как для $U_i sl(2)$ (см. п. 12.3), но без соотношения $K = i^H$. А именно U^2 есть алгебра Хопфа,

порожденная H , K , X и Y , удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} [Y, X] &= K - K^{-1}, \\ [H, X] &= -2X, \quad [H, Y] = 2Y, \\ KX &= -XK, \quad KY = -YK. \end{aligned} \quad (5)$$

с копроизведением, определенным следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, \\ \Delta(K) &= K \otimes K, \\ \Delta : U^2 \rightarrow U^2 \otimes U^2 : \quad \Delta(K^{-1}) &= K^{-1} \otimes K^{-1}, \\ \Delta(X) &= X \otimes K^{-1} + 1 \otimes X, \\ \Delta(Y) &= Y \otimes 1 + K \otimes Y \end{aligned} \quad (6)$$

коединицей

$$\epsilon : U^2 \rightarrow \mathbb{C}[[\hbar]] : \quad \begin{aligned} \epsilon(K) &= \epsilon(K^{-1}) = 1, \\ \epsilon(H) &= \epsilon(X) = \epsilon(Y) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и антиподом

$$\begin{aligned} s(H) &= -H, \\ s(K) &= K^{-1}, \\ s : U^2 \rightarrow U^2 : \quad s(K^{-1}) &= K, \\ s(X) &= -XK (= KX), \\ s(Y) &= -K^{-1}Y (= YK^{-1}). \end{aligned} \quad (8)$$

В случае свободного B -модуля ранга 2, соответствующего $\{(\pm A, \pm)\}$, образующие H , K , X и Y действуют по формулам

$$\begin{aligned} X : \quad (A, +) &\mapsto (i^{A+1} + i^{-A+1})(-A, -), \quad (-A, -) \mapsto 0, \\ Y : \quad (A, +) &\mapsto 0, \quad (-A, -) \mapsto (A, +) \\ K : \quad (A, +) &\mapsto i^{A+1}(A, +), \quad (-A, -) \mapsto i^{A-1}(-A, -), \\ H : \quad (A, +) &\mapsto (A+1)(A, +), \quad (-A, -) \mapsto (A-1)(-A, -). \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим этот $U^2 \otimes_{\mathbb{Z}} B$ -модуль через $I_B(A)$.

В случае более длинной последовательности $\{(A_1, \epsilon_1), \dots, (A_k, \epsilon_k)\}$ соответствующий B -модуль рассматривается как тензорное произведение последовательности $U^2 \otimes_{\mathbb{Z}} B$ -модулей ранга 2, соответствующих элементам последовательности, и действие определяется с помощью копроизведения в U^2 .

Морфизм Γ отображается в морфизм соответствующих модулей, определенный матрицей, элементы которой строятся следующим образом. Элемент

матрицы соответствует выбору знаков в граничных точках Γ . Рассмотрим все продолжения этих знаков до ориентаций одномерных страт диаграммы Γ . Как и в случае \mathcal{RT}^2 , эти продолжения называются вторичными раскрасками. В диаграмме ориентации, образующие вторичную раскраску, показаны светлыми стрелками, как и в случае \mathcal{RT}^2 . Для каждого из продолжений образуем произведение весов Больцмана в вершинах и экстремальных точках функции высоты в диаграмме в соответствии с табл. 5 и 6 и просуммируем такие произведения по всем расширениям. Если локальная картина в вершине диаграммы не встречается в таблицах, то припишем такой вершине 0, т.е. пренебрежем таким продолжением.

Конечно, \mathcal{RT}^2 является частным случаем \mathcal{A}^2 с $W = B = \mathbb{C}$.

§4. Соотношения между функторами Решетихина–Тураева

Хотя на первый взгляд \mathcal{G}_h^1 и \mathcal{G}^2 кажутся совершенно разными, более тщательный анализ выявляет глубокие аналогии и соотношения между ними.

4.1. Что перекрашивать. Существуют подкатегория $S\mathcal{G}^1$ категории $\mathcal{G}_{\pi i/2}^1$ и естественное преобразование функтора $\mathcal{RT}^1|_{S\mathcal{G}^1}$ в \mathcal{RT}^2 .

Объект $\{(j_1, J_1, \epsilon_1), \dots, (j_k, J_k, \epsilon_k)\}$ в $\mathcal{G}_{\pi i/2}^1$ принадлежит $S\mathcal{G}^1$, если $j_r + J_r = 1$ для $r = 1, \dots, k$. Морфизм Γ в $\mathcal{G}_{\pi i/2}^1$ принадлежит $S\mathcal{G}^1$, если для каждой одномерной страты в Γ сумма ее кратности и веса равна 1.

Этот выбор мотивируется следующим образом. Мы хотим иметь соответствие между \mathcal{G}^1 - и \mathcal{G}^2 -раскрасками, которое сохраняло бы веса Больцмана. Сравнение трех первых строк табл. 1 и 5 наводит на мысль положить $q = i$ и $-2j = -A - 1$, т.е. $j = \frac{A+1}{2}$. Веса Больцмана в полуоборотах дают $-jJ = \frac{A^2-1}{4}$, что вместе с $j = \frac{A+1}{2}$ влечет $J = \frac{1-A}{2}$ и $j + J = 1$. Конечно, это не претендует на доказательство, но является сильным доводом в пользу сделанного выбора.

4.2. Перекрашивание. Определим функтор $\Phi : S\mathcal{G}^1 \rightarrow \mathcal{G}^2$. Объект

$$\{(j_1, J_1, \epsilon_1), \dots, (j_k, J_k, \epsilon_k)\}$$

из $S\mathcal{G}^1$ переводится функтором Φ в $\{(2j_1 - 1, \epsilon_1), \dots, (2j_k - 1, \epsilon_k)\}$. Морфизму Γ из $S\mathcal{G}^1$ относится изотопический класс тех же ориентированных оснащенных графов с весами на одномерных стратах, полученных из их исходных кратностей по той же формуле: если кратность (в \mathcal{G}^1 -раскраске) равна j , то вес (в \mathcal{G}^2 -раскраске) равен $2j - 1$.

4.2.А. Согласованность в условиях допустимости. *Перекрашивание преобразует каждый морфизм категории SG^1 в морфизм категории G^2 . Другими словами, Φ превращает раскраску трехвалентного графа, удовлетворяющего условиям допустимости 2.2.А и условию, определяющему SG^1 (сумма кратности и веса для каждой одномерной страты равна 1), в раскраску, удовлетворяющую условию допустимости 3.1.А.*

4.2.В. Лемма. *Никакой морфизм категории SG^1 не имеет сильных вершин.*

Доказательство. Напомним, что вершина называется сильной, если примыкающие к ней ребра ориентированы либо все в нее, либо все в противоположном направлении. В обозначениях условий допустимости 2.2.А это означает, что $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$. В силу условий допустимости (1) и (2) в сильной вершине мы имеем $j_1 + j_2 + j_3 = 0$ и $J_1 + J_2 + J_3 = 1$. Откуда $j_1 + j_2 + j_3 + J_1 + J_2 + J_3 = 1$. С другой стороны, $j_r + J_r = 1$ в SG^1 , откуда $j_1 + j_2 + j_3 + J_1 + J_2 + J_3 = 3$. •

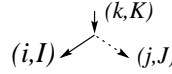
Доказательство 4.2.А. В силу леммы в каждой внутренней вершине по меньшей мере одно из примыкающих ребер направлено в сторону вершины и по меньшей мере одно — из нее. Поэтому $j_1 + j_2 - j_3 = 0$, где j_1, j_2 и j_3 — кратности ребер, примыкающих к некоторой вершине и занумерованных подходящим образом. Тогда $|(2j_1 - 1) + (2j_2 - 1) - (2j_3 - 1)| = 1$, и, следовательно, эта вершина входит с коэффициентом ± 1 в границу весовой цепи раскраски, доставляемой Φ . •

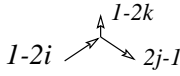
4.3. Инвариантность весов Больцмана при перекрашивании. Категории G_h^1, SG^1 и G^2 могут быть обогащены включением вторичных раскрасок в объекты и морфизмы. Обогащенные категории обозначаются через G_h^{1b}, SG^{1b} и G^{2b} соответственно.




4.3.А. Согласованность весов Больцмана. *Функтор Φ может быть расширен до функтора Φ^b из SG^{1b} в G^{2b} таким образом, чтобы вес Больцмана функтора \mathcal{RT}^1 был равен весу Больцмана функтора \mathcal{RT}^2 в той же точке после применения функтора Φ^b .*

Доказательство. Построение выглядит следующим образом: пунктирные дуги (т.е. дуги, окрашенные бозонами) получают светлые наконечники с той же ориентацией, а сплошные дуги (окрашенные фермионами) меняют ориентацию и G^2 -цвет. Например,


$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & (k, K) & \\
 & \downarrow & \\
 (i, I) & \leftarrow \text{---} & (j, J)
 \end{array}
 \end{array}
 \text{ преобразуется в }
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 1-2k & \\
 & \uparrow & \\
 1-2i & \leftarrow \text{---} & 2j-1
 \end{array}
 \end{array}
 .$$

Заметим, что \mathcal{RT}^1 -вес Больцмана в  есть $(q^{2i} - q^{-2i})q^{2j}$, а

\mathcal{RT}^2 -вес Больцмана в  равен $-i^{2j-1}(i^{1-2i} + i^{2i-1}) = i^{2j}(i^{2i} - i^{-2i})$. Таким образом, \mathcal{RT}^2 -вес Больцмана после преобразования будет совпадать с \mathcal{RT}^1 -весом Больцмана исходного графа. Это можно легко проверить для каждого из весов Больцмана табл. 1 и 2, за исключением весов в сильных вершинах, которые не появляются в SG^1 в силу леммы 4.2.A. Вот другой пример. Это один из наиболее сложных элементов табл. 1:

 превращается в . (Здесь мы представляем вторичную \mathcal{G}^{2b} -раскраску весами.) \mathcal{RT}^1 -вес Больцмана в  равен

$$q^{iJ+jI+i-j}(1 - q^{-4i}) = q^{i(1-j)+j(1-i)+i-j}(1 - q^{-4i}) = q^{-2ij}(q^{2i} - q^{-2i}),$$

в то время как \mathcal{RT}^2 -вес Больцмана в  равен

$$\begin{aligned} & i^{\frac{1}{2}(-1-2i)(1-2j)+(1-2i)+(1-2j)+1}(i^{1-2i} + i^{2i-1}) \\ &= i^{\frac{1}{2}(-4ij+2)}i(i^{-2i} - i^{2i}) = i^{-2ij}(i^{2i} - i^{-2i}). \end{aligned}$$

Другие элементы табл. 1 и 2 могут быть рассмотрены аналогично, но число необходимых проверок можно уменьшить, если принять во внимание поведение весов Больцмана при преобразованиях рис. 4. •

4.4. Фунториальная переформулировка. Обозначим через $\text{Vect}(\mathbb{C})$ категорию комплексных векторных пространств. Обозначим через $(\mathcal{RT}^1)^\sharp$ и $(\mathcal{RT}^2)^\sharp$ композиции функторов \mathcal{RT}^1 и \mathcal{RT}^2 соответственно с соответствующим забывающим функтором со значениями в $\text{Vect}(\mathbb{C})$.

4.4.A. Следствие теоремы 4.3.A. *Функтор Φ , отображающий подкатегорию SG^1 категории $\mathcal{G}_{\pi i/2}^1$ в \mathcal{G}^2 образует вместе с тождественным функтором категории $\text{Vect}(\mathbb{C})$ естественное преобразование из $(\mathcal{RT}^1)^\sharp|_{SG^1}$ в $(\mathcal{RT}^2)^\sharp$. Другими словами, диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} SG^1 & \xrightarrow{(\mathcal{RT}^1)^\sharp|_{SG^1}} & \text{Vect}(\mathbb{C}) \\ \downarrow \Phi & & \parallel \\ \mathcal{G}^2 & \xrightarrow{(\mathcal{RT}^2)^\sharp} & \text{Vect}(\mathbb{C}) \end{array}$$

коммутативна. В частности, для любого морфизма Γ категории SG^1

$$(\mathcal{RT}^2)^\sharp\Phi(\Gamma) = (\mathcal{RT}^1)^\sharp(\Gamma).$$

Возможно, что это проявление более глубокой связи между $Uigl(1|1)$ и $Uisl(2)$, и можно избавиться от забывающих функторов в $\text{Vect}(\mathbb{C})$ (см. [10]). Однако мы не пытаемся что-то сделать в этом направлении, поскольку это не обещает никаких немедленных топологических следствий.

4.5. Обобщение. В этом параграфе мы обобщаем результаты п. 4.1–4.4, заменяя функторы Решетихина–Тураева \mathcal{RT}^1 и \mathcal{RT}^2 их обобщениями \mathcal{A}^1 и \mathcal{A}^2 .

Пусть P есть 1-палитра (см. п. 2.8, где мы определили также \mathcal{G}_P^1 -крашенные графы). Напомним, что P состоит из коммутативного кольца B , подгруппы M мультипликативной группы кольца B , подгруппы W аддитивной группы B^+ кольца B и (билинейного) спаривания $M \times W \rightarrow M : (m, w) \mapsto m^w$. Мы предполагаем, что W содержит единицу 1 кольца B и что спаривание принимает значение m в $(m, 1)$.

Более того, пусть

- W — подкольцо B ;
- спаривание $M \times W \rightarrow M : (m, w) \mapsto m^w$ является действием мультипликативного моноида кольца W ;
- M содержит элемент i , такой что $i^4 = 1$, и $i^2 = -1 \neq 1$.

Второе предположение означает, что $(m^u)^v = m^{uv}$ для всех $u, v \in W$.

Обозначим через Q тройку, состоящую из колец B, W и отображения $W \rightarrow B : w \mapsto i^w$. Это отображение является гомоморфизмом аддитивной группы кольца W в мультипликативную группу кольца B , так как $M \times W \rightarrow M : (m, w) \mapsto m^w$ билинейно. Откуда получаем, что Q является 2-палитрой (см. п. 3.4) и можно рассмотреть категорию \mathcal{G}_Q^2 -крашенных графов, обозначаемую символом \mathcal{G}_Q^2 .

Эта построение тройки Q может быть обращено. Для произвольно заданной 2-палитры $Q = (B, W, W^+ \rightarrow B^\times : A \mapsto i^A)$ (т.е. Q состоит из унитарного коммутативного кольца B , его унитарного подкольца W и гомоморфизма $W^+ \rightarrow B^\times : A \mapsto i^A$, такого что $i^4 = 1$), можно построить четверку P , состоящую из

- того же кольца B ;
- образа M гомоморфизма $W^+ \rightarrow B^\times$, определенного формулой $A \mapsto i^A$;
- подкольца $W \subset B$;
- спаривания $M \times W \rightarrow M : (i^A, B) \mapsto i^{AB}$.

Ясно, что P является 1-палитрой и удовлетворяет всем условиям, наложенным на P в начале этого пункта. Более того, если применить к P описанную выше конструкцию, то в результате получится исходная 2-палитра Q .

Пусть P — такое же, как в начале п. 4.5. Определим подкатегорию $S_i\mathcal{G}_P^1$ категории \mathcal{G}_P^1 . Объект $\{(t_1, T_1, \epsilon_1), \dots, (t_k, T_k, \epsilon_k)\}$ принадлежит $S_i\mathcal{G}_P^1$, если $i^{1-T_r} = t_r$ для $r = 1, \dots, k$. Морфизм Γ категории \mathcal{G}_P^1 принадлежит $S_i\mathcal{G}_P^1$, если для каждой одномерной страты графа Γ ее кратность t и вес T связаны таким же образом: $i^{1-T} = t$.

Теперь определим функтор $\Phi_P : S_i\mathcal{G}_P^1 \rightarrow \mathcal{G}_Q^2$. Он переводит объект

$$\{(t_1, T_1, \epsilon_1), \dots, (t_k, T_k, \epsilon_k)\}$$

категории $S\mathcal{G}_P^1$ в $\{(1-2T_1, \epsilon_1), \dots, (1-2T_k, \epsilon_k)\}$. Морфизму Γ категории $S\mathcal{G}_P^1$ он сопоставляет изотопический класс тех же ориентированных оснащенных графов с зарядами на одномерных стратах, полученных из исходных весов по той же формуле: если исходный вес (в \mathcal{G}_P^1 -раскраске) есть T , то новый вес (в \mathcal{G}_Q^2 -раскраске) есть $1-2T$.

Функтор $\Phi_P : S_i\mathcal{G}_P^1 \rightarrow \mathcal{G}_Q^2$ обобщает очевидным образом функтор $\Phi : S\mathcal{G}^1 \rightarrow \mathcal{G}^2$, определенный в п. 4.2: если $B = \mathbb{C}$, $W = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{C} \setminus 0$, и $M \times W \rightarrow M$ определяется как $(m, w) \mapsto m^w$, то $S_i\mathcal{G}_P^1 = S\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}_Q^2 = \mathcal{G}^2$ и $\Phi_P = \Phi$.

4.5.A. Согласованность условий допустимости. *Функтор Φ_P преобразует раскраску трехвалентного графа, удовлетворяющего условиям допустимости 2.8.A и условиям, определяющим $S_i\mathcal{G}_P^1$, в раскраску, удовлетворяющую условию допустимости 3.4.A.*

4.5.B. Лемма. *Любой морфизм в $S\mathcal{G}_P^1$ не имеет сильных вершин.*

Доказательство. Напомним, что вершина называется сильной, если примыкающие к ней ребра ориентированы все в эту вершину или все из нее. В обозначениях условий допустимости 2.8.A это значит, что $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$. В силу (3) и (4) в сильной вершине мы имеем $t_1 t_2 t_3 = 1$ и $T_1 + T_2 + T_3 = 1$. Принадлежность категории $S_i\mathcal{G}_P^1$ означает, что $t_i = i^{1-T_i}$. Значит, $t_1 t_2 t_3 = i^{3-(T_1+T_2+T_3)} = i^2 \neq 1$, что противоречит условию $t_1 t_2 t_3 = 1$. •

Доказательство 4.5.A. В силу леммы в каждой внутренней вершине по меньшей мере одно из примыкающих ребер направлено в сторону вершины и по меньшей мере одно направлено из вершины. Поэтому $|T_1 + T_2 - T_3| = 1$, где T_1 , T_2 и T_3 — веса ребер смежных некоторой вершине, пронумерованные подходящим образом. Тогда $|(1-2T_1) + (1-2T_2) - (1-2T_3)| = |1-2| = 1$, и, значит, эта вершина входит с коэффициентом ± 1 в границу весовой цепи раскраски, задаваемой Φ . •

Обозначим через \mathcal{G}_P^{1b} , $S_i\mathcal{G}_P^{1b}$ и \mathcal{G}_Q^{2b} категории \mathcal{G}_P^1 , $S_i\mathcal{G}_P^1$ и \mathcal{G}_Q^2 соответственно расширенные добавлением вторичных раскрасок к объектам и морфизмам.

4.5.С. Согласованность по весам Больцмана. *Функтор Φ_P может быть расширен до функтора Φ_P^b из $S_i\mathcal{G}_P^{1b}$ в \mathcal{G}_Q^{2b} таким образом, что вес Больцмана функтора \mathcal{A}^1 равняется весу Больцмана функтора \mathcal{A}^2 в той же точке после применения Φ_P^b .*

Это доказывается так же, как и теорема 4.3.А. Функтор Φ_P^b переводит каждую пунктирную дугу, окрашенную в (i^{1-T}, T) , в сплошную дугу, окрашенную в $1 - 2T$, причем ориентация не меняется, а стрелки становятся светлыми. Каждая сплошная дуга, окрашенная в (i^{1-T}, T) , меняет свою ориентацию и получает вес $2T - 1$. Доказательство завершается непосредственным сравнением весов Больцмана.



4.5.Д. Следствие теоремы 4.5.С. *Функтор Φ_P , отображающий подкатегорию $S_i\mathcal{G}_P^1$ категории \mathcal{G}_P^1 в \mathcal{G}_Q^2 , образует вместе с тождественным функтором категории \mathcal{M}_B естественное преобразование функтора $\mathcal{A}^1|_{S\mathcal{G}^1}$ в \mathcal{A}^2 . Другими словами, диаграмма*

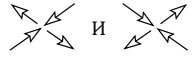
$$\begin{array}{ccc} S_i\mathcal{G}_P^1 & \xrightarrow{\mathcal{A}^1|_{S\mathcal{G}^1}} & \mathcal{M}_B \\ \downarrow \Phi_P & & \parallel \\ \mathcal{G}_Q^2 & \xrightarrow{\mathcal{A}^2} & \mathcal{M}_B \end{array}$$

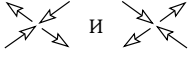
коммутативна. В частности, для любого морфизма Γ категории $S_i\mathcal{G}_P^1$

$$\mathcal{A}^2 \Phi_P(\Gamma) = \mathcal{A}^1(\Gamma).$$

4.6. Несюръективность и сюръективность перекрашивания. Как было замечено в п. 3.3, существуют \mathcal{G}^2 -раскраски, которые не допускают никакой вторичной раскраски, и поэтому дают морфизмы категории \mathcal{G}^2 , отображаемые функтором \mathcal{RT}^2 в нулевые морфизмы. Очевидно, что морфизм категории \mathcal{G}^2 , не допускающий вторичной раскраски, не принадлежит образу функтора Φ . Однако морфизмы этого типа не интересны, особенно если мы сравниваем \mathcal{RT}^2 и \mathcal{RT}^1 .

