О. Я. Виро

КОМПАКТНАЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ЭКЗОТИКА С НЕБОЛЬШИМИ ГОМОЛОГИЯМИ

Строится бесконечное семейство гладких компактных односвязных четырехмерных многообразий с краем гомологическая сфера Пуанкаре и со вторым числом Бетти 2, которые гомеоморфны друг другу, но попарно недиффеоморфны. Строится бесконечное семейство сфер, вложенных в $CP^2 \# 2\overline{CP}^2$ с одной точкой негладкости каждая, переводящиеся друг в друга гомеоморфизмами объемлющего многообразия, гладкими на некоторых окрестностях этих сфер, но не переводящиеся друг в друга его диффеоморфизмами. Доказывается, что некоторые пары топологических логарифмических преобразований, которые, не меняя топологического типа многообразия $CP^2 \# 9\overline{CP}^2$, изменяют его дифференциально-топологический тип, сохраняют дифференциально-топологический тип многообразия $S^2 \times S^2$.

§ 1. Экзотические объекты

В этой статье слово *экзотические* означает *гомеоморфные, но не диффеоморфные*. Известно (со времени работ Мойса начала 50-х годов), что такого не бывает в размерностях <4. Хотя о существовании экзотических объектов в старших размерностях стало известно почти тогда же (экзотические сферы Милнора, середина 50-х годов), в размерности 4 это явление было открыто только в 80-е годы. Первые примеры четырехмерных экзотических многообразий были или некомпактные (экзотические $\mathbf{R}^4$, которых оказалось континуальное количество), или неодносвязные (экзотические $\mathbf{R}P^4$). Их построение и доказательство недиффеоморфности существенно опираются на эти свойства. В то