4.6.А. Частичное обращение функтора Φ_P^b . *Любой морфизм категории \mathcal{G}_P^{2b} с диаграммой, не имеющей ни фрагмента , ни , принадлежит образу Φ_P^b .*

Доказательство. Конструкция, преобразующая морфизм этого типа, может быть описана следующим образом: она заменяет сплошные дуги пунктирными, светлые стрелки темными; каждый вес A — парой, составленной из кратности $i^{\frac{A+1}{2}}$ и веса $\frac{1-A}{2}$. Эта конструкция обратна конструкции, которая доказывает утверждение 4.5.C. Можно проверить, что фрагменты табл. 6 превращаются во фрагменты первого столбца табл. 4 с кратностями смежных ребер, удовлетворяющих условиям допустимости 2.8.A. Аналогично все элементы табл. 5, кроме , превращаются в соответствующие элементы табл. 3. •

Условие отсутствия  нельзя опустить. Можно доказать, что правая сторона графа на рис. 5 не принадлежит образу функтора Φ^b . Действительно, невозможно найти подходящие веса. Существование весов эквивалентно существованию вторичной раскраски для графа, изображенного слева на рис. 5.

4.6.B. Обращение функтора Φ_P^b на графах без внутренних вершин. Морфизм в \mathcal{G}_Q^{2b} с диаграммой, не содержащей внутренних вершин, принадлежит образу функтора Φ_P^b . \mathcal{G}_P^{1b} -раскраска однозначно определяется ориентациями компонент.

Доказательство. Каждая дуга диаграммы с весом A , где ориентация вторичной раскраски и ориентация компоненты совпадают, должна быть заменена на пунктирную дугу с той же ориентацией, кратностью $i^{\frac{A+1}{2}}$ и весом $\frac{1-A}{2}$. Каждая дуга с весом A и ориентациями, противоположными друг другу, должна быть снабжена ориентацией компоненты, кратностью $i^{\frac{1-A}{2}}$ и весом $\frac{A+1}{2}$. Простая проверка показывает, что при этом каждый элемент табл. 5 преобразуется в элемент табл. 3. •

4.7. Заключение. Результаты этого параграфа показывают, что \mathcal{RT}^1 и \mathcal{RT}^2 тесно связаны, но не сводятся полностью друг к другу. Категория \mathcal{G}_h^1 кажется шире в нескольких отношениях категории \mathcal{G}^2 , на которой задан функтор \mathcal{RT}^2 . Во-первых, цвета имеют больше компонент. Во-вторых, условия допустимости допускают большее количество локальных картинок. Ориентации в вершинах в \mathcal{G}^1 не имеют аналога в \mathcal{G}^2 . Наконец, ограничение функтора \mathcal{RT}^1 на сравнительно малую часть категории $\mathcal{G}_{\pi i/2}^1$ может быть пропущено через отображение на существенную часть категории \mathcal{G}^2 .

С другой стороны, \mathcal{G}^2 и \mathcal{RT}^2 существенно проще, чем \mathcal{G}^1 и \mathcal{RT}^1 . Я не смог полностью свести первые ко вторым и сомневаюсь, что это возможно. Более простая теория имеет очевидные преимущества. Таким образом, приходится рассматривать обе теории.

Обобщения \mathcal{A}^1 и \mathcal{A}^2 функторов \mathcal{RT}^1 и \mathcal{RT}^2 тоже связаны друг с другом. Однако, условия на исходные алгебраические данные, при которых связывающее их естественное преобразование существует, весьма громоздки. Это является еще одним доводом в пользу рассмотрения обеих теорий.

§5. Скейн принципы и скейн соотношения

5.1. Скейн принципы. Так как \mathcal{A}^1 и \mathcal{A}^2 отображают крашеную точку в неприводимое представление, то из леммы Шура вытекает следующее утверждение.

5.1.А. Простота цветов. Пусть $c = 1$ или $c = 2$ и пусть Γ — морфизм категории \mathcal{G}_P^c с $\partial\Gamma = \Pi_1 \times 0 \cup \Pi_1 \times 1$. Предположим, что B — поле. Тогда $\mathcal{A}^c(\Gamma)$ является умножением на константу. Эта константа равна нулю, за исключением случая, когда концевые точки графа Γ окрашены в один и тот же цвет.

5.1.В. Ограниченная полнота цветов. Пусть $c = 1$ или $c = 2$ и пусть Γ — морфизм категории \mathcal{G}_P^c с $\partial\Gamma = \Pi_2 \times 0 \cup \Pi_2 \times 1$. Пусть раскраску концевых точек графа Γ можно продолжить до раскраски графа χ , удовлетворяющей условиям допустимости. Предположим, что B — поле. Тогда $\mathcal{A}^c(\Gamma)$ является линейной комбинацией морфизмов, являющихся образами относительно \mathcal{A}^c графа χ , снабженного раскрасками, продолжающими одну и ту же раскраску концевых точек и удовлетворяющими условиям допустимости.

В действительности линейная комбинация, о которой говорится в 5.1.В, содержит не более двух членов.

Доказательство 5.1.В. Рассмотрим случай $c = 1$. Случай $c = 2$ отличается лишь обозначениями. Рассматриваемый морфизм является морфизмом

$$(u_0, U_0)_{\epsilon_0} \otimes (v_0, V_0)_{\delta_0} \rightarrow (u_1, U_1)_{\epsilon_1} \otimes (v_1, V_1)_{\delta_1}.$$

Из предположений относительно цветов вытекает, что каждое тензорное произведение является прямой суммой двух неприводимых модулей над алгеброй U^1 , см. приложение 1, п. 11.8. Рассматриваемый морфизм должен сохранять эти разложения. Поэтому, он является линейной комбинацией не более двух изоморфизмов между соответствующими слагаемыми. (Если в разложениях нет изоморфных слагаемых, то исходный морфизм тривиален.)

Изоморфизм между слагаемыми разложений может быть реализован как образ графа \times , раскрашенного подходящим образом. •

Ограничение на цвета границы $\partial\Gamma$ в 5.1.В является причиной фундаментального отличия от случая квантовых инвариантов, изучаемых в [16] и [17]. Однако оно необходимо. Действительно, в силу условий допустимости 2.8.А граф \times не допускает никакой раскраски, для которой две нижние конечные точки окрашены в $(t, T_1, +)$ $(t^{-1}, T_2, +)$.

Невозможно увеличить палитру, чтобы снять ограничения из 5.1.В, не принося в жертву 5.1.А. Действительно, тензорное произведение модулей $(t, T_1)_+$ и $(t^{-1}, T_2)_+$ не является прямой суммой неприводимых U^1 -модулей.

5.1.С. Убивание отщепляемой замкнутой частью. Пусть $c = 1$ или $c = 2$ и пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ — крашенный оснащенный граф, представляющий морфизм категории \mathcal{G}_P^c и содержащий замкнутый непустой подграф Σ , который отделен от остальной части графа Γ двумерной сферой, не пересекающей Γ , и вложен в $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$. Тогда $\mathcal{A}^c(\Gamma) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $\Sigma = \Gamma$. Тогда Γ является эндоморфизмом пустой последовательности. Так как $\Sigma \neq \emptyset$, то его можно разложить следующим образом: $\curvearrowright \circ \Phi \circ \curvearrowleft$, где Φ — эндоморфизм модуля $(t, T)_+ \otimes (t, T)_-$ или $I(A) \otimes I(-A)$ для $c = 1$ и $c = 2$, соответственно. Первый оператор в этом разложении, \curvearrowleft , отображает B в инвариантный неприводимый подмодуль, который в обоих случаях можно описать как $\text{Ker } X \cap \text{Ker } Y$. В любом случае Φ переводит это подпространство в себя (так как Φ коммутирует с X и Y). Оператор \curvearrowright аннулирует это подпространство. Поэтому вся композиция обращается в нуль.

Если $\Gamma \neq \Sigma$, то разложение дает представление $\Gamma = \Sigma \otimes (\Gamma \setminus \Sigma)$. Таким образом, $\mathcal{A}^c(\Gamma) = \mathcal{A}^c(\Sigma \otimes (\Gamma \setminus \Sigma)) = \mathcal{A}^c(\Sigma) \otimes \mathcal{A}^c(\Gamma \setminus \Sigma) = 0 \otimes \mathcal{A}^c(\Gamma \setminus \Sigma) = 0$. •

В то время как теоремы 5.1.А и 5.1.В имеют аналоги в случае других функторов Решетихина–Тураева, теорема 5.1.С более специальна. Она влечет другие особенности теорий, связанных с многочленом Александра.

5.2. Первые скейн соотношения. Хотя 5.1.А и 5.1.В не похожи на скейн соотношения, они, очевидно, влекут существование скейн соотношений. Конечно, эти соотношения могут быть доказаны непосредственно прямым вычислением.

Например, из теоремы 5.1.A следует, что морфизмы

$$\mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \updownarrow \\ \uparrow \\ (t,T) \end{array} \right), \quad \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ (t,T) \end{array} \right)$$

совпадают с точностью до мультипликативной константы. Эта константа очевидна из построения функтора \mathcal{A}^1 : она равна t^{-T} . Откуда получаем соотношение

$$\mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \updownarrow \\ \uparrow \\ (t,T) \end{array} \right) = t^{-T} \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ (t,T) \end{array} \right). \quad (10)$$

Его можно использовать для замены произвольного графа на граф с диаграммным оснащением.

5.2.A. Соотношение удаления петли для \mathcal{A}^1 .

$$\mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \uparrow (t,T) \\ (u,U) \circlearrowleft (v,V) \\ \uparrow (t,T) \end{array} \right) = (t^2 - t^{-2}) \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ (t,T) \end{array} \right) \quad (11)$$

для любых допустимых раскрасок дуг в середине левой части равенства (11), таких что в сильных вершинах все ориентации имеют один и тот же знак.

Доказательство утверждения 5.2.A проводится прямым вычислением. Оно облегчается следующим наблюдением. Достаточно вычислить обе части с любым цветом в обеих концевых точках, так как морфизм является скаляром. Однако выбор цвета может упростить вычисления. Например, если дуги в середине левой части равенства (11) ориентированы вверх, то левая сторона допускает только одну раскраску с бозонными цветами в конечных точках и две раскраски с фермионными цветами. В бозонном случае вес Больцмана в верхней вершине есть 1, а внизу $t^2 - t^{-2}$ (см. табл. 4). Аналогичные вычисления доказывают (11) для других ориентаций этих дуг. Если дуги образуют ориентированный цикл, то выбор фермионного цвета в конечных точках сводит статсумму к единственному слагаемому. В противном случае это делает бозонный цвет. •

5.2.В. Соотношения соединения для \mathcal{A}^1 . Если $u^4v^4 \neq 1$, то

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ (u,U) \quad (v,V) \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{u^2v^2 - u^{-2}v^{-2}} \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} (u,U) \quad (v,V) \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ (uv, U+V-1) \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ (u,U) \quad (v,V) \end{array} \right) \\ &+ \frac{1}{u^{-2}v^{-2} - u^2v^2} \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} (u,U) \quad (v,V) \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ (u^{-1}v^{-1}, -U-V-1) \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ (u,U) \quad (v,V) \end{array} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Если $u^4v^{-4} \neq 1$, то

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ (u,U) \quad (v,V) \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{u^2v^{-2} - u^{-2}v^2} \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} (u,U) \quad (v,V) \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ (uv^{-1}, U-V+1) \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ (u,U) \quad (v,V) \end{array} \right) \\ &+ \frac{1}{u^{-2}v^2 - u^2v^{-2}} \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} (u,U) \quad (v,V) \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ (u^{-1}v, V-U+1) \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ (u,U) \quad (v,V) \end{array} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Это доказывается прямым вычислением.

Соотношения (12) и (13) настолько похожи, что было бы естественно соединить их. Единственным средством, необходимым для этого, являются следующие

Соглашения о скрытии несущественного.

- Если ориентации некоторых ребер не показаны на диаграмме, то ребра ориентированы, но неким неопределенным образом.
- Если несколько диаграмм входят в одно и то же равенство и имеют концевые точки, то ребра, смежные одинаково расположенным концевым точкам, раскрашены (u , в частности, ориентированы) одинаково во всех диаграммах.
- Если показана кратность цвета, то другие ингредиенты цвета игнорируются, поскольку они не существенны. Можно восстановить их любым образом, соблюдая условия допустимости.

(Однако отсутствующие ориентации в сильных вершинах положительны.)

- Если формула включает в себя сумму по цветам ребра без указания ориентации, то сумма берется по всем цветам (u , в частности, ориентациям), для которых тройки в концевых точках ребра с цветами смежных ребер допустимы.

При этом соглашении формулы (12) и (13) объединяются следующим образом:

$$\mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c|c} | & | \\ \hline u & v \end{array} \right) = \sum_{(w,W)} \frac{1}{w^2 - w^{-2}} \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} u & v \\ \diagdown & \diagup \\ & (w,W) \\ \diagup & \diagdown \\ u & v \end{array} \right). \quad (14)$$

Соотношение (11), которое уже частично записано в соответствии с этим соглашением, может быть переписано в более краткой форме:

$$\mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} s \\ | \\ u \bigcirc v \\ | \\ t \end{array} \right) = \delta_{s,t} (t^2 - t^{-2}) \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ t \end{array} \right). \quad (15)$$

5.3. Первые скейн соотношения для второго функтора. Аналогичным образом, но проще, можно доказать следующие аналоги соотношений (10), 5.2.A и 5.2.B для \mathcal{A}^2 :

$$\mathcal{A}^2 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \uparrow \\ (t,T) \end{array} \right) = i^{\frac{A^2-1}{4}} \mathcal{A}^2 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \uparrow \\ A \end{array} \right). \quad (16)$$

5.3.A. Соотношение удаления петли для \mathcal{A}^2 .

$$\mathcal{A}^2 \left(\begin{array}{c} \uparrow A \\ B \bigcirc C \\ \uparrow A \end{array} \right) = (i^{1+A} + i^{1-A}) \mathcal{A}^2 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \uparrow \\ A \end{array} \right) \quad (17)$$

для любых допустимых раскрасок дуг в середине с левой стороны.

5.3.В. Соотношение соединения для \mathcal{A}^2 . Если $A + B \notin 2\mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{A}^2 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ A \\ \uparrow \\ B \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{i^{A+B} - i^{-A-B}} \mathcal{A}^2 \left(\begin{array}{c} \swarrow A \quad \searrow B \\ \uparrow A+B-I \\ \swarrow A \quad \searrow B \end{array} \right) \\
 &+ \frac{1}{-i^{A+B} + i^{-A-B}} \mathcal{A}^2 \left(\begin{array}{c} \swarrow A \quad \searrow B \\ \uparrow A+B+I \\ \swarrow A \quad \searrow B \end{array} \right). \tag{18}
 \end{aligned}$$

§6. Инвариант Александера замкнутых крашенных оснащенных графов

6.1. Получение функции Конвея из функтора Решетихина–Тураева.

Изотопический класс \mathcal{G}^1 -крашеного оснащенного зацепления можно рассматривать как морфизм категории \mathcal{G}_h^1 из пустого множества в себя. Тензорное произведение пустого семейства модулей естественным образом отождествляется с основным полем \mathbb{C} , так как оно является единицей для тензорного произведения модулей. Таким образом, изотопический класс крашенных оснащенных зацеплений определяет посредством функтора Решетихина–Тураева комплексное число, зависящее от q . Для других полиномиальных инвариантов, таких как многочлен Джоунса, это дает способ связать многочлен и функтор: аналогичная функция от q , определенная функтором, является соответствующим многочленом.

Однако, как следует из теоремы 5.1.С, в случае $U_q gl(1|1)$ это не работает: число, построенное таким способом, является тождественным нулем. Это хорошо известно (см. [8, 13]). Стандартный способ получить функцию Конвея из функтора Решетихина–Тураева содержит вспомогательную геометрическую конструкцию. Одну из нитей в зацеплении нужно вытянуть и разрезать, чтобы превратить зацепление в связку, соединяющую $\Pi_1 \times 0$ с $\Pi_1 \times 1$ в $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$. В силу 5.1.А соответствующий морфизм является умножением на число, зависящее от q и цветов компонент. Это число, разделенное на $q^{2j} - q^{-2j}$, где j — кратность цвета разрезанной нити, является значением функции Конвея исходного зацепления вычисленной в q^{j_1}, \dots, q^{j_n} , где j_1, \dots, j_n — кратности цветов компонент зацепления, при условии, что веса всех цветов равны нулю. См. Розанский и Салёр [13, 14], Мураками [11], Дегучи и Акутсу [4].

6.2. Почему не важно, где резать. Здесь я покажу, что аналогичным образом функция Конвея определяет инвариант \mathcal{G}_P^1 -крашенных оснащенных графов в R^3 . Доказательство основано на следующей лемме.

6.2.A. Лемма. Пусть $P = (B, M, W, M \times W \rightarrow M)$ есть 1-палитра (см. п. 2.8). Пусть B — поле. Пусть Γ является \mathcal{G}_P^1 -крашенным оснащенный замкнутым трехвалентным графом, вложенным в \mathbb{R}^3 так, что его проекция в \mathbb{R}^2 является обшей. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — круг, содержащий всю проекцию графа Γ , за исключением двух дуг a и b , окрашенных в (u, U) и (v, V) соответственно. Пусть Γ_a и Γ_b — крашенные оснащенные графы, полученные из Γ разрезанием дуг a и b соответственно и перемещением концевых точек вверх и вниз в положение, в котором одна из них становится самой высокой, а другая — самой низкой. Во время перемещения оснащение в концевых точках сохраняется диаграммным. См. рис. 6. Тогда $\mathcal{A}^1(\Gamma_a)$ является умножением на $(u^2 - u^{-2})\Delta$ и $\mathcal{A}^1(\Gamma_b)$ — умножением на $(v^2 - v^{-2})\Delta$ с одним и тем же $\Delta \in B$.

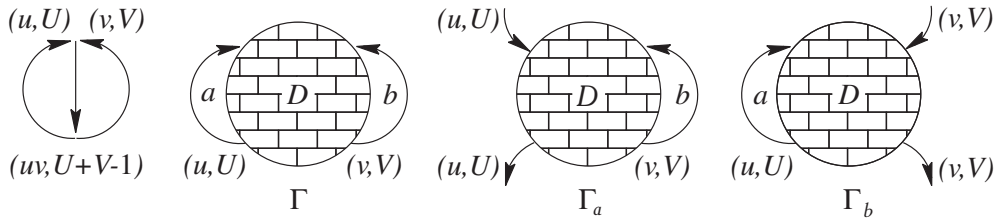


Рис. 6

Доказательство. Сперва мы предположим, что эти дуги окрашены так, что цвета можно продолжить на допустимую раскраску плоского тета-графа, содержащего a и b . В силу 5.1.В общая часть всех трех графов Γ , Γ_a и Γ_b , являющаяся частью, чья проекция покрывается кругом D , отображается с помощью \mathcal{A}^1 на линейную комбинацию образов двух различным образом раскрашенных экземпляров графа $\begin{smallmatrix} \diagdown & & \diagup \\ & \times & \\ \diagup & & \diagdown \end{smallmatrix}$. Эта линейная комбинация имеет следующий вид: $\alpha \mathcal{A}^1 \left(\begin{smallmatrix} \diagdown & & \diagup \\ & \uparrow & \\ \diagup & & \diagdown \end{smallmatrix} \right) + \beta \mathcal{A}^1 \left(\begin{smallmatrix} \diagdown & & \diagup \\ & \downarrow & \\ \diagup & & \diagdown \end{smallmatrix} \right)$.

Тогда

$$\mathcal{A}^1(\Gamma_a) = \alpha \mathcal{A}^1 \left(\begin{smallmatrix} \diagdown & & \diagup \\ & \uparrow & \\ \diagup & & \diagdown \end{smallmatrix} \right) + \beta \mathcal{A}^1 \left(\begin{smallmatrix} \diagdown & & \diagup \\ & \downarrow & \\ \diagup & & \diagdown \end{smallmatrix} \right).$$

В силу (11) $\mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) = \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} \end{array} \right) = (u^2 - u^{-2}) \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right)$ и, следовательно,

$$\mathcal{A}^1(\Gamma_a) = (\alpha + \beta)(u^2 - u^{-2}) \mathcal{A}^1 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right).$$

Таким образом, $\mathcal{A}^1(\Gamma_a)$ является умножением на $(\alpha + \beta)(u^2 - u^{-2})$.

Аналогично $\mathcal{A}^1(\Gamma_b)$ является умножением на $(\alpha + \beta)(v^2 - v^{-2})$. Это доказывает утверждение: положим $\Delta = \alpha + \beta$.

Предположение о продолжимости раскраски на тета-граф было использовано в самом начале доказательства. Имеются ситуации, в которых оно неверно. Например, с ориентациями, как на рис. 6, может случиться, что $u = v^{-1}$. Тогда 5.1.В нельзя применить, и фрагмент графа Γ , покрытый кругом D , нельзя заменить указанной линейной комбинацией. Однако в этом случае можно сперва сделать небольшую петлю на одной из дуг, скажем на b , и затем растянуть D , чтобы скрыть под D новую точку скрещивания. См. рис. 7. Вне D мы видим дугу b на прежнем месте, но ориентированную противоположным образом. Теперь предположение верно, и мы можем применить предыдущее рассуждение.

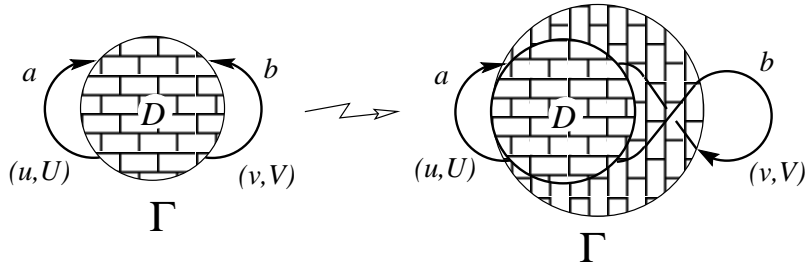
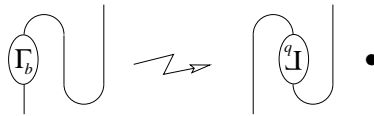


Рис. 7

Это не совсем то, что мы хотели: мы доказали утверждение, в котором вместо Γ_b мы имеем граф, изотопный графу, симметричному Γ_b относительно горизонтальной линии. Однако легко доказать, что эта симметрия не изменяет морфизма. Это следует из изотопической инвариантности образа относительно \mathcal{A}^1 и применения следующей изотопии:



Вот аналог леммы 6.2.А для \mathcal{A}^2 . Его можно доказать аналогичным образом.

6.2.В. Лемма. Пусть $P = (B, W, W^+ \rightarrow B^\times)$ — 2-палитра (см. п. 3.4). Пусть B — поле. Пусть Γ есть \mathcal{G}_P^2 -крашенный оснащенный замкнутый трехвалентный граф, вложенный в \mathbb{R}^3 , такой что его проекция на \mathbb{R}^2 является трехвалентным графом. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — круг, содержащий всю проекцию Γ , кроме двух дуг a и b , окрашенных в A и B соответственно. Пусть Γ_a и Γ_b — крашенные оснащенные графы, полученные из Γ разрезанием дуг a и b соответственно и перемещением концевых точек вверх и вниз в положение, в котором одна из них становится наивысшей, а другая самой низкой. В процессе перемещения оснащение в концевых точках сохраняется диаграммным. Тогда $\mathcal{A}^2(\Gamma_a)$ является умножением на $i(i^A + i^{-A})\Delta$ и $\mathcal{A}^2(\Gamma_b)$ — умножением на $i(i^B + i^{-B})\Delta$ с одним и тем же $\Delta \in B$.

6.3. Определение инвариантов Александера. Пусть $P = (B, M, W, M \times W \rightarrow M)$ есть 1-палитра и B — поле. Пусть Γ есть \mathcal{G}_P^1 -крашенный оснащенный замкнутый трехвалентный граф в \mathbb{R}^3 . Разрежем Γ в точке самой внешней дуги a этой диаграммы, в которой оснащение является диаграммным, и передвинем новые концевые точки вверх и вниз, сохраняя оснащение диаграммным во время движения. В результате получим морфизм Γ_a категории \mathcal{G}_P^1 . Пусть a имеет цвет (t, T) . Тогда $\frac{1}{t^2 - t^{-2}} \mathcal{A}^1(\Gamma_a)$ является умножением на некоторый элемент B . Обозначим этот элемент через $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$ и назовем его $gl(1|1)$ -инвариантом Александера для Γ . По лемме 6.2.А $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$ не зависит от выбора a , но, конечно, зависит от раскраски.

Пусть $P = (B, W, W^+ \rightarrow B^\times)$ — 2-палитра и пусть B — поле. Пусть Γ есть \mathcal{G}_P^2 -крашенный оснащенный трехвалентный граф в \mathbb{R}^3 . Разрежем Γ в какой-нибудь точке самой внешней дуги a этой диаграммы, в которой оснащение является диаграммным и переместим новые концевые точки вверх и вниз, сохраняя оснащение диаграммным в процессе движения. В результате получаем морфизм Γ_a категории \mathcal{G}_P^2 . Пусть a имеет цвет A . Тогда $\frac{1}{i^{1+A} + i^{1-A}} \mathcal{A}^2(\Gamma_a)$ является умножением на некоторый элемент из B . Обозначим этот элемент через $\underline{\Delta}^2(\Gamma)$ и назовем его $sl(2)$ -инвариантом Александера для Γ . В силу леммы 6.2.В $\underline{\Delta}^2(\Gamma)$ не зависит от выбора a . Конечно, он зависит от раскраски.

Когда выбор ясен из контекста, будем называть $gl(1|1)$ - и $sl(2)$ -инварианты Александера просто *инвариантами Александера*. Инвариант Александера $\underline{\Delta}^c(\Gamma)$ является инвариантом относительно (объемлемой) изотопии графа Γ . Это следует из изотопической инвариантности $\mathcal{A}^c(\Gamma_a)$ и очевидной конструкции превращающей изотопию графа Γ в изотопию графа Γ_a .

6.4. Представление вершинной статсуммы. Операции разрезания и передвижения точек разреза не нужны, если нужно только вычислить $\underline{\Delta}^c(\Gamma)$. Вместо этого можно использовать следующее вычисление.

Рассмотрим сначала случай $gl(1|1)$. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутый \mathcal{G}^1 -крашенный граф. Выберем его общую проекцию на \mathbb{R}^2 . На границе внешней области диаграммы выберем дугу. Для этой дуги выберем бозонный или фермионный цвет и рассмотрим все продолжения этого выбора на все множество одномерных страт графа Γ . Выберем общую проекцию диаграммы на прямую. Для каждого распределения бозонов и фермионов на одномерных стратах графа Γ поместим в соответствии с табл. 3 и 4 веса Больцмана в критические точки проекции и в вершины диаграммы и образуем их произведение. Просуммируем все такие произведения по всем распределениям. Если на выбранной дуге выбран фермион, умножим сумму на -1 . Если выбранная дуга окрашена кратностью t , то разделим результат на $t^2 - t^{-2}$. Если ориентация этой дуги определяет направление по часовой стрелке вокруг диаграммы графа Γ , то умножим результат на t^2 . В противном случае умножим результат на t^{-2} . В итоге получим $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$.

Для доказательства того, что это действительно $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$, можно разрезать Γ в общей точке выбранной дуги, передвинуть точки разрезания и вычислить $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$ в соответствии с определением, примененным к этому разрезанию. Перемещение точек разрезания дает две новые критические точки. Для того чтобы найти образ графа относительно \mathcal{A}^1 , достаточно вычислить образ одного из базисных векторов, бозонного или фермионного и разделить результат на $t^2 - t^{-2}$. Описанное выше вычисление делает это в терминах весов Больцмана.

Теперь рассмотрим случай $sl(2)$. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутый \mathcal{G}^2 -крашенный граф. Выберем его общую проекцию в \mathbb{R}^2 . На границе внешней области диаграммы выберем дугу. Поместим на эту дугу светлую стрелку, определяющую направление движения по часовой стрелке вокруг диаграммы. Рассмотрим все продолжения этого выбора светлой стрелки на вторичные раскраски диаграммы. Выберем общую проекцию диаграммы на прямую. Для каждого распределения ориентаций на одномерных стратах Γ поместим в соответствии с табл. 5 и 6 веса Больцмана в критические точки проекции и в вершины диаграммы и образуем их произведение. Просуммируем все такие произведения по всем распределениям. Если выбранная дуга окрашена весом A , разделим сумму на $1 + i^{-2A}$. В результате получим $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$.

6.5. Исчезание на расщепляемых. Как следует из теоремы 5.1.A, инвариант Александра обращается в нуль на всяком замкнутом \mathcal{G}_P^c -крашеном

оснащенном графе Γ , который можно представить в виде объединения двух замкнутых подграфов, отделенных друг от друга сферой, вложенной в \mathbb{R}^3 .

§7. Специальные свойства $gl(1|1)$ -инварианта Александра

7.1. Первые примеры: тривиальный узел и тета-граф. Тривиальный узел U с 0-оснащением, окрашенный в цвет (t, T) , обладает $gl(1|1)$ -инвариантом Александра, равным $\frac{1}{t^2-t^{-2}}$. Более общо для тривиального узла U_k с оснащением $k/2$, $k \in \mathbb{Z}$, окрашенным в (t, T) , имеем

$$\underline{\Delta}^1(U_k) = \frac{t^{-kT}}{t^2 - t^{-2}}.$$

Для любого плоского тета-графа Θ с плоским оснащением и произвольной раскраской и ориентациями против часовой стрелки в сильных вершинах имеем $\underline{\Delta}^1(\Theta) = 1$. Это следует из 5.2.A.

7.2. Одномерный остов тетраэдра. Теперь рассмотрим плоский одномерный остов тетраэдра с плоским оснащением. Обозначим его через T . Этот граф играет важную роль в граневой модели (см. §10). В отличие от случая тета-графа, $gl(1|1)$ -инвариант Александра графа T зависит от ориентации, и мы должны начать с классификации ориентаций.

7.2.A. Ориентации графа T . *С точностью до гомеоморфизма имеется 4 ориентации графа T . Они классифицируются числом притягивающих и отталкивающих вершин. Все ориентации без сильных вершин гомеоморфны. Все ориентации, имеющие как отталкивающие, так и притягивающие вершины, гомеоморфны. Имеются единственный тип с одной отталкивающей вершиной и без притягивающих вершин и единственный тип с одной притягивающей вершиной и без отталкивающих вершин (см. рис. 8).*

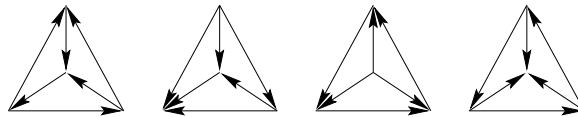


Рис. 8

7.2.B. Ориентации, непродолжимые до раскрасок. *Если ориентация графа T имеет только одну сильную вершину, то ее нельзя продолжить до допустимой \mathcal{G}_P^1 -раскраски графа T .*

Доказательство. Действительно, рассмотрим ориентацию, в которой есть отталкивающие вершины и нет притягивающих вершин. Допустим, что такая допустимая раскраска существует. Обозначим через T_1, T_2, T_3 веса ребер смежных отталкивающей вершине. Пусть U_1, U_2, U_3 — веса ребер, лежащих напротив ребер с весами T_1, T_2, T_3 соответственно. Пусть ребро с весом T_1 направлено в сторону конца ребра с весом U_3 (см. рис. 9).

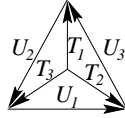


Рис. 9

Тогда в силу условия допустимости $4T_1 + T_2 + T_3 = -1$, $U_1 = T_2 + U_3 - 1$, $U_2 = T_3 + U_1 - 1$, $U_3 = T_1 + U_2 - 1$. Сложив эти четыре уравнения, получаем $0 = -4$.

Аналогично можно доказать, что если в ориентации есть притягивающая вершина и нет отталкивающих вершин, то ее нельзя продолжить до допустимой раскраски. •

Остальные ориентации можно продолжить до раскрасок.

7.2.С. Лемма о характеристическом ребре. Для ориентации графа T , продолжимой до допустимой \mathcal{G}_P^1 -раскраски, существует единственное ребро, обращение ориентации которого превращает ориентацию графа T в ориентацию с отталкивающей вершиной и без притягивающих вершин.

Ребро, определенное в лемме 7.2.С, называется *характеристическим*. На рис. 8 нижние ребра в двух графах слева являются характеристическими. Характеристическое ребро можно определить так же, как единственное ребро, связывающее две нечетные вершины (см. п. 2.2).

7.2.Д. $gl(1|1)$ -инвариант Александра графа T . Пусть T — крашенный плоский одномерный остов тетраэдра с плоским оснащением. Тогда $\underline{\Delta}^1(T) = t^2 - t^{-2}$, где t — кратность цвета характеристического ребра графа T .

Мне не известно концептуальное доказательство утверждения 7.2.Д. Доказательство прямым вычислением предоставляется читателю. Чтобы облегчить задачу, я бы рекомендовал выбрать ребро для разрезания таким образом, чтобы имелся цвет, однозначно продолжимый с этого ребра до раскраски графа T . В случае без сильных вершин можно взять ребро,

предшествующее характеристическому в 4-цикле и раскрасить его с помощью бозона. В случае двух сильных вершин нужно раскрасить бозоном ребро, соединяющее сильные вершины. В обоих случаях все четыре ребра, пересекающиеся с выбранным, должны быть окрашены фермионом, а непересекающееся ребро — бозоном.

Вычисления этого параграфа показывают, многочлен Александра намного проще многочлена Джоунса. Действительно, многочлен Джоунса для тех же элементарных графов значительно сложнее. См., например, [2].

7.3. Фунториальная замена цветов. Пусть $P_1 = (B_1, M_1, W_1, M_1 \times W_1 \rightarrow M_1)$ и $P_2 = (B_2, M_2, W_2, M_2 \times W_2 \rightarrow M_2)$ — две 1-палитры, пусть S — подкольцо кольца B_1 , содержащее M_1 и W_1 и пусть $\beta : S \rightarrow B_2$ — такой гомоморфизм колец, что $\beta(M_1) \subset M_2$, $\beta(W_1) \subset W_2$ и $\beta(m)^{\beta(w)} = \beta(m^w)$ для всех $m \in M_1$ и $w \in W_1$.

Пусть Γ_1 — такой морфизм категории $\mathcal{G}_{P_1}^1$, что кратность каждой одномерной страты Γ_1 не принадлежит $\beta^{-1}\{t \in M_2 \mid t^4 = 1\}$. Тогда, заменяя на каждой одномерной страте кратность и вес на их образы под действием β (и сохраняя остальные компоненты раскраски), мы превратим Γ_1 в морфизм Γ_2 категории $\mathcal{G}_{P_2}^1$. Каждый элемент матрицы, представляющей отображение $\mathcal{A}^1(\Gamma_2)$ в стандартных базисах, равен образу относительно β соответствующего элемента матрицы, представляющей отображение $\mathcal{A}^1(\Gamma_1)$. Это немедленно следует из определения функтора \mathcal{A}^1 .

Теперь предположим, что B_1 и B_2 — поля. Тогда имеется аналогичное соотношение для инварианта Александра: если Γ_1 есть $\mathcal{G}_{P_1}^1$ -крашенный оснащенный трехвалентный граф в \mathbb{R}^3 , то, заменяя кратности и веса одномерных страт Γ_1 на их образы относительно β , мы преобразуем Γ_1 в $\mathcal{G}_{P_2}^1$ -крашенный граф Γ_2 , и $\underline{\Delta}^1(\Gamma_2)$ совпадает с образом $\underline{\Delta}^1(\Gamma_1)$ под действием β .

7.4. Универсальные цвета. Как мы видели в п. 7.2, ограничения на ориентации и веса, наложенные условиями допустимости 2.8.A, являются довольно тонкими. Кратности более просты: для данных ориентаций и весов кратности представляют собой по существу одномерный цикл с коэффициентами в мультипликативной группе M . Единственное нетривиальное условие на этот цикл — это то, что он принимает на каждой одномерной страте значение, не являющееся корнем четвертой степени из единицы, и, в частности, эти значения отличны от 1. Это следует из условия допустимости (3). Например, граф, состоящий из двух непересекающихся окружностей и отрезка, соединяющего их, не допускает раскраски, так как всякий одномерный цикл обращается в нуль на этом отрезке.

Среди всех одномерных циклов на графе Γ со всевозможными группами коэффициентов существует *универсальный одномерный цикл* такой, что любой другой одномерный цикл может быть получен из него заменой коэффициентов (т.е. так же, как в предыдущем параграфе). Группой коэффициентов для универсального цикла служит $H^1(\Gamma; \mathbb{Z})$. Универсальный цикл строится следующим образом. (Ориентированная) одномерная страта e в Γ может рассматриваться как одномерный коцикл в Γ . (На одномерной цепи c этот коцикл принимает значение, равное коэффициенту, с которым e входит в c .) Легко проверить, что сопоставление одномерной страте определенный таким образом класс когомологий, является циклом. Обозначим его через u .

Пусть M — абелева группа. Фиксируем некоторый элемент $x \in H_1(\Gamma; M)$. Вычисление классов когомологий на x определяет гомоморфизм $y \mapsto y \frown x : H^1(\Gamma; \mathbb{Z}) \rightarrow M$, и x является образом цикла u при гомоморфизме

$$H_1(\Gamma; H^1(X; \mathbb{Z})) \rightarrow H^1(\Gamma; M),$$

индуцированном гомоморфизмом $y \mapsto y \frown x : H^1(\Gamma; \mathbb{Z}) \rightarrow M$.

Пусть $P = (B, M, W, M \times W \rightarrow M)$ — 1-палитра с $W = \mathbb{Z}$. Пусть Γ — оснащенный замкнутый трехвалентный граф в \mathbb{R}^3 , снабженный ориентациями. Предположим, что его диаграмма снабжена весами, удовлетворяющими условию допустимости (4). Если набор этих ориентаций и весов продолжается до \mathcal{G}_P^1 -раскраски диаграммы Γ , то он продолжается и на четверку, образованную из

$$B = Q(H^1(\Gamma; \mathbb{Z})), \quad M = H^1(\Gamma; \mathbb{Z}), \quad W = \mathbb{Z}.$$

Более того, $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$ с любой \mathcal{G}_P^1 -раскраской, такой что $W = \mathbb{Z}$, можно выразить как показано в п. 6.5, в терминах инварианта Александра Γ с раскраской, чья компонента кратности является универсальным одномерным циклом.

Заметим, что инвариант Александра с универсальными кратностями является отношением формальных линейных комбинаций одномерных классов когомологий графа. Чтобы отличить сложение в $H^1(\Gamma)$ от формального сложения, имеет смысл записывать сложение в $H^1(\Gamma)$ как умножение.

7.5. Зависимость инварианта Александра зацепления от оснащений и весов. Соотношение (10) описывает, как зависит $\mathcal{A}^1(\Gamma)$, а значит, и $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$ от оснащения. Как следует из этого соотношения, если $T = 0$, то $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$ не меняется при изменении оснащения. В случае зацепления можно выбрать такую раскраску, что все весовые компоненты цветов равны нулю, и исключить зависимость инварианта $\underline{\Delta}^1(\Gamma)$ от оснащения.

Введение ненулевых весов и оснащений не делает инвариант Александера сильнее: его по-прежнему можно вычислить, если матрица коэффициентов зацепления и инвариант Александера того же зацепления с нулевыми весами известны. Под матрицей коэффициентов зацепления я понимаю матрицу, образованную коэффициентами самозацепления (т.е. числами оснащения) и попарными коэффициентами зацепления компонент.

Эти числа легко найти по диаграмме зацепления. Коэффициент зацепления двух компонент равен полусумме знаков всех точек скрещивания, в которых проекции компонент пересекаются. Коэффициент самозацепления является суммой знаков во всех точках скрещивания, где проекция компоненты пересекает себя, плюс полусумма знаков полуоборотов на проекции компоненты.

Так как несколько компонент могут быть окрашены в один цвет, то нам нужна редуцированная матрица зацепления. Для оснащенного крашеного зацепления L мы обозначим через $\text{lk}_L((u, U)(v, V))$ сумму коэффициентов зацепления всех компонент зацепления L , окрашенных в (u, U) , и всех компонент, окрашенных в (v, V) . Обозначим через $\text{lk}_L((u, U)(u, U))$ сумму всех коэффициентов самопересечения компонент зацепления L , окрашенных в (u, U) плюс удвоенная сумма всех их попарных коэффициентов самозацепления. Для нахождения этих чисел для зацепления, представленного своей диаграммой, можно использовать то же правило, что и выше: если $(u, U) \neq (v, V)$, то $\text{lk}_L((u, U)(v, V))$ есть полусумма знаков всех точек скрещивания, в которых встречаются компоненты, окрашенные в цвета (u, U) , (v, V) ; $\text{lk}_L((u, U)(u, U))$ является суммой знаков точек скрещивания, в которых обе нити окрашены в (u, U) плюс полусумма знаков точек полуоборота на нитях, окрашенных в (u, U) .

7.5.A. Пусть L есть \mathcal{G}_P^1 -крашеное оснащенное зацепление в \mathbb{R}^3 , и пусть L_0 есть \mathcal{G}_P^1 -крашеное оснащенное зацепление, полученное из L заменой весовых компонент цвета нулем. Тогда

$$\underline{\Delta}^1(L) = \prod_{(u,U)} u^{-2 \sum_{(v,V)} V \text{lk}_L((u,U),(v,V))} \underline{\Delta}^1(L_0) \quad (19)$$

Доказательство. Это вытекает из прямого вычисления вкладов весовых компонент цветов в веса Больцмана. Весовые компоненты цветов дают вклад только в веса Больцмана в точках полуоборота и точках скрещивания. В положительных точках полуоборота компоненты, окрашенной в (u, U) , он равен u^{-U} , в положительных точках скрещивания с цветами

(u, U) и (v, V) он равен $u^{-V}v^{-U}$. Произведение всех этих множителей равно

$$\prod_{(u,U)} u^{-2\sum_{(v,V)} V \text{lk}_L((u,U),(v,V))}. \bullet$$

7.6. Зависимость инварианта Александра от весов: общий случай. В присутствии трехвалентных вершин невозможно добиться того, чтобы все веса цветов были равны, так как если в трехвалентной вершине два из трех смежных ребер окрашены нулевым цветом, то в силу условия допустимости, третье ребро окрашено весом ± 1 . Однако с помощью формулы, аналогичной формуле (19), можно связать инварианты Александра оснащенного графа, окрашенного двумя разными способами цветами, отличающимися лишь в их весовых компонентах.

Пусть Γ — оснащенный граф, снабженный двумя \mathcal{G}_P^1 -раскрасками с цветами, отличающимися лишь на их весовых компонентах. Обозначим через T_e^k значение веса k -й (с $k = 1, 2$) раскраски, принимаемого на ориентированной (с ориентацией, входящей в раскраску) одномерной страте e . Тогда $\sum(T_e^1 - T_e^2)e$, где e пробегает множество одномерных страт графа Γ , является одномерным циклом с целыми коэффициентами. Это следует из условий допустимости (4). Назовем этот цикл *весовым циклом* и обозначим его через Γ_W . Еще один цикл получается так же, но в нем $T_e^1 - T_e^2$ заменяется на кратность (одну и ту же в обоих раскрасках) страты e . Назовем этот цикл *циклом кратностей* и обозначим его через Γ_M .

Рассмотрим поле прямых на Γ , нормальное к оснащению. Выберем на каждой из прямых короткий отрезок с центром в соответствующей точке Γ так, чтобы концы отрезков образовывали трехвалентный граф $\tilde{\Gamma}$, двулистно накрывающий граф Γ . Снабдим $\tilde{\Gamma}$ такой ориентацией, что проекция накрытия отображает ее в ориентацию Γ , содержащуюся в раскрасках. Снабдим каждую одномерную страту графа $\tilde{\Gamma}$ кратностью ее образа при проекции. Ориентированные одномерные страты $\tilde{\Gamma}$, снабженные половинами этих кратностей, образуют цикл с коэффициентами в M . Обозначим этот цикл через $\tilde{\Gamma}_M$. Его можно представлять как цикл кратностей Γ_M , который столкнули с Γ в обоих направлениях нормальных к оснащению. Цикл $\tilde{\Gamma}_M$ не пересекается с Γ , а значит, и с Γ_W . Поэтому коэффициент зацепления $\text{lk}(\tilde{\Gamma}_M, \Gamma_W)$ этого цикла и весового цикла, ассоциированный со спариванием $M \times W \rightarrow M : (m, w) \mapsto m^w$, корректно определен. В случае, когда Γ является зацеплением и $T_e^2 = 0$, имеем

$$\text{lk}(\tilde{\Gamma}_M, \Gamma_W) = \prod_{(u,U)} u^{2\sum_{(v,V)} V \text{lk}_L((u,U),(v,V))}$$

(см. (19)).

Обозначим через Γ_1 и Γ_2 граф Γ , снабженный рассматриваемыми раскрасками. Тогда

$$\underline{\Delta}^1(\Gamma_2) = \text{lk}(\tilde{\Gamma}_M, \Gamma_W)^{-1} \underline{\Delta}^1(\Gamma_1). \quad (20)$$

Формула (20) обобщает (19) и доказывается аналогично.

7.7. Связь $gl(1|1)$ -инварианта Александра с функцией Конвея. Напомним, что для ориентированного зацепления L с (линейно) упорядоченными связными компонентами L_1, \dots, L_k функция Конвея $\nabla(L)(t_1, \dots, t_k)$ является рациональной функцией от переменных t_1, \dots, t_k , определенная следующими аксиомами 7.7.A–7.7.F (см. Тураев [18]):

7.7.A. $\nabla(L)$ не меняется при (объемлемой) изотопии зацепления L .

7.7.B. Если L — тривиальный узел, то $\nabla(L)(t) = (t - t^{-1})^{-1}$.

7.7.C. Если L состоит из более чем одной компоненты, то $\nabla(L)$ является многочленом Лорана, т.е. $\nabla(L)(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_k, t_k^{-1}]$.

Обозначим через $\tilde{\nabla}(L)$ функцию $\nabla(L)(t, t, \dots, t)$ от одной переменной.

7.7.D. $\tilde{\nabla}(L)(t)$ не зависит от упорядочения связных компонент зацепления L .

7.7.E. Скейн соотношение Конвея. Если $L_{\searrow \nearrow}$, $L_{\nearrow \searrow}$ и $L_{\swarrow \nwarrow}$ — зацепления, совпадающие вне некоторого шара, а внутри шара выглядящие как нижние индексы в их обозначениях, то

$$\tilde{\nabla}(L_{\searrow \nearrow}) = \tilde{\nabla}(L_{\nearrow \searrow}) + (t - t^{-1})\tilde{\nabla}(L_{\swarrow \nwarrow}). \quad (21)$$

7.7.F. Аксиома удвоения. Если L' — зацепление, полученное из зацепления $L = L_1 \cup \dots \cup L_k$ заменой компоненты L_i ее $(2, 1)$ -обмоткой, то

$$\nabla(L')(t_1, \dots, t_r) = (T + T^{-1})\nabla(L)(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i^2, t_{i+1}, \dots, t_k) \quad (22)$$

где $T = t_i \prod_{j \neq i} t_j^{\text{lk}(L_i, L_j)}$.

7.7.G. Теорема сравнения инварианта Александра с функцией Конвея. Пусть M_k — мультипликативная свободная абелева группа, порожденная элементами t_1, \dots, t_k . Пусть B_k является полем $Q(M_k)$ рациональных функций от t_1, \dots, t_k с целыми коэффициентами. Обозначим через P_k четверку $(B_k, M_k, \mathbb{Z}, M_k \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : (m, w) \mapsto m^w)$. Пусть L есть $\mathcal{G}_{P_k}^1$ -крашеное оснащенное зацепление с компонентами L_1, \dots, L_k , окрашенными кратностями t_1, \dots, t_r и нулевыми весами (т.е.

$T_1 = T_2 = \dots = T_k = 0$). Тогда $\underline{\Delta}^1(L)$ и функция Конвея того же зацепления L (с ориентацией, взятой из раскраски) связаны следующим образом:

$$\underline{\Delta}^1(L) = \nabla(L)(t_1^2, \dots, t_k^2). \quad (23)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что инвариант Александра \mathcal{G}_P^1 -крашеного оснащенного зацепления с нулевыми весами удовлетворяет следующим аналогам аксиом 7.7.A–7.7.F.

7.7.A.bis. $\underline{\Delta}^1(L)$ не меняется при (объемлемой) изотопии L .

7.7.B.bis. Если L — тривиальный узел, \mathcal{G}_P^1 -крашенный кратностью t , то

$$\underline{\Delta}^1(L)(t) = (t^2 - t^{-2})^{-1}.$$

7.7.C.bis. Если L содержит более одной связной компоненты $\mathcal{G}_{P_k}^1$ -окрашенных как в 7.7.G, то $\underline{\Delta}^1(L)$ является многочленом Лорана от кратностей, т.е.

$$\underline{\Delta}^1(L) \in \mathbb{Z}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_k, t_k^{-1}].$$

Пусть L — $\mathcal{G}_{P_k}^1$ -крашеное оснащенное зацепление как в 7.7.G. Обозначим через L^t то же оснащенное зацепление, но в котором все компоненты окрашены в $(t, 0)$ и ориентации взяты из раскраски L .

7.7.D.bis. $\underline{\Delta}^1(L^t)(t) = \underline{\Delta}^1(L)^1(t, \dots, t)$.

7.7.E.bis. Скейн соотношение Конвея. Если $L_{\searrow \nearrow}$, $L_{\swarrow \nwarrow}$ и $L_{\nearrow \searrow}$ — зацепления, совпадающие вне некоторого шара и внутри шара выглядящие как нижние индексы в их обозначениях, то

$$\underline{\Delta}^1(L_{\searrow \nearrow}^t) = \underline{\Delta}^1(L_{\swarrow \nwarrow}^t) + (t^2 - t^{-2})\underline{\Delta}^1(L_{\nearrow \searrow}^t). \quad (24)$$

7.7.F.bis. Аксиома удвоения. Если L' является зацеплением, полученным из зацепления $L = L_1 \cup \dots \cup L_k$ заменой L_i на ее $(2, 1)$ -кабельное зацепление, то

$$\underline{\Delta}^1(L')(t_1, \dots, t_r) = (T + T^{-1})\underline{\Delta}^1(L)(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i^2, t_{i+1}, \dots, t_k), \quad (25)$$

где $T = t_i^2 \prod_{j \neq i} t_j^{2 \text{lk}(L_i, L_j)}$.

7.7.C.bis представляет собой ослабленный аналог аксиомы 7.7.C. Настоящим аналогом было бы включение $\underline{\Delta}^1(L) \in \mathbb{Z}[t_1^2, t_1^{-2}, \dots, t_k^2, t_k^{-2}]$. Однако 7.7.C.bis тоже достаточно для доказательства единственности инварианта, удовлетворяющего указанным аксиомам, так как в доказательстве, имитирующем доказательство Тураева, [18] оно все равно используется в комбинации с соотношением Конвея 7.7.E.bis и аксиомой удвоения 7.7.F.bis. Первое позволяет доказать, что $\underline{\Delta}^1(L^t)(t) \in \mathbb{Z}[t^2, t^{-2}]$, из чего и из 7.7.C.bis

посредством аксиомы удвоения 7.7.F.bis легко выводится усиленный аналог аксиомы 7.7.C.

Утверждения 7.7.A.bis, 7.7.B.bis, 7.7.D.bis очевидно справедливы.

Для доказательства 7.7.C.bis заметим сперва, что для любого эндоморфизма одноточечного объекта категории \mathcal{G}_P^1 его образ при \mathcal{A}^1 является умножением на многочлен Лорана от переменных t_1, \dots, t_k . Действительно, веса Больцмана для всех образующих $\mathcal{G}_{P_k}^1$ являются многочленами Лорана. Для вычисления $\underline{\Delta}^1(L)$ можно взять $\mathcal{A}^1(L_a)$ с a из различных компонент. Пусть a — дуга на L_1 и b — дуга на L_2 . Тогда как $(t_1^2 - t_1^{-2})^{-1} \mathcal{A}^1(L_a)$ так и $(t_2^2 - t_2^{-2})^{-1} \mathcal{A}^1(L_b)$ являются умножением на $\underline{\Delta}^1(L)$. Первый из этих морфизмов является умножением на элемент из $\mathbb{Z}[M_k]$, деленный на $t_1^2 - t_1^{-2}$, второй — умножением на элемент из $\mathbb{Z}[M_k]$, деленный на $t_2^2 - t_2^{-2}$. Так как $t_1^2 - t_1^{-2}$ и $t_2^2 - t_2^{-2}$ взаимно-просты в $\mathbb{Z}[M_k]$, то $\underline{\Delta}^1(L)$ является элементом $\mathbb{Z}[M_k]$.

Скейн соотношение Конвея 7.7.E.bis легко получается, если сравнить веса Больцмана в положительных и отрицательных точках скрещивания (см. первый столбец табл. 3).

Теперь рассмотрим аксиому удвоения 7.7.F.bis. Так как оснащение не влияет на $\underline{\Delta}^1$, когда весовые компоненты цветов обращаются в нуль, то можно считать, что компонента L_i имеет коэффициент самозацепления $\frac{1}{2}$ и что ее $(2, 1)$ -обмотка имеет коэффициент самозацепления 2. При таком выборе, $(2, 1)$ -обмотку L'_i компоненты L_i зацепления L можно получить как край поверхности оснащения F (являющейся лентой Мебиуса) компоненты L_i . Оснащающая поверхность компоненты L'_i касается поверхности F вдоль всей L'_i . Сжимая две параллельные дуги в L'_i вдоль F в одну дугу, применим соотношение соединения 5.2.B

$$\underline{\Delta}^1(L') = (t_i^2 - t_i^{-2})^{-1} \underline{\Delta}^1(L_+) - (t_i^2 - t_i^{-2})^{-1} \underline{\Delta}^1(L_-).$$

Здесь L_+ является графом, полученным из L' сжатием двух параллельных дуг на L'_i с ориентацией, индуцированной ориентацией L'_i , а L_- — тот же граф, но с противоположной ориентацией на новой дуге. В L_+ и L_- эта новая дуга имеет оснащение вдоль F и вес -1 . Ее кратность равна t_i^2 в L_+ и t_i^{-2} в L_- соответственно.

Теперь растянем эти новые дуги вдоль L_i и применим соотношение удаления петли 5.2.A

$$\underline{\Delta}^1(L_+) = (t_i^2 - t_i^{-2}) \underline{\Delta}^1(L^1), \quad \underline{\Delta}^1(L_-) = -(t_i^2 - t_i^{-2}) \underline{\Delta}^1(L^2),$$

где L^1 есть L с компонентой L_i , снабженной кратностью t_i^2 и весом -1 , и L^2 есть L с компонентой L_i , снабженной противоположной ориентацией,

кратностью t_i^{-2} и весом -1 . Таким образом,

$$\underline{\Delta}^1(L') = \underline{\Delta}^1(L^1) + \underline{\Delta}^1(L^2).$$

Далее, в силу (19),

$$\underline{\Delta}^1(L^1) = (t_i^2)^{2\text{lk}_L(L_i, L_i)} \prod_{j \neq i} t_j^{2\text{lk}(L_j, L_i)} \underline{\Delta}^1(L_0^1) = t_i^2 \prod_{j \neq i} t_j^{2\text{lk}(L_j, L_i)} \underline{\Delta}^1(L_0^1),$$

где L_0^1 отличается от L только кратностью компоненты L_i ; кратность компоненты L_i в L_0^1 равна t_i^2 . Аналогично в силу (19)

$$\underline{\Delta}^1(L^2) = (t_i^{-2})^{2\text{lk}_L(L_i, L_i)} \prod_{j \neq i} t_j^{-2\text{lk}(L_j, L_i)} \underline{\Delta}^1(L_0^2) = t_i^{-2} \prod_{j \neq i} t_j^{-2\text{lk}(L_j, L_i)} \underline{\Delta}^1(L_0^2),$$

где L_0^2 отличается от L только ориентацией и кратностью компоненты L_i ; кратность компоненты L_i в L_0^2 равна t_i^{-2} .

Легко видеть, что возведение в квадрат кратности t_i компоненты зацепления соответствует замене t_i на t_i^2 во всех весах Больцмана, в то время как одновременное обращение ориентации и обращение кратности компоненты зацепления не изменяют весов Больцмана. Поэтому $\underline{\Delta}^1(L_0^1)$ и $\underline{\Delta}^1(L_0^2)$ получаются из $\underline{\Delta}^1(L)$ заменой t_i на t_i^2 . Это соответствует замене t_i на t_i^2 в $\underline{\Delta}^1(L)$. Коэффициент $t_i^2 \prod_{j \neq i} t_j^{2\text{lk}(L_j, L_i)}$ равен T . •

§8. Специальные свойства $sl(2)$ -инварианта Александра

8.1. Первые вычисления: тривиальный узел и тета-граф. $sl(2)$ -многочлен Александра тривиального узла U с 0-оснащением, окрашенного цветом A , имеет вид $\frac{1}{i^{1+A} + i^{1-A}}$. Для тривиального узла U_k с оснащением $k/2$, $k \in \mathbb{Z}$, окрашенного цветом A ,

$$\underline{\Delta}^2(U_k) = \frac{i^{k \frac{A^2-1}{4}}}{i^{1+A} + i^{1-A}}.$$

Для плоского тета-графа Θ с плоским оснащением и произвольной раскраской имеем $\underline{\Delta}^2(\Theta) = 1$. Это следует из 5.3.A.

8.2. $sl(2)$ -инвариант Александра одномерного остова тетраэдра. Напомним, что плоский одномерный остов тетраэдра с плоским оснащением обозначается через T . В \mathcal{G}_P^2 -раскраске графа T две вершины являются источниками, а остальные две — вершины стока. Действительно, аугментация нульмерного цикла „источники-стоки“ равна нулю, так как этот цикл является границей весовой цепи.

8.2.А. *$sl(2)$ -инвариант Александера графа Γ . Пусть Γ — крашенный плоский одномерный остов тетраэдра с плоским оснащением. Тогда $\underline{\Delta}^2(\Gamma) = i^{1+A} + i^{1-A}$, где A — вес ребра, соединяющего две вершины стока в Γ .*

Доказательство проводится прямым вычислением и оставляется читателю. Чтобы облегчить это вычисление, я бы рекомендовал выбрать ребро для разреза таким образом, чтобы существовала вторичная раскраска (т.е. ориентация) этого ребра, однозначно продолжаемая на вторичную раскраску графа Γ . Можно выбрать ребро, связывающее источник со стоком и ориентировать его от источника к стоку. •

8.3. Фунториальная замена цветов. Пусть $P_1 = (B_1, W_1, W_1^+ \rightarrow B_1^\times)$ и $P_2 = (B_2, W_2, W_2^+ \rightarrow B_2^\times)$ — две 2-палитры, пусть S — подкольцо кольца B_1 , содержащее W_1 , и $\beta : S \rightarrow B_2$ — такой кольцевой гомоморфизм, что $\beta(W_1) \subset W_2$ и $\beta(i^w) = i^{\beta(w)}$ для всех $w \in W_1$.

Пусть Γ_1 — такой морфизм категории $\mathcal{G}_{P_1}^2$, что вес никакой одномерной страты графа Γ_1 не принадлежит $\beta^{-1}\{x \in W_2 \mid i^{2x+2} = 1\}$. Тогда замена на каждой одномерной страте веса на его образ при β (с сохранением компоненты ориентации раскраски) превращает Γ_1 в морфизм Γ_2 категории $\mathcal{G}_{P_2}^2$. Каждый элемент матрицы, представляющей $\mathcal{A}^2(\Gamma_2)$ в стандартных базисах, совпадает с образом относительно β соответствующего элемента матрицы, представляющей $\mathcal{A}^2(\Gamma_1)$. Это немедленно следует из определения функтора \mathcal{A}^2 .

Теперь пусть B_1 и B_2 являются полями. Тогда существует аналогичное соотношение для $sl(2)$ -инварианта Александера: если Γ_1 есть $\mathcal{G}_{P_1}^2$ -крашенный оснащенный трехвалентный граф в \mathbb{R}^3 , то замена весов одномерных страт в Γ_1 на их образы при β превращает Γ_1 в $\mathcal{G}_{P_2}^2$ -крашенный граф Γ_2 , и $\underline{\Delta}^2(\Gamma_2)$ совпадает с образом инварианта $\underline{\Delta}^2(\Gamma_1)$ при β .

8.4. Эффект добавления чисел, делящихся на 4, к весам: случай зацепления.

8.4.А. Пусть L есть \mathcal{G}_P^2 -крашеное оснащенное зацепление с компонентами L_1, \dots, L_n , окрашенными весами A_1, \dots, A_n соответственно. Пусть p_1, \dots, p_n — целые числа, делящиеся на 4 и пусть L' является \mathcal{G}_P^2 -крашеным оснащенный зацеплением, образованным теми же компонентами L_1, \dots, L_n , что и L , но окрашенными весами $p_1 + A_1, \dots, p_n + A_n$. Тогда

$$\underline{\Delta}^2(L') = \underline{\Delta}^2(L) i^{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (1+A_i) p_j \text{lk}(L_i, L_j)}. \quad (26)$$

Доказательство. Это вытекает из непосредственного вычисления вклада, который дает изменение весов в весах Больцмана. Меняются только веса Больцмана в точках полуоборота и точках скрещивания. В точке положительного полуоборота i -й компоненты вес Больцмана умножается на $i^{\frac{A_i p_i}{2}}$, в положительной точке скрещивания i -й и j -й компоненты вес Больцмана умножается на $i^{\frac{(1+A_i)p_j+(1+A_j)p_i}{2}}$. Произведение всех таких множителей равно

$$\prod_{i=1}^n i^{\sum_{j=1}^n (1+A_i)p_j \text{lk}(L_i, L_j)}. \bullet$$

8.5. Эффект добавления чисел, делящихся на 4 к весам: общий случай. Пусть Γ — оснащенный граф, снабженный двумя \mathcal{G}_P^2 -раскрасками, такой что на каждой одномерной страте графа Γ веса этих раскрасок отличаются на целое число, делящееся на 4. Обозначим через A_e^k значение веса k -й (с $k = 1, 2$) раскраски, принимаемого на ориентированной (с ориентацией, взятой из раскраски) одномерной страте e . Тогда $\sum (A_e^1 - A_e^2)e$, где e пробегает множество одномерных страт графа Γ , является одномерным циклом с коэффициентами в $4\mathbb{Z}$. Это вытекает из условий допустимости 3.1.A. Обозначим этот цикл через Γ_W . Другой цикл имеет коэффициенты в $M/2\mathbb{Z}$. Это весовой цикл $\sum (1 + A_e^1)e = \sum (1 + A_e^2)e \pmod{2}$. Обозначим его через Γ_M .

Рассмотрим поле прямых на Γ , нормальное оснащению. Выберем на каждой из этих прямых короткий отрезок с центром в соответствующей точке графа Γ , так чтобы концы отрезков образовывали трехвалентный граф $\tilde{\Gamma}$, двулистно накрывающий Γ . Снабдим $\tilde{\Gamma}$ ориентацией так, чтобы накрывающая проекция отображала ее в ориентацию Γ , включенную в раскраски. Снабдим каждую одномерную страту графа $\tilde{\Gamma}$ кратностью ее образа при проекции. Ориентированные одномерные страты графа $\tilde{\Gamma}$, снабженные половинами этих кратностей, образуют цикл с коэффициентами в M . Обозначим этот цикл через $\tilde{\Gamma}_M$. Его можно рассматривать как цикл кратностей Γ_M , который столкнули с Γ в обе стороны, нормальные к оснащению. Цикл $\tilde{\Gamma}_M$ не пересекается с Γ и, значит, с Γ_W . Поэтому коэффициент зацепления $\text{lk}(\tilde{\Gamma}_M, \Gamma_W)$, ассоциированный со спариванием умножения $M/2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z} \rightarrow M/4\mathbb{Z}$, корректно определен. В случае, когда Γ является зацеплением, $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$, рассмотренном в предыдущем параграфе,

$$\text{lk}(\tilde{\Gamma}_M, \Gamma_W) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (1 + A_i)p_j \text{lk}(L_i, L_j) \pmod{4}$$

(см. (26)).

Обозначим через Γ_1 и Γ_2 граф Γ , снабженный рассматриваемыми раскрасками. Тогда

$$\underline{\Delta}^2(\Gamma_2) = i^{\text{lk}(\tilde{\Gamma}_M, \Gamma_W)} \underline{\Delta}^2(\Gamma_1). \quad (27)$$

Формула (27) обобщает (26) и доказывается аналогично.

8.6. Связь $sl(2)$ -инварианта Александра с функцией Конвея.

8.6.A. Пусть L — ориентированное оснащенное зацепление с компонентами L_1, \dots, L_n , снабженными \mathcal{G}_P^2 -раскраской. Предположим, что L_i окрашен весом A_i . Тогда

$$\underline{\Delta}^2(L) = \nabla(L)(i^{1+A_1}, \dots, i^{1+A_n}) i^{\sum_{i,j=1}^n \frac{A_i A_j - 1}{2} \text{lk}(L_i, L_j)}. \quad (28)$$

Доказательство. Построим (см. п. 4.5) 1-палитру R . Она состоит из кольца B , входящего в P , образа M гомоморфизма $W^+ \rightarrow B^\times : A \rightarrow i^A$, подкольца $W \subset B$ и спаривания $M \times W \rightarrow M : (i^A, B) \mapsto i^{AB}$. В силу 4.6.B всякая вторичная \mathcal{G}_P^2 -раскраска диаграммы зацепления L является образом вторичной \mathcal{G}_R^1 -раскраски относительно Φ_Q^b . Следовательно, в силу 4.5.D имеем $\underline{\Delta}^2(L) = \underline{\Delta}^1(L')$, где L' — то же ориентированное оснащенное зацепление L , но снабженное соответствующей \mathcal{G}_R^1 -раскраской. \mathcal{G}_R^1 -цвет графа L_i включает в себя кратность $i^{\frac{1+A_i}{2}}$ и вес $\frac{1-A_i}{2}$. Обозначим через L^0 то же зацепление L , снабженное \mathcal{G}_R^1 -раскраской с теми же ориентациями и кратностями, но с нулевыми весами. В силу 7.5.A

$$\underline{\Delta}^1(L') = \underline{\Delta}^1(L^0) \prod_{i=1}^n i^{\frac{1+A_i}{2}} \left(-2 \sum_{j=1}^n \frac{1-A_j}{2} \text{lk}(L_i, L_j) \right).$$

В силу 7.7.G

$$\underline{\Delta}^1(L^0) = \nabla(L)(i^{1+A_1}, \dots, i^{1+A_n}).$$

Откуда

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}^2(L) &= \underline{\Delta}^1(L') = \underline{\Delta}^1(L^0) \prod_{i=1}^n i^{-(1+A_i) \sum_{j=1}^n \frac{1-A_j}{2} \text{lk}(L_i, L_j)} \\ &= \nabla(L)(i^{1+A_1}, \dots, i^{1+A_n}) i^{\sum_{i,j=1}^n \frac{A_i A_j - 1}{2} \text{lk}(L_i, L_j)}. \quad \bullet \quad (29) \end{aligned}$$

§9. Графические скейн соотношения

9.1. Новый облик скейн соотношений. Инвариант Александра для крашенных оснащенных трехвалентных графов дает язык, на котором можно переписать скейн соотношения из §5 и написать аналогичные, но более сложные, соотношения.

Заметим сперва, что так как

$$\underline{\Delta}^1(\bigcirc_{(t,T)}) = \frac{1}{t^2 - t^{-2}},$$

то скейн соотношения (15) и (14) можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{A}^1\left(\begin{array}{c} \uparrow(t,T) \\ \bigcirc \\ \uparrow(t,T) \end{array}\right) = \frac{1}{\underline{\Delta}^1(\bigcirc_{(t,T)})} \mathcal{A}^1\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ (t,T) \end{array}\right), \quad (30)$$

$$\mathcal{A}^1\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right) = \sum_{(t,T)} \underline{\Delta}^1(\bigcirc_{(t,T)}) \mathcal{A}^1\left(\begin{array}{c} \diagup \\ (t,T) \\ \diagdown \end{array}\right). \quad (31)$$

Аналогично так как

$$\underline{\Delta}^2(\bigcirc_A) = \frac{1}{i^{1+A} + i^{1-A}},$$

то скейн соотношения (15) и (18) можно переписать так:

$$\mathcal{A}^2\left(\begin{array}{c} \uparrow^A \\ B \bigcirc C \\ \uparrow^A \end{array}\right) = \frac{1}{\underline{\Delta}^2(\bigcirc_A)} \mathcal{A}^2\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ A \end{array}\right), \quad (32)$$

$$\mathcal{A}^2\left(\begin{array}{c} | \\ | \end{array}\right) = \sum_A \underline{\Delta}^2(\bigcirc_A) \mathcal{A}^2\left(\begin{array}{c} \diagup \\ A \\ \diagdown \end{array}\right). \quad (33)$$

Эта более графическая форма используется при переходе к граневым статсуммам.

9.2. Новые соотношения. Соотношения этого пункта формулируются в графической форме и также используются при переходе к граневым статсуммам. Если бы мы не интерпретировали коэффициенты как инварианты Александра графов, связанных рассматриваемыми графами, было бы сложно даже сформулировать эти соотношения. Другое преимущество графической формулировки в том, что мы можем объединить соотношения для \mathcal{A}^1 и \mathcal{A}^2 .

9.2.A. HI-соотношение. Для $c = 1, 2$

$$\mathcal{A}^c\left(\begin{array}{c} u \\ | \\ v \end{array} \begin{array}{c} w \\ | \\ r \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ r \end{array}\right) = \sum_t \underline{\Delta}^c\left(\begin{array}{c} u \\ \bigcirc \\ v \end{array} \begin{array}{c} w \\ | \\ r \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ t \end{array}\right) \underline{\Delta}^c(\bigcirc_t) \mathcal{A}^c\left(\begin{array}{c} u \\ \diagup \\ v \end{array} \begin{array}{c} s \\ \diagdown \\ r \end{array}\right) \quad (34)$$

при условии, что раскраски удовлетворяют условию допустимости и суммирование производится по непустому множеству цветов (т.е. существует цвет t , входящий вместе с данными цветами в допустимую раскраску графов в правой части равенства (34)).

Доказательство. По теореме 5.1.В правая часть (34) может быть представлена в виде следующей линейной комбинации:

$$\mathcal{A}^c \left(\begin{array}{c} u \\ | \\ v \end{array} \begin{array}{c} w \\ | \\ r \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ r \end{array} \right) = \sum_t x_t \mathcal{A}^c \left(\begin{array}{c} u \\ | \\ v \end{array} \begin{array}{c} t \\ | \\ r \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ r \end{array} \right). \quad (35)$$

Для нахождения x_p присоединим графы

$$\begin{array}{c} p \\ | \\ u \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ r \end{array}, \quad \begin{array}{c} v \\ | \\ p \end{array} \begin{array}{c} r \\ | \\ p \end{array}$$

сверху и снизу соответственно к каждому из графов, участвующих в равенстве. Тогда левая часть равенства (35) превращается в

$$\mathcal{A}^c \left(\begin{array}{c} p \\ | \\ u \\ | \\ v \end{array} \begin{array}{c} w \\ | \\ r \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ r \\ | \\ p \end{array} \right) = \underline{\Delta}^c \left(\begin{array}{c} u \\ | \\ v \end{array} \begin{array}{c} w \\ | \\ r \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ r \\ | \\ p \end{array} \right) \left(\underline{\Delta}^c \left(\bigcirc_p \right) \right)^{-1} \text{id}.$$

В силу (30) слагаемое соответствующее цвету p в правой части превращается в морфизм $x_p \left(\underline{\Delta}^c \left(\bigcirc_p \right) \right)^{-2} \text{id}$, в то время как другие слагаемые пропадают. Откуда получаем

$$\underline{\Delta}^c \left(\begin{array}{c} u \\ | \\ v \end{array} \begin{array}{c} w \\ | \\ r \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ r \\ | \\ p \end{array} \right) \left(\underline{\Delta}^c \left(\bigcirc_p \right) \right)^{-1} = x_p \left(\underline{\Delta}^c \left(\bigcirc_p \right) \right)^{-2}$$

и

$$x_p = \underline{\Delta}^c \left(\begin{array}{c} i \\ | \\ j \end{array} \begin{array}{c} k \\ | \\ l \end{array} \begin{array}{c} m \\ | \\ p \end{array} \right) \underline{\Delta}^c \left(\bigcirc_p \right). \bullet$$

Следующее скейн соотношение аналогично соотношению 9.2.A и имеет аналогичное доказательство. Более того, оно может быть выведено из 9.2.A, (10) и (16).

9.2.В. Соотношение скрещивания. Для $c = 1, 2$

$$\mathcal{A}^c \left(\begin{array}{c} w \\ | \\ v \\ | \\ u \end{array} \begin{array}{c} t \\ / \\ \backslash \\ t \end{array} \begin{array}{c} s \\ \backslash \\ / \\ t \end{array} \right) = \sum_r \underline{\Delta}^c \left(\begin{array}{c} w \\ \backslash \\ t \\ / \\ s \\ \backslash \\ u \end{array} \begin{array}{c} r \end{array} \right) \underline{\Delta}^c (\bigcirc r) \mathcal{A}^c \left(\begin{array}{c} w \\ \backslash \\ u \end{array} \begin{array}{c} s \\ / \\ r \\ / \\ t \end{array} \right) \quad (36)$$

при условии, что раскраски удовлетворяют условию допустимости и суммирование производится по непустому множеству цветов (т.е. существует цвет r , который вместе с другими цветами образует допустимую раскраску графов в правой части равенства (36)).

9.2.С. Соотношение треугольника. Для $c = 1, 2$

$$\mathcal{A}^c \left(\begin{array}{c} w \\ / \\ s \\ \backslash \\ u \end{array} \begin{array}{c} r \\ \backslash \\ t \\ / \\ v \end{array} \right) = \underline{\Delta}^c \left(\begin{array}{c} s \\ \backslash \\ u \\ / \\ t \end{array} \begin{array}{c} w \\ / \\ r \\ \backslash \\ v \end{array} \right) \mathcal{A}^c \left(\begin{array}{c} w \\ / \\ u \\ \backslash \\ v \end{array} \right) \quad (37)$$

при условии, что раскраски удовлетворяют условию допустимости.

Это также следует из 9.2.А, (10) и (16).

9.3. Скейн соотношения для инвариантов Александера. Все скейн соотношения для \mathcal{A}^c , обсуждавшиеся в п. 9.1 и 9.2, могут рассматриваться и как скейн соотношения для $\underline{\Delta}^c$. Нужно только заменить \mathcal{A}^c на $\underline{\Delta}^c$ и понимать выражение $\underline{\Delta}^c$ (незамкнутая диаграмма графа) обычным образом, т.е. как инвариант Александера некоторого замкнутого графа, диаграмма которого содержит показанную диаграмму как фрагмент, являющийся единственной переменной частью диаграммы: в других членах соотношения, которые содержат незамкнутую диаграмму, непоказанные части диаграмм предполагаются точно такими же.

§10. Граневые суммы состояний

10.1. Раскраски диаграммы. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ — оснащенный трехвалентный замкнутый граф. Зафиксируем его диаграмму Γ .

Пусть $P = (B, M, W, M \times W \rightarrow M)$ есть 1-палитра. Под \mathcal{G}_P^1 -цветом двумерной страты диаграммы⁵ мы понимаем ориентацию этой двумерной страты, элемент t из M с $t^4 \neq 1$ (называемый *кратностью* двумерной страты), элемент T из W (называемый ее *весом*).

\mathcal{G}_P^1 -раскраска диаграммы графа Γ — это такое сопоставление цвета каждой одномерной и двумерной страте диаграммы, что

⁵Напомним, что двумерная страта диаграммы является связной компонентой дополнения в \mathbb{R}^2 проекции графа Γ .

- (1) в каждой тройной вершине цвета смежных ребер удовлетворяют условию допустимости 2.8.A,
- (2) в каждой точке скрещивания цвета противоположных ребер (которые принадлежат образу одной и той же страты графа Γ) совпадают,
- (3) для каждой одномерной страты ее цвет и цвета двух смежных двумерных страт удовлетворяют следующему условию 10.1.A (см. 2.8.A):

10.1.A. Допустимость цветов 1-палитры на одномерной страте. Пусть t — кратность и T — вес компонент цвета одномерной страты. Пусть (t_1, T_1) и (t_2, T_2) — соответствующие компоненты цветов смежных двумерных страт. Пусть $\epsilon_i = 1$, если ориентация i -й смежной двумерной страты индуцирует ориентацию одномерной страты и $\epsilon_i = -1$ в противном случае. Тогда

$$tt_1^{\epsilon_1}t_2^{\epsilon_2} = 1, \quad (38)$$

$$T + \epsilon_1T_1 + \epsilon_2T_2 = -\epsilon_1\epsilon_2. \quad (39)$$

Говорят, что одномерная страта диаграммы *сильная* относительно \mathcal{G}_P^1 -раскраски диаграммы, если ориентации смежных двумерных страт индуцируют ориентацию одномерной страты (т.е. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ в обозначениях 10.1.A). Видно, что объединение сильных одномерных страт является одномерным подмногообразием плоскости. Граница этого подмногообразия является множеством образов всех сильных вершин графа. Ориентации сильных одномерных страт образуют естественную ориентацию их объединения.

Пусть теперь $P = (B, W, W^+ \rightarrow B^\times)$ есть 2-палитра. Под \mathcal{G}_P^2 -цветом двумерной страты диаграммы мы будем понимать пару, образованную ориентацией этой двумерной страты, и элемент A множества $B \setminus \{x \in W \mid i^{2x+2} = 1\}$, определенный с точностью до одновременного обращения ориентации и умножения элемента A на -1 . Компонента цвета, принадлежащая B , называется *весом* двумерной страты.

\mathcal{G}_P^2 -раскраска диаграммы графа Γ представляет собой сопоставление цвета каждой одномерной и двумерной страте диаграммы, такое что

- (1) в каждой тройной вершине цвета смежных ребер удовлетворяют условию допустимости 3.4.A,
- (2) в каждой точке скрещивания цвета противоположных ребер (которые принадлежат образу одной и той же одномерной страты графа Γ) совпадают
- (3) для каждой одномерной страты ее цвет и цвета двух двумерных страт удовлетворяют следующему условию 10.1.B (см. 3.4.A):

10.1.В. Допустимость цветов 2-палитры на одномерной страте. Пусть одномерная страта окрашена весом A и пусть A_1 и A_2 — весовые компоненты цветов смежных двумерных страт. Пусть $\epsilon_i = 1$, если ориентация i -й смежной двумерной страты индуцирует ориентацию одномерной страты, и $\epsilon_i = -1$ в противном случае. Тогда

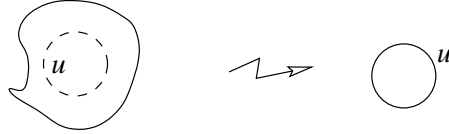
$$A + \epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2 = \pm 1. \quad (40)$$

Знак правой части равенства (40) зависит от ориентации одномерной страты. Если в правой части стоит знак плюс, то говорят, что ориентация одномерной страты *определена* \mathcal{G}_P^2 -раскраской.

Раскраска графа Γ определяет раскраску одномерной страты диаграммы. Раскраска диаграммы, продолжающая эту раскраску, называется *граневым расширением* данной раскраски графа Γ . Производя граневое расширение, нужно заботиться только о последнем из трех условий из определений 10.1.А или 10.1.В \mathcal{G}_P^1 - или \mathcal{G}_P^2 -раскрасок диаграммы.

10.2. Инварианты Александра крашенных страт. В диаграмме, снабженной \mathcal{G}_P^c -раскраской, мы свяжем с каждой стратой \mathcal{G}_P^c -крашенный оснащенный трехвалентный граф.

Для двумерной страты, окрашенной в u — это $\bigcirc u$, т.е. тривиальный узел с нулевым оснащением, окрашенный в u :



Напомню, что инвариант Александра графа $\bigcirc u$ равен $(t^2 - t^{-2})^{-1}$ в случае $c = 1$, $u = (t, T)$ и $(i^{1+A} + i^{1-A})^{-1}$ в случае $c = 2$, $u = A$.

Для трехвалентной вершины, к которой примыкают ребра, окрашенные в u , v и w , и двумерные страты окрашенные в r , s и t как показано на рис. 10, это — одномерный остов тетраэдра, вложенный в плоскость, с плоским оснащением. Он получается выбором малых дуг на одномерных стратах, примыкающих к вершине, и трех дуг в плоскости, соединяющих свободные концы этих малых дуг. Ориентации одномерных страт, входящих в цвета, индуцируют ориентации первых трех дуг. Ориентации примыкающих двумерных страт, входящие в цвета этих двумерных страт, индуцируют ориентации на последних трех дугах, как на крае частей двумерных страт, отделенных от вершины этими дугами (см. рис. 10). Если

$c = 1$ и исходная трехвалентная вершина является сильной, то ее ориентация наследуется соответствующей вершиной тетраэдра. В других сильных вершинах тетраэдр снабжен ориентацией против часовой стрелки.

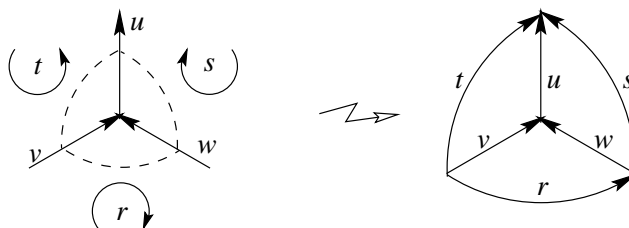


Рис. 10

Для точки скрещивания с нитями, окрашенными в s и t с примыкающими двумерными стратами, окрашенными в u, v, w и r , как на рис. 11, это снова одномерный остов тетраэдра. Однако на этот раз он не вложен в плоскость картинки, а представлен диаграммой, которая выглядит, как квадрат с диагоналями, снабженный диаграммным оснащением. Диаграмма получается из регулярной окрестности точки скрещивания так же, как в случае трехвалентной вершины: выберем маленькие дуги одномерных страт, примыкающих к точке скрещивания, и соединим их свободные концы четырьмя дугами, окружающими точку скрещивания в плоскости. Как и выше, ориентации одномерных страт индуцируют ориентации первых дуг, в то время как ориентации примыкающих двумерных страт индуцируют ориентации четырех дуг второй группы, как и выше: как на крае частей двумерных страт, отделенных от точки скрещивания этими дугами (см. рис. 11). В сильных вершинах граф снабжен ориентацией против часовой стрелки.

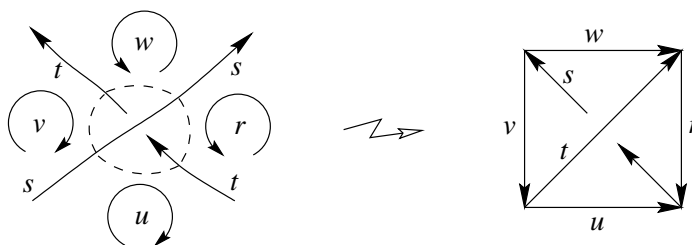
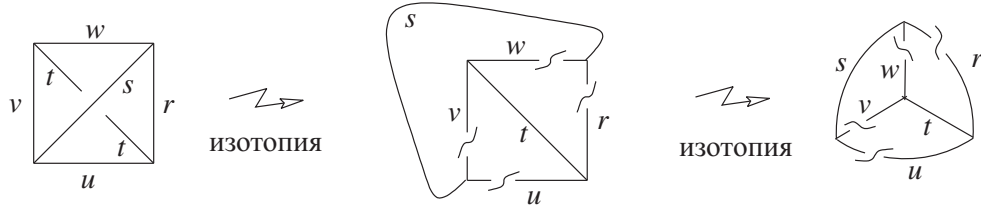


Рис. 11

Инвариант Александра этого одномерного остова тетраэдра отличается от инварианта Александра одномерного остова тетраэдра, соответствующего трехвалентной вершине, в силу различия между их оснащениями. Последний изотопен первому, но с недиаграммным оснащением:



Вследствие этого здесь инвариант Александра имеет дополнительный множитель. Если $c = 1$, граф имеет сильные вершины и они не принадлежат одной и той же диагонали исходной квадратной диаграммы, то появляется кроме того множитель -1 , так как изотопия переворачивает одну из сильных вершин, оставляя на месте другую.

Мы не связали с одномерными стратами никаких графов. Это можно было бы сделать естественным образом, но не дало бы никакого вклада в сумму состояний, которая является нашей главной целью. Причина в том, что граф, связанный с одномерной стратой, должен быть плоским тета-графом, а инвариант Александра плоского тета-графа равен 1.

Последний ингредиент, который мы должны ввести здесь — это *коэффициент подкручивания*. Он сопоставляется каждому знаку полуоборота одномерной страты. Для $c = 1$ и страты, окрашенной кратностью t и весом T , он равен t^{-T} , если полуоборот положителен, и t^T , если полуоборот отрицателен. Для $c = 2$ и страты, окрашенной весом A , он равен $i^{\frac{A^2-1}{4}}$, если полуоборот положителен, и $i^{\frac{1-A^2}{4}}$, если отрицателен.

10.3. Отмеченные грани, теньевая область и контур. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ — оснащенный \mathcal{G}_P^c -крашенный трехвалентный граф. Рассмотрим его диаграмму. Фиксируем несколько граней диаграммы. Мы будем называть их *отмеченными гранями*. Фиксируем цвета отмеченных граней таким образом, чтобы условия допустимости 10.1.A выполнялись для любой одномерной страты, смежной с двумя отмеченными гранями.

Пусть C — гладкое одномерное замкнутое подмногообразие плоскости \mathbb{R}^2 , которое находится в общем положении относительно диаграммы Γ . Это означает, что C не содержит вершин диаграммы, трансверсально к его одномерным стратам и не проходит над знаками \curvearrowright и \curvearrowleft полуоборотов.

Пусть \mathcal{S} — открытое подмножество плоскости \mathbb{R}^2 с границей C . Предположим, что каждая из отмеченных граней пересекает \mathcal{S} . Множество \mathcal{S} будет называться *теневого областью* и C — *контуром*.

Теневая область распадается на пересечения со стратами диаграммы графа Γ . Некоторые страты имеют фиксированные цвета. Такими являются все одномерные страты и пересечения области \mathcal{S} с отмеченными гранями. Обозначим через $Col_P(\mathcal{S})$ множество всех \mathcal{G}_P^c -раскрасок одномерных и двумерных страт области \mathcal{S} , удовлетворяющих всем условиям п. 10.1 и продолжающих эту раскраску на одномерные страты и отмеченные грани.

Контур C и часть диаграммы графа Γ , лежащая в дополнении области \mathcal{S} образует диаграмму трехвалентного графа. Обозначим этот граф через Γ_C . Хотя его вложение в \mathbb{R}^3 не задано, оно корректно определено с точностью до объемлемой изотопии, так как его диаграмма задана. Диаграммное оснащение C вместе со знаками оснащения на части диаграммы графа Γ определяют оснащение Γ_C .

Точки пересечения с диаграммой делят контур C на дуги, которые являются одномерными стратами графа Γ_C . Каждая из этих одномерных страт лежит на границе одной из двумерных страт области \mathcal{S} . Для $c \in Col_P(\mathcal{S})$ мы сопоставим каждой дуге контура C цвет смежной двумерной страты области \mathcal{S} . Раскраска графа Γ_C , полученная таким образом, удовлетворяет условию допустимости. Обозначим скейн класс этого крашеного оснащенного трехвалентного графа через $\Gamma_{C,c}$.

10.4. Статсуммы. Обозначим через $\tau(\mathcal{S})$ произведение коэффициентов подкручивания всех знаков полуоборота в области \mathcal{S} . Для $x \in Col_P(\mathcal{S})$ и страты Σ области \mathcal{S} обозначим через $\underline{\Delta}^c(\Sigma, x)$ инвариант Александра крашеного оснащенного трехвалентного графа, ассоциированного с Σ для раскраски x . Обозначим

$$\tau(\mathcal{S}) \sum_{x \in Col_P(\mathcal{S})} \underline{\Delta}^c(\Gamma_{C,x}) \prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x)^{\chi(\Sigma)}$$

через $Z(\mathcal{S})$. Здесь произведения берутся по всем стратам s в \mathcal{S} и χ — эйлерова характеристика.

10.4.A. Теорема о движении контура. $Z(\mathcal{S})$ не меняется при изотопии C в \mathbb{R}^2 , в процессе которой отмеченные грани пересекают теневую область и $Col_P(\mathcal{S}) \neq \emptyset$.

В простейших и наиболее интересных случаях при помощи изотопии контура C можно сжать теневую область до подмножества отмеченных граней. Тогда статсумма сводится к единственному члену, и ее легко связать с инвариантом Александра исходного графа Γ .

С другой стороны, изотопией C можно добиться того, чтобы теневая область поглотила большую часть диаграммы. Тогда граф Γ_C может стать довольно стандартным и будет легко вычислить множители $\Delta^c(\Gamma_{C,x})$.

Таким образом, теорема 10.4.А дает возможность выразить инвариант Александра произвольного крашеного оснащенного трехвалентного графа через статсуммы, содержащие хорошо известные инварианты Александра стандартных незаузленных графов. Статсумма определяется диаграммой исходного графа.

Теорема 10.4.А аналогична теореме Решетихина–Кириллова [7] для инвариантов, основанных на квантованной $sl(2)$ (т.е. обобщений многочлена Джоунса). Однако имеется два важных момента, в которых они существенно различны. Во-первых, члены суммы состояний в случае $sl(2)$ являются более сложными функциями цветов. Например, в наших суммах состояний множители, соответствующие ребрам, являются невидимыми (так как инвариант Александра тета-графа равен 1). Множители, соответствующие другим стратам, также намного проще в нашем случае. Во-вторых, условие непустоты множества раскрасок не появляется в $sl(2)$ случае, в то время как здесь оно является решающим.

Доказательство теоремы 10.4.А. При общей изотопии контура C картина меняется топологически только, когда C проходит через вершины диаграммы графа Γ , знаки полуоборотов или касается ветви диаграммы. Поэтому мы должны проверять инвариантность $Z(\mathcal{S})$ только при преобразованиях, показанных на рис. 12.

При первом преобразовании множество $Col_P(\mathcal{S})$ раскрасок не меняется (в том смысле, что имеется взаимно-однозначное соответствие между раскрасками до и после преобразования). Рассмотрим случай $c = 1$. В силу (10), $\underline{\Delta}^1(\Gamma_{C,x})$ для каждого $x \in Col_P(\mathcal{S})$ делится на t^{-T} , где t — кратность и T — вес цвета дуги, вовлеченной в преобразование. С другой стороны, полный вклад $\tau(\mathcal{S})$ от подкруток теневой области умножается на t^{-T} , так как в ней появляется дополнительный полуоборот. Поэтому $Z(\mathcal{S})$ не меняется при первом преобразовании. Аналогичные рассуждения доказывают это и в случае $c = 2$.

Для доказательства инвариантности относительно второго преобразования разобьем множество раскрасок до и после преобразования на классы раскрасок, совпадающих вне меняющегося фрагмента. Так как класс до преобразования состоит из единственной раскраски, скажем x , а класс после преобразования содержит столько раскрасок сколько цветов можно поместить в новый треугольник. Обозначим этот цвет через t и соответствующую раскраску через x_t . Пусть смежные страты раскрашены, как

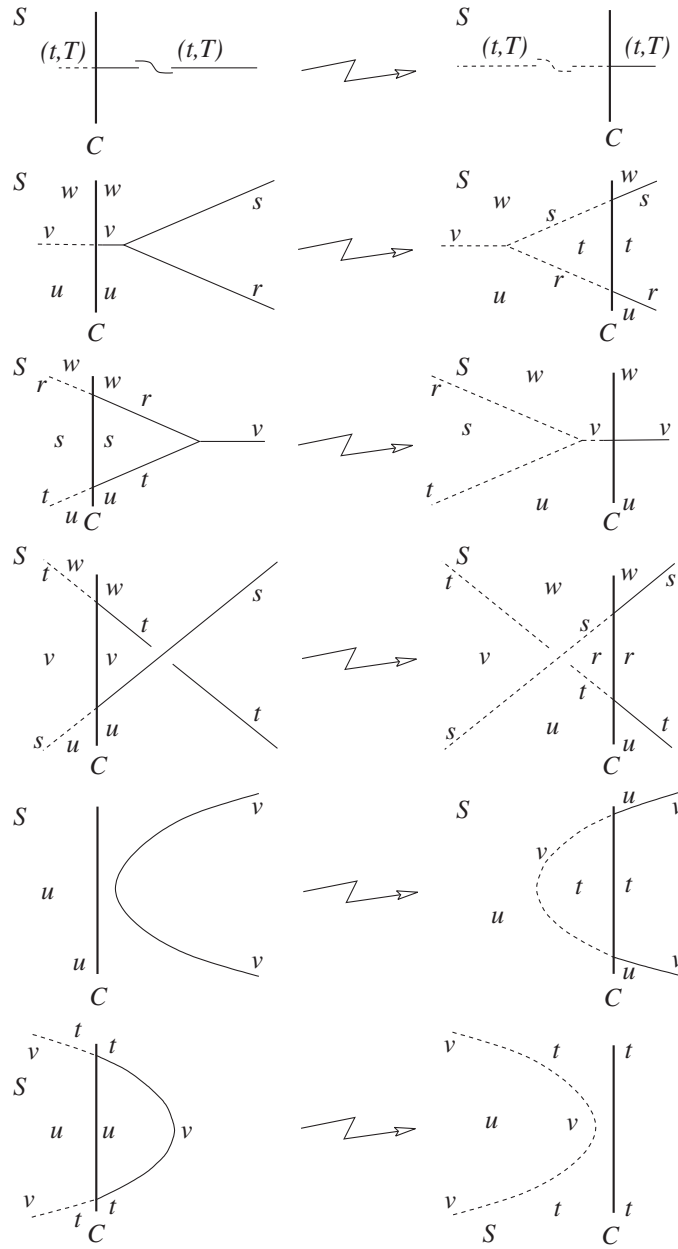


Рис. 12. Преобразования графа $\Gamma_{C,x}$ при общих изотопиях контура C . Фрагменты графа $\Gamma_{C,x}$ показаны сплошными линиями, в то время как куски диаграммы графа Γ , лежащие в теневой области, показаны пунктирными дугами.

на рис. 12. Инварианты Александера $\underline{\Delta}^c(\Gamma_{C,x})$ для раскрасок в этих классах до и после преобразования связаны соотношением (34) (с \mathcal{A}^c замененным на $\underline{\Delta}^c$, см. п. 9.3). Применимость (34) следует из предположения, что $Col_P(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ в процессе преобразования. Перепишем это соотношение следующим образом:

$$\underline{\Delta}^c(\Gamma_{C,x}) = \sum_t \underline{\Delta}^c \left(\begin{array}{c} u \\ \text{---} \\ w \text{---} s \\ \text{---} \\ v \text{---} r \end{array} \right) \underline{\Delta}^c \left(\bigcirc t \right) \underline{\Delta}^c(\Gamma_{C,x_t}).$$

С другой стороны,

$$\prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x_t)^{\chi(\Sigma)} = \prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x)^{\chi(\Sigma)} \underline{\Delta}^c \left(\begin{array}{c} u \\ \text{---} \\ w \text{---} s \\ \text{---} \\ v \text{---} r \end{array} \right) \underline{\Delta}^c \left(\bigcirc t \right),$$

так как в тени появляются новые страты, и этими стратами являются:

- (1) Новая трехвалентная вершина, которая дает вклад

$$\underline{\Delta}^c \left(\begin{array}{c} u \\ \text{---} \\ w \text{---} s \\ \text{---} \\ v \text{---} r \end{array} \right).$$

- (2) Новые ребра без полуоборотов. Они не дают вклада.

- (3) Новый треугольник с t . Он дает вклад $\underline{\Delta}^c \left(\bigcirc t \right)$.

Поэтому

$$\begin{aligned} & \underline{\Delta}^c(\Gamma_{C,x}) \prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x)^{\chi(\Sigma)} \\ &= \sum_t \underline{\Delta}^c \left(\begin{array}{c} u \\ \text{---} \\ w \text{---} s \\ \text{---} \\ v \text{---} r \end{array} \right) \underline{\Delta}^c \left(\bigcirc t \right) \underline{\Delta}^c(\Gamma_{C,x_t}) \prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x)^{\chi(\Sigma)} \\ &= \sum_t \underline{\Delta}^c(\Gamma_{C,x_t}) \prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x_t)^{\chi(\Sigma)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Инвариантность относительно третьего, четвертого, пятого и шестого преобразований доказывается так же, как инвариантность относительно второго преобразования, но с использованием вместо (34) следующих соотношений:

- (37) в случае третьего преобразования,
- (36) в случае четвертого преобразования,
- (31) и (33) в случае пятого преобразования,
- (30) и (32) в случае шестого преобразования. •

10.5. Граневые статсуммы для инварианта Александера. Теорема о движении контура 10.4.A не дает явного способа вычисления инварианта Александера. Здесь мы выведем явные формулы для этого. Формулы зависят от выбора отмеченных граней и движения контура, к которому применяется теорема о движении контура.

Конечно, отмеченные грани нужны, чтобы сделать статсумму конечной. В нашем случае они играют еще и роль, которая не нужна в $sl(2)$ случае: сделать статсумму ненулевой. Например, если взять единственную отмеченную грань (что обычно имеет место в $sl(2)$ случае), $Z(\mathcal{S})$ обращается в нуль. Действительно, в силу теоремы о движении контура, можно добиться того, чтобы контур не пересекал проекцию рассматриваемого графа. Это делает граф Γ_C расщепляемым и убивает $\underline{\Delta}^c(\Gamma_C)$ в силу 6.5.

Еще одна возможность выбрать отмеченные грани состоит в том, чтобы выбрать две соседних грани. Это осуществляется следующим образом.

10.5.A. Граневая статсумма на дуге. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ есть \mathcal{G}_P^c -раскрашенный оснащенный трехвалентный граф, пусть e — одномерная страта его диаграммы и s — цвет e . Пусть f_1, f_2 — двумерные страты диаграммы, примыкающие к e . Раскрасим их в цвета u и v так, чтобы выполнялось условие допустимости на e . Обозначим через $Col_P(u, v)$ множество всех допустимых \mathcal{G}_P^c -раскрасок диаграммы графа Γ , которые являются продолжениями на грани раскраски графа Γ и имеют указанные выше цвета на f_1 и f_2 . Пусть τ — произведение коэффициентов подкручивания всех точек полуоборота диаграммы. Если $Col_P(u, v) \neq \emptyset$, то

$$\underline{\Delta}^c(\Gamma) = \frac{\tau \underline{\Delta}^c \left(\bigcirc_s \right)}{\underline{\Delta}^c \left(\bigcirc_u \right) \underline{\Delta}^c \left(\bigcirc_v \right)} \sum_{x \in Col_P(u, v)} \prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x)^{\chi(\bar{\Sigma})}, \quad (42)$$

где $\bar{\Sigma} = \Sigma$, если Σ ограничено в \mathbb{R}^2 , в противном случае $\bar{\Sigma}$ получается добавлением к Σ точки на бесконечности в одноточечной компактификации S^2 плоскости \mathbb{R}^2 .

Доказательство. Сперва возьмем в качестве контура C маленькую окружность, ограничивающую в \mathbb{R}^2 круг \mathcal{S} , которая пересекает диаграмму только в дуге, лежащей в e . Круг является теневой областью. Тогда $Col_P(u, v)$ состоит из единственной раскраски, скажем, x ,

$$\underline{\Delta}^c(\Gamma_{C,x}) = \frac{\underline{\Delta}^c(\Gamma)}{\underline{\Delta}^c \left(\bigcirc_s \right)}$$

и $\prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x)^{\chi(\Sigma)} = \underline{\Delta}^c(\bigcirc u) \underline{\Delta}^c(\bigcirc v)$. Поэтому

$$Z(\mathcal{S}) = \underline{\Delta}^c(\Gamma) \frac{\underline{\Delta}^c(\bigcirc u) \underline{\Delta}^c(\bigcirc v)}{\underline{\Delta}^c(\bigcirc s)}.$$

Теперь будем растягивать C до того момента, пока \mathcal{S} не покроет всю диаграмму. Если $Col_P(u, v) \neq \emptyset$, то можно применить теорему 10.4.A и заключить, что $Z(\mathcal{S})$ не меняется. В конечный момент $\underline{\Delta}^c(\Gamma_{C,x}) = \underline{\Delta}^c(\bigcirc t)$, где t — цвет контура C . Поэтому

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{S}) &= \tau \sum_{x \in Col_P(u,v)} \underline{\Delta}^c(\bigcirc t) \prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x)^{\chi(\Sigma)} \\ &= \tau \sum_{x \in Col_P(u,v)} \prod_{\Sigma} \underline{\Delta}^c(\Sigma, x)^{\chi(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Сравнение с начальным значением $Z(\mathcal{S})$ дает требуемый результат. •

§11. Приложение 1.

Квантовая $gl(1|1)$ и ее неприводимые представления

11.1. Супералгебра $gl(1|1)$. Напомним, что приставка *супер*- означает, что рассматриваемый объект является \mathbb{Z}_2 -градуированным или по крайней мере связан с \mathbb{Z}_2 -градуированным объектом.

Например, векторное суперпространство (супер-)размерности $(p|q)$ — это \mathbb{Z}_2 -градуированное векторное пространство $V = V_0 \oplus V_1$, его 0-слагаемое V_0 имеет размерность p и 1-слагаемое V_1 имеет размерность q . Обозначим через $\mathbb{C}^{p|q}$ суперпространство $\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$. В суперпространстве 0-слагаемое называется *бозонной частью* и векторы, принадлежащие 0-слагаемому, называются *бозонами*, 1-слагаемое называется *фермионной частью* и его элементы называются *фермионами*.

Эндоморфизмы суперпространства $\mathbb{C}^{p|q}$ образуют супералгебру Ли, которая обозначается через $gl(p|q)$. Она состоит из $(p|q) \times (p|q)$ -матриц $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Это *супер*-алгебра, ее бозонная часть состоит из $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, фермионная часть состоит из $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$. На бозонах и фермионах (супер)-скобки Ли определяются как суперкоммутатор $[X, Y] = XY - (-1)^{\deg X \deg Y} YX$, где $\deg X$ равно 0, если X является бозоном и 1, если X — фермион. Это продолжается по линейности на всю $gl(p|q)$.

Суперслед $\text{str } M$ матрицы $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ определяется как $\text{tr } A - \text{tr } D$. Это естественная билинейная невырожденная форма

$$gl(p|q) \times gl(p|q) \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \text{str}(xy).$$

Супералгебра Ли $gl(1|1)$ порождается следующими четырьмя элементами:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \{X, Y\} (= XY + YX) &= E, \\ X^2 &= Y^2 = 0, \\ [G, X] &= X, \quad [G, Y] = -Y, \\ [E, G] &= [E, X] = [E, Y] = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

В действительности, эти соотношения определяют $gl(1|1)$.

11.2. Квантование. Универсальная обертывающая алгебра $Ugl(1|1)$ допускает деформацию (см. П. П. Кулиш [9]) с параметром h , производя квантовую супералгебру $U_qgl(1|1)$. Только первые соотношения (44) меняются: их правая часть E заменяется на „квантовую E “, т.е. на $\frac{q^E - q^{-E}}{q - q^{-1}}$ с $q = e^h$. Для того чтобы придать смысл этому неалгебраическому выражению, к алгебре добавляют формальные степенные ряды от h .

Обозначим

$$q^E = e^{hE} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n E^n}{n!}$$

через K . Так как E централен, то K также централен.

Алгебра A формальных степенных рядов от h порождается элементами X, Y, E и G , удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} \{X, Y\} &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ X^2 &= Y^2 = 0, \\ [E, X] &= 0, \quad [E, Y] = 0, \quad [E, G] = 0, \\ [G, X] &= X, \quad [G, Y] = -Y; \end{aligned} \quad (45)$$

может быть снабжена копроизведением

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= 1 \otimes E + E \otimes 1, \\ \Delta(G) &= 1 \otimes G + G \otimes 1, \\ \Delta(X) &= X \otimes K^{-1} + 1 \otimes X, \\ \Delta(Y) &= Y \otimes 1 + K \otimes Y, \end{aligned} \quad (46)$$

коединицей

$$\epsilon : A \rightarrow \mathbb{C} : \quad \epsilon(X) = \epsilon(Y) = \epsilon(E) = \epsilon(G) = 0 \quad (47)$$

и антиподом

$$s : A \rightarrow A : \quad \begin{aligned} s(E) &= -E, & s(G) &= -G, \\ s(X) &= -XK, & s(Y) &= -YK^{-1} \end{aligned} \quad (48)$$

и, таким образом, превращается в (супер-)алгебру Хопфа. Она обозначается через $U_qgl(1|1)$ и называется *квантовой супергруппой* $U_qgl(1|1)$.

Легко проверяется, что

$$\begin{aligned} \Delta(K) &= K \otimes K, & \Delta(K^{-1}) &= K^{-1} \otimes K^{-1}, \\ s(K) &= K^{-1}, & \epsilon(H) &= 1. \end{aligned} \quad (49)$$

11.3. R -матрица. Напомню, что алгебра Хопфа A называется *квазитреугольной*, если она снабжена *универсальной R -матрицей* R , которая является обратимым элементом в $A^{\otimes 2} = A \otimes A$, удовлетворяющим следующим трем условиям:

$$P \circ \Delta(a) = R\Delta(a)R^{-1} \quad \text{для любых } a \in A \quad (50)$$

$$(\Delta \otimes \text{id}_A)(R) = R_{13}R_{23} \quad (51)$$

$$(\text{id}_A \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}. \quad (52)$$

Здесь P — гомоморфизм перестановки $a \otimes b \mapsto (-1)^{\deg a \deg b} b \otimes a : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$, $R_{12} = R \otimes 1 \in A^{\otimes 3}$, $R_{13} = (\text{id} \otimes P)(R_{12})$, $R_{23} = 1 \otimes R$.

Известно, что квантовая супергруппа $U_qgl(1|1)$ квазитреугольна с универсальной R -матрицей

$$R = (1 + (q - q^{-1})(X \otimes Y)(K \otimes K^{-1})) q^{-E \otimes G - G \otimes E}. \quad (53)$$

Каждая квазитреугольная супералгебра Хопфа имеет единственный элемент

$$u = \sum_i (-1)^{\deg \alpha_i \deg \beta_i} s(\beta_i) \alpha_i,$$

где $R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$. В $U_qgl(1|1)$,

$$u = q^{2EG} (1 + (q - q^{-1})K Y X).$$

Тогда

$$s(u) = q^{2EG} (1 - (q - q^{-1})K^{-1} X Y)$$

(ср. [16] и [14]).

Напомним, что универсальный твист квазитреугольной супералгебры Хопфа A — это элемент $v \in A$, такой что $v^2 = us(u)$. В $U_qgl(1|1)$ это означает, что

$$v^2 = us(u) = q^{4EG} (1 + (q - q^{-1})(K Y X - K^{-1} X Y))$$

(ср. [16] и [14]). Легко проверить, что это уравнение в $U_qgl(1|1)$ имеет решение

$$v = q^{2EG} (K - (q - q^{-1}) X Y).$$

11.4. (1|1)-мерные неприводимые представления. Под $U_qgl(1|1)$ -модулем (размерности $(p|q)$) мы понимаем векторное суперпространство V размерности $(p|q)$, снабженное гомоморфизмом $U_qgl(1|1)$ в супералгебру эндоморфизмов суперпространства V (например, в $gl(p|q)$).

Предполагается, что этот гомоморфизм согласован с \mathbb{Z}_2 -градуировкой суперструктуры. В частности, образы бозонных E и G отображают бозоны в бозоны и фермионы в фермионы, в то время как образы фермионов X и Y отображают бозоны в фермионы и фермионы в бозоны.

Напомню, что модуль называется *циклическим*, если он порожден, как модуль, одним вектором, и *неприводимым*, если он не имеет собственного подмодуля.

Имеется два семейства неприводимых (1|1)-мерных $U_qgl(1|1)$ -модулей. В каждом из них модули параметризованы двумя параметрами, которые обозначаются j и J и пробегают $\mathbb{C} \setminus \{\pi n \sqrt{-1}/2h : n \in \mathbb{Z}\}$ и \mathbb{C} соответственно.

Модуль из первого семейства, соответствующий паре (j, J) , описывается следующими формулами:

$$(j, J)_+ : U_qgl(1|1) \rightarrow gl(1|1) : \begin{aligned} E &\mapsto \begin{pmatrix} 2j & 0 \\ 0 & 2j \end{pmatrix}, & G &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{J-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{J+1}{2} \end{pmatrix}, \\ X &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{q^{2j}-q^{-2j}}{q-q^{-1}} & 0 \end{pmatrix}, & Y &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{54}$$

Напомню, что $\frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ обозначается через $[n]_q$ и называется *квантовым n* . Значит, $(j, J)_+ : X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [2j]_q & 0 \end{pmatrix}$.

Стандартные базисные векторы в $\mathbb{C}^{1|1}$ обозначаются через e_0 (бозон) и e_1 (фермион). На эти векторы образующие алгебры $U_qgl(1|1)$ действуют

посредством $(t, w)_+$ следующим образом:

$$Ee_0 = 2je_0, \quad Ee_1 = 2je_1, \quad (55)$$

$$Ge_0 = \frac{J-1}{2}e_0, \quad Ge_1 = \frac{J+1}{2}e_1, \quad (56)$$

$$Xe_0 = [2j]_q e_1, \quad Xe_1 = 0, \quad (57)$$

$$Ye_0 = 0, \quad Ye_1 = e_0. \quad (58)$$

Легко показать, что $u \in U_q gl(1|1)$ (см. п. 11.2) действует в $(j, J)_+$ как умножение на $q^{2j(J+1)}$, а v — как умножение на q^{2jJ} . Значит, $v^{-1}u$ действует как умножение на q^{2j} .

Другое семейство неприводимых $U_q gl(1|1)$ -модулей, обозначаемых $(j, J)_-$, получается из модулей $(j, J)_+$ заменой бозонных подпространств на фермионные и наоборот. Мы также меняем знаки параметров, чтобы заранее подготовить 11.5.А.

$$(j, J)_- : U_q gl(1|1) \rightarrow gl(1|1) : \begin{aligned} E &\mapsto \begin{pmatrix} -2j & 0 \\ 0 & -2j \end{pmatrix}, & G &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{-J+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-J-1}{2} \end{pmatrix}, \\ X &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -[2j]_q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (59)$$

Оператор $u \in U_q gl(1|1)$ действует в $(j, J)_-$ как умножение на $q^{2j(J-1)}$, а v — как умножение на q^{2jJ} , и, таким образом, $v^{-1}u$ действует как умножение на q^{-2j} .

11.4.А. Классификация неприводимых представлений размерности $(1|1)$.

Неприводимый $U_q gl(1|1)$ -модуль размерности $(1|1)$ изоморфен модулю одного из семейств (54), (59). Ни один из модулей одного семейства не эквивалентен никакому модулю из другого.

11.5. Двойственность. Напомню, что для конечномерного A -модуля V , где A — супералгебра Хопфа над полем k , двойственное векторное пространство $V^\vee = \text{Hom}_k(V, k)$ снабжается структурой A -модуля по формуле $(Lc)(v) = c((-1)^{\deg L \deg c} c_s(L)(v))$, где $L \in A$, $c \in V^\vee$, $v \in V$ и s — антипод A . Это представление называется **двойственным** представлению V .

11.5.А. Двойственные $(1|1)$ -мерные модули. Модули $(j, J)_+$ и $(j, J)_-$ двойственны друг другу. Имеется канонический изоморфизм $(j, J)_+^\vee \rightarrow (j, J)_-$, который описывается формулами: $e^0 \mapsto e_0$, $e^1 \mapsto q^{2j}e_1$, где e^i — образующая модуля $(j, J)_+^\vee$ из базиса супердвойственного стандартному базису e_0, e_1 модуля $(j, J)_+$, она определяется равенством $e^i(e_j) = (-1)^{ij}\delta_j^i$.

Двойственность позволяет определить различные спаривания и коспаривания (ср. [16]). Во-первых, имеется очевидное спаривание

$$\curvearrowright : (j, J)_- \times (j, J)_+ \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x(y). \quad (60)$$

Здесь мы отождествляем $(j, J)_-$ с $((j, J)_+)^{\vee}$ с помощью изоморфизма 11.5.А. Это спаривание действует следующим образом:

$$\curvearrowright : (e_a, e_b) \mapsto (-1)^a q^{-2ja} \delta_{ab}.$$

Еще одно спаривание получается из этого „квантовой супертранспозицией“:

$$\curvearrowleft : (j, J)_+ \times (j, J)_- \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto (-1)^{\deg x \deg y} y(v^{-1}ux). \quad (61)$$

Множитель $(-1)^{\deg x \deg y}$ появляется здесь из-за перестановки x и y (это вклад суперматематики). На базисных векторах спаривание действует следующим образом:

$$\curvearrowleft : (e_a, e_b) \mapsto q^{2j(1-a)} \delta_{ab}.$$

Имеются очевидное (супер) коспаривание

$$\curvearrowright : \mathbb{C} \rightarrow (j, J)_+ \otimes (j, J)_- : 1 \mapsto e_0 \otimes e_0 - e_1 \otimes q^{2j} e_1, \quad (62)$$

и „квантово супертранспонированное“ коспаривание

$$\begin{aligned} \curvearrowleft : \mathbb{C} \rightarrow (j, J)_- \otimes (j, J)_+ : \\ 1 \mapsto \sum_{a=0}^1 (-1)^a e_a \otimes (u^{-1}v e_a) = q^{-2j} e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1. \end{aligned} \quad (63)$$

11.6. Тензорное произведение $(i, I)_+ \otimes (j, J)_+$.

11.6.А. Лемма. Действие образующих. *Образующие E, G, X, Y супералгебры $U_q gl(1|1)$ действуют в $(i, I)_+ \otimes (j, J)_+$ следующим образом:*

$$\begin{aligned} E : \quad & e_0 \otimes e_0 \mapsto 2(i+j)(e_0 \otimes e_0), \\ & e_1 \otimes e_1 \mapsto 2(i+j)(e_1 \otimes e_1), \\ & e_0 \otimes e_1 \mapsto 2(i+j)(e_0 \otimes e_1), \\ & e_1 \otimes e_0 \mapsto 2(i+j)(e_1 \otimes e_0), \\ X : \quad & e_0 \otimes e_0 \mapsto [2j]_q(e_0 \otimes e_1) + q^{-2j}[2i]_q(e_1 \otimes e_0) \\ & e_1 \otimes e_1 \mapsto 0, \\ & e_0 \otimes e_1 \mapsto q^{-2j}[2i]_q(e_1 \otimes e_1), \\ & e_1 \otimes e_0 \mapsto -[2j]_q(e_1 \otimes e_1), \\ G : \quad & e_0 \otimes e_0 \mapsto \frac{I+J-2}{2}(e_0 \otimes e_0), \\ & e_1 \otimes e_1 \mapsto \frac{I+J+2}{2}(e_1 \otimes e_1), \\ & e_0 \otimes e_1 \mapsto \frac{I+J}{2}(e_0 \otimes e_1), \\ & e_1 \otimes e_0 \mapsto \frac{I+J}{2}(e_1 \otimes e_0), \\ & e_0 \otimes e_0 \mapsto 0, \\ Y : \quad & e_1 \otimes e_1 \mapsto (e_0 \otimes e_1) - q^{2i} e_1 \otimes e_0, \\ & e_0 \otimes e_1 \mapsto q^{2i}(e_0 \otimes e_0), \\ & e_1 \otimes e_0 \mapsto e_0 \otimes e_0. \end{aligned} \quad (64)$$

Доказательство. Напомним, что действие алгебры $U_qgl(1|1)$ в тензорном произведении определяется с помощью копроизведения $\Delta : U_qgl(1|1) \rightarrow U_qgl(1|1) \otimes U_qgl(1|1)$. Следующие формулы легко проверяются с помощью (46). •

11.6.В. Разложение в общем случае. Пусть i, j и $k = i + j$ — комплексные числа, отличные от $\pi n\sqrt{-1}/2h$, где $n \in \mathbb{Z}$. Пусть I, J — произвольные комплексные числа. Тогда произведение $(i, I)_+ \otimes (j, J)_+$ изоморфно

$$(i + j, I + J - 1)_+ \oplus (-i - j, -I - J - 1)_-$$

Имеется изоморфизм

$$(i + j, I + J - 1)_+ \oplus (-i - j, -I - J - 1)_- \rightarrow (i, I)_+ \otimes (j, J)_+$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{[2j]_q}{[2i+2j]_q} & 0 & 1 \\ 0 & q^{-2j} \frac{[2i]_q}{[2i+2j]_q} & 0 & -q^{2i} \end{pmatrix}$$

относительно базисов $\{(e_0, 0), (e_1, 0), (0, e_0), (0, e_1)\}$ в $(i + j, I + J - 1)_+ \oplus (-i - j, -I - J - 1)_-$ и $\{e_0 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0\}$ в $(i, I)_+ \otimes (j, J)_+$.

Доказательство. Рассмотрим подмодуль, порожденный вектором $e_0 \otimes e_0$. Так как $E(e_0 \otimes e_0) = 2(i + j)(e_0 \otimes e_0)$ и $i + j \not\equiv 0 \pmod{\pi\sqrt{-1}/2h}$, то этот модуль является циклическим $(1|1)$ -мерным представлением. Так как $Y(e_0 \otimes e_0) = 0$ и $e_0 \otimes e_0$ — бозоны, то это — векторное представление. Так как $G(e_0 \otimes e_0) = (\frac{I+J}{2} - 1)(e_0 \otimes e_0)$, то это $(i + j, I + J - 1)_+$. В качестве базисных векторов возьмем $e_0 \otimes e_0$ и $X(1/[2i + 2j]_q)(e_0 \otimes e_0) = [2j]_q/[2i + 2j]_q(e_0 \otimes e_1) + q^{-2j}[2i]_q/[2i + 2j]_q(e_1 \otimes e_0)$.

Теперь рассмотрим подмодуль, порожденный $e_1 \otimes e_1$. Так как $E(e_1 \otimes e_1) = 2(i + j)(e_1 \otimes e_1)$ и $i + j \not\equiv 0 \pmod{\pi\sqrt{-1}/2h}$, то это — циклическое $(1|1)$ -мерное представление. Так как $X(e_1 \otimes e_1) = 0$ и $e_1 \otimes e_1$ — бозон, то это — ковекторное представление. Так как $G(e_1 \otimes e_1) = (\frac{I+J}{2} + 1)(e_1 \otimes e_1)$ и $(j, J)_-(G)(e_0) = (\frac{-J+1}{2})e_0$ (см. (59)), то это $(-i - j, -I - J - 1)_-$. Возьмем $e_1 \otimes e_1$ и $Y(e_1 \otimes e_1) = e_0 \otimes e_1 - q^{2i}(e_1 \otimes e_0)$ в качестве его базиса. •

11.6.С. В представлении $(i, I)_+ \otimes (j, J)_+$ с базисом $e_0 \otimes e_0, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1$, R -матрица имеет вид

$$q^{-iJ-jI} \begin{pmatrix} q^{i+j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{j-i} & 0 & 0 \\ 0 & q^{i-j}(q^{2i} - q^{-2i}) & q^{i-j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-i-j} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Напомню (см. (53)), что универсальная R -матрица имеет вид

$$R = (1 + (q - q^{-1})(X \otimes Y)(K \otimes K^{-1}))q^{-E \otimes G - G \otimes E}.$$

Ясно, что $q^{-E \otimes G - G \otimes E}$ имеет вид

$$q^{-iJ-jI} \begin{pmatrix} q^{i+j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{j-i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{i-j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-i-j} \end{pmatrix}.$$

Так как $Xe_1 = 0$ и $Ye_0 = 0$, то из всех базисных векторов только $e_0 \otimes e_1$ не аннулируется оператором $X \otimes Y$. Далее, $q^{-E \otimes G - G \otimes E}(e_0 \otimes e_1) = q^{-iJ-jI}q^{j-i}(e_0 \otimes e_1)$ и

$$(X \otimes Y)(e_0 \otimes e_1) = [2i]_q(e_1 \otimes e_0),$$

таким образом,

$$\begin{aligned} & (q - q^{-1})(X \otimes Y)(K \otimes K^{-1})q^{-E \otimes G - G \otimes E}(e_0 \otimes e_1) \\ &= q^{-iJ-jI}q^{i-j}(q^{2i} - q^{-2i})(e_1 \otimes e_0). \end{aligned}$$

Все это приводит к требуемой формуле. •

R -матрица будет всегда использоваться в композиции с оператором супертранспозиции

$$P : (i, I)_+ \otimes (j, J)_+ \rightarrow (j, J)_+ \otimes (i, I)_+$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Здесь -1 в правом нижнем углу стоит ввиду суперправила: транспозиция переставляет два фермиона e_1 и e_1 в $e_1 \otimes e_1$ и фермионы косоперестановочны.)

$$\begin{aligned} P \circ R &= q^{-iJ-jI} \begin{pmatrix} q^{i+j} & 0 & 0 & 0 & q^{i-j}(q^{2i} - q^{-2i}) & q^{i-j} & 0 \\ 0 & q^{j-i} & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-i-j} & & & \end{pmatrix} \\ &= q^{-iJ-jI-i-j} \begin{pmatrix} q^{2i+2j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{4i} - 1 & q^{2i} & 0 \\ 0 & q^{2j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (65)$$

Аналогично можно вычислить соответствующие объекты, связанные с тензорными произведениями $(i, I)_- \otimes (j, J)_-$, $(i, I)_+ \otimes (j, J)_-$ и $(i, I)_- \otimes (j, J)_+$.

11.7. Подалгебра без q . Рассмотрим суперподкольцо U^1 в $U_q gl(1|1)$, порожденное бозонами $K = q^E$, K^{-1} , $F = 2G$ и фермионами $Z = (q - q^{-1})X$, Y , см. 11.2. Это — супералгебра над \mathbb{Z} , определенная соотношениями

$$\begin{aligned} \{Z, Y\} &= K - K^{-1}, \\ Z^2 &= Y^2 = 0, \\ [K, Z] &= 0, \quad [K, Y] = 0, \\ [F, Z] &= 2Z, \quad [F, Y] = -2Y. \end{aligned} \tag{66}$$

Копроизведение в $U_q gl(1|1)$ индуцирует в U^1 копроизведение

$$\begin{aligned} \Delta(K) &= K \otimes K, \\ \Delta(K^{-1}) &= K^{-1} \otimes K^{-1}, \\ \Delta : U^1 \rightarrow U^1 \otimes U^1 : \quad \Delta(F) &= 1 \otimes F + F \otimes 1, \\ \Delta(Z) &= Z \otimes K^{-1} + 1 \otimes Z, \\ \Delta(Y) &= Y \otimes 1 + K \otimes Y. \end{aligned} \tag{67}$$

U^1 имеет коединицу

$$\begin{aligned} \epsilon : U^1 \rightarrow \mathbb{Z} : \quad \epsilon(F) &= \epsilon(Y) = \epsilon(Z) = 0, \\ \epsilon(K) &= \epsilon(K^{-1}) = 1 \end{aligned} \tag{68}$$

и антипод

$$\begin{aligned} s(K) &= K^{-1}, \\ s : U^1 \rightarrow U^1 : \quad s(F) &= -F, \\ s(Z) &= -ZK, \\ s(Y) &= -YK^{-1}, \end{aligned} \tag{69}$$

так что U^1 является (супер)алгеброй Хопфа над \mathbb{Z} .

11.8. Неприводимые представления алгебры U^1 . Пусть

$$P = (B, M, W, M \times W \rightarrow M)$$

есть 1-палитра (см. п. 2.8). Другими словами, пусть B — коммутативное кольцо, M — подгруппа мультипликативной группы кольца B и W — подгруппа аддитивной группы кольца B , снабженная (билинейным) спариванием $M \times W \rightarrow M : (m, w) \mapsto m^w$, таким что $1 \in W$ и $m^1 = m$ для каждого $m \in M$.

Для $t \in M$, $t^4 \neq 1$ и $T \in W$ мы рассмотрим действие U^1 на $B^{(1|1)}$, определенное следующим образом:

$$\begin{aligned} K &\mapsto \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}, & F &\mapsto \begin{pmatrix} T-1 & 0 \\ 0 & T+1 \end{pmatrix} \\ Y &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & Z &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t^2 - t^{-2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (70)$$

Это — неприводимое представление. Обозначим его через $U(t, T)_+$. Двойственное представление — это действие, определенное в том же пространстве следующим образом:

$$\begin{aligned} K &\mapsto \begin{pmatrix} t^{-2} & 0 \\ 0 & t^{-2} \end{pmatrix}, & F &\mapsto \begin{pmatrix} -T+1 & 0 \\ 0 & -T-1 \end{pmatrix} \\ Y &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & Z &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & t^{-2} - t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (71)$$

Оно обозначается символом $U(t, T)_-$.

11.8.A. Двойственность. Модули $(t, T)_+$ и $(t, T)_-$ двойственны друг другу. Имеется канонический изоморфизм $(t, T)_+^{\vee} \rightarrow (t, T)_-$, который задается формулами: $e^0 \mapsto e_0$, $e^1 \mapsto t^2 e_1$, где e^i — образующая $(t, T)_+^{\vee}$ из базиса, супердвойственного стандартному базису e_0, e_1 в $(t, T)_+$, она определяется соотношением $e^i(e_j) = (-1)^{ij} \delta_j^i$.

11.8.B. Разложение модуля $(u, U)_+ \otimes_B (v, V)_+$. Пусть u, v и $t = uv$ принадлежат $M \setminus \{t \in M \mid t^4 = 1\}$ и $t^2 - t^{-2}$ обратим в B . Пусть $U, V \in W$. Тогда модуль $(u, U)_+ \otimes (v, V)_+$ изоморфен $(uv, U+V-1)_+ \oplus (u^{-1}v^{-1}, -U-V-1)_-$. Имеется изоморфизм

$$(t, U+V-1)_+ \oplus (t^{-1}, -U-V-1)_- \rightarrow (u, U)_+ \otimes (v, V)_+$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} t^2 - t^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & v^2 - v^{-2} & 0 & 1 \\ 0 & v^{-2}(u^2 - u^{-2}) & 0 & -u^2 \end{pmatrix}$$

относительно базисов

$$\{(e_0, 0), (e_1, 0), (0, e_0), (0, e_1)\}$$

B -модуля

$$(t, U+V-1)_+ \oplus (t^{-1}, -U-V-1)_-$$

и

$$\{e_0 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0\}$$

в

$$(u, U)_+ \otimes_B (v, V)_+.$$

11.8.C. Разложение модуля $(u, U)_- \otimes_B (v, V)_-$. Пусть u, v и $t = uv$ принадлежат $M \setminus \{t \in M \mid t^4 = 1\}$ и $t^2 - t^{-2}$ обратим в B . Пусть $U, V \in W$. Тогда модуль $(u, U)_- \otimes_B (v, V)_-$ изоморфен $(t^{-1}, -U - V - 1)_+ \oplus (t, U + V - 1)_-$. Имеется изоморфизм

$$(t^{-1}, -U - V - 1)_+ \oplus (t, U + V - 1)_- \rightarrow (u, U)_- \otimes_B (v, V)_-$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^2 - t^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^2(u^2 - u^{-2}) & 0 & u^{-2} \\ 0 & -v^2 + v^{-2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

относительно базисов

$$\{(e_0, 0), (e_1, 0), (0, e_0), (0, e_1)\}$$

в B -модуле

$$(t^{-1}, -U - V - 1)_+ \oplus (t, U + V - 1)_-$$

и

$$\{e_0 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0\}$$

в

$$(u, U)_- \otimes_B (v, V)_-.$$

11.8.D. Разложение модуля $(u, U)_+ \otimes_B (v, V)_-$. Пусть u, v и $t = uv^{-1}$ принадлежат $M \setminus \{t \in M \mid t^4 = 1\}$ и $t^2 - t^{-2}$ обратим в B . Пусть $U, V \in W$. Тогда модуль $(u, U)_+ \otimes_B (v, V)_-$ изоморфен $(t, U - V + 1)_+ \oplus (t^{-1}, V - U + 1)_-$. Имеется изоморфизм

$$(t, U - V + 1)_+ \oplus (t^{-1}, V - U + 1)_- \rightarrow (u, U)_+ \otimes_B (v, V)_-$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v^2 - v^{-2} & 0 \\ -u^2 & 0 & -v^2(u^2 - u^{-2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 - t^{-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

относительно базисов

$$\{(e_0, 0), (e_1, 0), (0, e_0), (0, e_1)\}$$

в B -модуле

$$(t^{-1}, V - U - 1)_+ \oplus (t, U - V - 1)_-$$

и

$$\{e_0 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0\}$$

в

$$(u, U)_+ \otimes (v, V)_-.$$

§12. Приложение 2. Представления квантовой $sl(2)$ в $\sqrt{-1}$

12.1. Алгебра $sl(2)$. Напомню, что алгебра Ли $sl(2)$ порождается следующими тремя элементами:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (72)$$

подчиненными соотношениям

$$[X^+, X^-] = H, \quad [H, X^+] = 2X^+, \quad [H, X^-] = -2X^-. \quad (73)$$

В действительности эти соотношения определяют $sl(2)$.

12.2. Квантование. Универсальная обертывающая алгебра $Usl(2)$ допускает деформацию, производящую квантовую алгебру $U_qsl(2)$. Только первое соотношение из (73) меняется: его правая часть H заменяется на „квантовую H “, т.е. на $\frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}$, где $q = e^h$. Чтобы придать смысл этому неалгебраическому выражению, к этой алгебре присоединяют формальные степенные ряды от h . Обозначим

$$q^H = e^{hH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n H^n}{n!}$$

символом K . Таким образом, деформированная система соотношений имеет вид

$$\begin{aligned} K = q^H, \quad [X^+, X^-] &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ [H, X^+] = 2X^+, \quad [H, X^-] &= -2X^-. \end{aligned} \quad (74)$$

Алгебра A над полем $\mathbb{C}[[h]]$ формальных степенных рядов от h , состоящая из формальных рядов от h с коэффициентами, порожденными операторами

H , X^+ и X^- , удовлетворяющими (74), может быть снабжена копроизведением

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, \\ \Delta : A \rightarrow A \otimes A : \quad \Delta(X^+) &= X^+ \otimes 1 + K \otimes X^+, \\ \Delta(X^-) &= X^- \otimes K^{-1} + 1 \otimes X^-, \end{aligned} \quad (75)$$

коединицей

$$\begin{aligned} \epsilon : A \rightarrow \mathbb{C}[[h]] : \quad \epsilon(K) &= \epsilon(K^{-1}) = 1, \\ \epsilon(H) &= \epsilon(X^+) = \epsilon(X^-) = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

и антиподом

$$\begin{aligned} s(H) &= -H, \\ s : A \rightarrow A : \quad s(X^+) &= -K^{-1}X^+, \\ s(X^-) &= -X^-K, \end{aligned} \quad (77)$$

и таким образом становится алгеброй Хопфа. Она обозначается $U_qsl(2)$.

12.3. Упрощение в квадратном корне из -1 . Рассмотрим $U_qsl(2)$ при специальном значении $q = \sqrt{-1}$, соответствующем $h = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}$. Для того, чтобы сократить формулы, но разрешить употребление буквы i для других целей, мы обозначим $\sqrt{-1}$ через i и $\exp(a\frac{\pi\sqrt{-1}}{2})$ через i^a .

В случае $q = i$ для упрощения соотношений образующие можно изменить. Действительно, пусть

$$X = X^-, \quad Y = 2X^+\sqrt{-1}.$$

Тогда соотношения

$$\begin{aligned} K &= i^H, \quad [Y, X] = K - K^{-1}, \\ [H, X] &= -2X, \quad [H, Y] = 2Y, \text{ откуда } KX = -XK, \quad KY = -YK \end{aligned} \quad (78)$$

определяют алгебру $U_i sl(2)$. Это алгебра Хопфа с копроизведением, заданном формулой

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, \\ \Delta(K) &= K \otimes K, \\ \Delta : U_i sl(2) \rightarrow U_i sl(2) \otimes U_i sl(2) : \quad \Delta(K^{-1}) &= K^{-1} \otimes K^{-1}, \\ \Delta(X) &= X \otimes K^{-1} + 1 \otimes X, \\ \Delta(Y) &= Y \otimes 1 + K \otimes Y, \end{aligned} \quad (79)$$

коединицей

$$\begin{aligned} \epsilon : U_i sl(2) \rightarrow \mathbb{C}[[h]] : \quad \epsilon(K) &= \epsilon(K^{-1}) = 1, \\ \epsilon(H) &= \epsilon(X) = \epsilon(Y) = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

и антиподом

$$\begin{aligned}
 s(H) &= -H, \\
 s(K) &= K^{-1}, \\
 s : U_i sl(2) \rightarrow U_i sl(2) : \quad s(K^{-1}) &= K, \\
 s(X) &= -XK (= KX), \\
 s(Y) &= -K^{-1}Y (= YK^{-1}).
 \end{aligned} \tag{81}$$

12.4. Семейство модулей размерности 2. Соотношения (78) удовлетворяются матрицами

$$\begin{aligned}
 H &= \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}, & K &= \begin{pmatrix} i^{a+1} & 0 \\ 0 & -i^{a+1} \end{pmatrix}, \\
 X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i^{a+1} & -i^{-a-1} & 0 \end{pmatrix}, & Y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{82}$$

где $a \in \mathbb{C}$.

Пространство этого представления — двумерное векторное пространство над полем частных кольца формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[h]]$. Напомним, что это поле состоит из формальных рядов Лорана, т.е. $\mathbb{C}[[h]][[h^{-1}]]$.

Обозначим это представление $U_i sl(2)$ через $I(a)$. Векторы стандартного базиса модуля $(\mathbb{C}[[h]][[h^{-1}]])^2$ обозначаются через e_0, e_1 . На этих векторах образующие алгебры $U_i sl(2)$ действуют с помощью $I(a)$ так:

$$He_0 = (a+1)e_0, \quad He_1 = (a-1)e_1, \tag{83}$$

$$Ke_0 = i^{a+1}e_0, \quad Ke_1 = -i^{a+1}e_1, \tag{84}$$

$$Xe_0 = (i^{a+1} - i^{-a-1})e_1, \quad Xe_1 = 0, \tag{85}$$

$$Ye_0 = 0, \quad Ye_1 = e_0. \tag{86}$$

Это представление неприводимо, кроме случая, когда $i^{a+1} - i^{-a-1} = 0$, т.е. когда a — нечетное целое.

12.5. Двойственность. Напомним, что для любого конечномерного представления V алгебры Хопфа A над полем k двойственное пространство $V^\vee = \text{Hom}_k(V, k)$ снабжено структурой A -модуля по формуле $(Tc)(v) = c(s(T)(v))$, где $T \in A$, $c \in V^\vee$, $v \in V$ и s — антипод в A . Это представление называется *двойственным* к V .

12.5.A. Двойственность между $I(a)$ и $I(-a)$. Модули $I(a)$ и $I(-a)$ двойственны друг другу. Имеется изоморфизм

$$f : I(a)^\vee \rightarrow I(-a),$$

который описывается формулами

$$f : e^0 \mapsto e_1, \quad f : e^1 \mapsto i^{a-1} e_0,$$

где e^i — образующая $I(a)^\vee$ из базиса, двойственного стандартному базису e_0, e_1 в $I(a)$, она определяется соотношением $e^i(e_j) = \delta_j^i$.

12.5.A.1. Замечание. Двойственный модуль $I(a)^\vee$ можно непрерывно продеформировать в $I(a)$ семейством модулей $I(x)$: комплексные числа $-a$ и a можно соединить путем в $\mathbb{C} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)$.

12.6. R -матрица. Известно, что квантовая группа $U_q sl(2)$ является квазитреугольной с универсальной R -матрицей

$$R = q^{H \otimes H/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{[n]_q!} ((q - q^{-1})X^- \otimes X^+)^n \quad (87)$$

Во всех представлениях алгебры $U_q sl(2)$, рассмотренных в этой статье, $(X^+)^2 = (X^-)^2 = 0$ и $q = i$. Факторизация по этим соотношениям приводит R -матрицу к виду

$$R = i^{H \otimes H/2} (1 + X \otimes Y). \quad (88)$$

12.6.A. В представлении $I(a) \otimes I(b)$ с базисом $e_0 \otimes e_0, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1$, R -матрица имеет вид

$$i^{\frac{ab+1}{2}} \begin{pmatrix} i^{\frac{a+b}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^{\frac{-a+b}{2}+1} & 0 & 0 \\ 0 & i^{\frac{a-b}{2}}(i^a + i^{-a}) & i^{\frac{a-b}{2}-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i^{\frac{-a-b}{2}} \end{pmatrix}.$$

R -матрица всегда будет использоваться в композиции с оператором транспонирования

$$P : I(a) \otimes I(b) \rightarrow I(b) \otimes I(a)$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Композиция имеет вид

$$P \circ R = i^{\frac{ab+1}{2}} \begin{pmatrix} i^{\frac{a+b}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^{\frac{a-b}{2}}(i^a + i^{-a}) & i^{\frac{a-b}{2}-1} & 0 \\ 0 & i^{\frac{-a+b}{2}+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i^{\frac{-a-b}{2}} \end{pmatrix}.$$

12.7. Тензорное произведение $I(a) \otimes I(b)$.

12.7.A. Действие образующих. Пусть a, b — комплексные числа. Образующие H, K, X и Y действуют в $I(a) \otimes I(b)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H : \quad & e_0 \otimes e_0 \mapsto (a + b + 2)(e_0 \otimes e_0), \\
 & e_1 \otimes e_1 \mapsto (a + b - 2)(e_1 \otimes e_1), \\
 & e_0 \otimes e_1 \mapsto (a + b)(e_0 \otimes e_1), \\
 & e_1 \otimes e_0 \mapsto (a + b)(e_1 \otimes e_0), \\
 K : \quad & e_0 \otimes e_0 \mapsto -i^{a+b}(e_0 \otimes e_0), \\
 & e_1 \otimes e_1 \mapsto -i^{a+b}(e_1 \otimes e_1), \\
 & e_0 \otimes e_1 \mapsto i^{a+b}(e_0 \otimes e_1), \\
 & e_1 \otimes e_0 \mapsto i^{a+b}(e_1 \otimes e_0), \\
 X : \quad & e_0 \otimes e_0 \mapsto i(i^b + i^{-b})(e_0 \otimes e_1) + (i^a + i^{-a})i^{-b}(e_1 \otimes e_0), \\
 & e_1 \otimes e_1 \mapsto 0, \\
 & e_0 \otimes e_1 \mapsto (-i^a - i^{-a})i^{-b}(e_1 \otimes e_1), \\
 & e_1 \otimes e_0 \mapsto i(i^b + i^{-b})(e_1 \otimes e_1), \\
 Y : \quad & e_0 \otimes e_0 \mapsto 0, \\
 & e_1 \otimes e_1 \mapsto e_0 \otimes e_1 - i^{a+1}e_1 \otimes e_0, \\
 & e_0 \otimes e_1 \mapsto i^{a+1}(e_0 \otimes e_0), \\
 & e_1 \otimes e_0 \mapsto e_0 \otimes e_0,
 \end{aligned} \tag{89}$$

Доказательство. Напомню, что действие алгебры $U_i sl(2)$ в тензорном произведении определяется с помощью копроизведения $\Delta : U_i sl(2) \rightarrow U_i sl(2) \otimes U_i sl(2)$. Эти формулы легко проверить с помощью (79). •

12.7.B. Разложение в общем случае. Пусть a и b — комплексные числа такие, что ни одно из чисел $a, b, a + b + 1$ не является нечетным целым. Тогда модуль $I(a) \otimes I(b)$ изоморфен $I(a + b + 1) \oplus I(a + b - 1)$. Имеется изоморфизм

$$I(a + b + 1) \oplus I(a + b - 1) \rightarrow I(a) \otimes I(b)$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix}
 i^{-a-b} - i^{a+b} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & i(i^b + i^{-b}) & 1 & 0 \\
 0 & i^{-b}(i^a + i^{-a}) & i^{a-1} & 0
 \end{pmatrix}$$

относительно базисов

$$\{(e_0, 0), (e_1, 0), (0, e_0), (0, e_1)\}$$

В

$$I(a + b + 1) \oplus I(a + b - 1)$$

и

$$\{e_0 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0\}$$

В

$$I(a) \otimes I(b).$$

Список литературы

- [1] Alexander J. W., *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), 275–306.
- [2] Blanchet C., Habegger N., Masbaum G., Vogel P., *Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket*, Topology **31** (1992), 685–699.
- [3] Conway J. H., *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967) (J. Leech, ed.), Pergamon Press, Oxford, 1970, pp. 329–358.
- [4] Deguchi T., Akutsu Y., *Colored vertex models, colored IRF models and invariants of trivalent colored graphs*, J. Phys. Soc. Japan **62** (1993), 19–35; *Multivariable invariants of colored links and related solvable models in statistical mechanics*, Thesis, Univ. Tokio, March 1992.
- [5] Fintushel R., Stern R., *Knots, links, and 4-manifolds*, Preprint, Differential Geometry dg-ga/9612014, 1996.
- [6] Kauffman L., *Map coloring, q-deformed spin-networks, and Turaev–Viro invariants for 3-manifolds*, Internat. J. Modern Phys. B **6** (1992), no. 11–12, 1765–1794.
- [7] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu., *Representations of the algebra $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, q-orthogonal polynomials and invariants of links*, Infinite-Dimensional Lie Algebras and Groups (Luminy–Marseille, 1988) (V. G. Kac, ed.), Adv. Ser. Math. Phys., vol. 7, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989, pp. 285–339.
- [8] Kauffman L., Saleur H., *Free fermions and the Alexander–Conway polynomial*, Comm. Math. Phys. **141** (1991), 293–327.
- [9] Kulish P. P., *Quantum Lie superalgebras and supergroups*, Problems of Modern Quantum Field Theory (Alushta, 1989) (A. A. Belavin, A. U. Klimyk, and A. B. Zamolodchikov, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 14–21.
- [10] Majid Shahn, Rodríguez-Plaza M. J., *Nonstandard quantum groups and superization*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 12, 7081–7097; Preprint q-alg/9506015, 13 June 1995.
- [11] Murakami Jun, *A state model for the multivariable Alexander polynomial*, Pacific J. Math. **157** (1993), 109–135.
- [12] Murakami Jun, *The multivariable Alexander polynomial and a one-parameter family of representations of $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ at $q^2 = -1$* , Quantum Groups (Leningrad, 1990), Lecture Notes in Math., vol. 1510, Springer, Berlin, 1992, pp. 350–353.
- [13] Rozansky L., Saleur H., *Quantum field theory for the multi-variable Alexander–Conway polynomial*, Nuclear Phys. B **376** (1992), 461–509.

- [14] Rozansky L., Saleur H., *S- and T-matrices for the super $U(1,1)$ WZW model. Application to surgery and 3-manifolds invariants based on the Alexander–Conway polynomial*, Nuclear Phys. B **389** (1993), 365–423.
- [15] Reshetikhin N. Yu., *Quantum supergroups*, Quantum Field Theory Statistical Mechanics, Quantum Groups and Topology (Coral Gables, FL, 1991), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992, pp. 264–282.
- [16] Reshetikhin N. Yu., Turaev V. G., *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 1–26.
- [17] Reshetikhin N. Yu., Turaev V. G., *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547–597.
- [18] Тураев В. Г., *Кручение Райдемайстера в теории узлов*, Успехи мат. наук **41** (1986), №1, 97–147.
- [19] Turaev V., *Topology of shadows*, Preprint, 1991.
- [20] Turaev V., *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, de Gruyter Stud. in Math., vol. 18, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
- [21] Turaev V., Viro O., *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology **31** (1992), 865–902.

Уппсальский университет

Поступило 10 января 2006 г.

Уппсала

Швеция

E-mail: oleg@math.uu.se

С.-Петербургское отделение

Математического института

им. В. А. Стеклова РАН

191023, Санкт-Петербург

наб. р. Фонтанки, 27

Россия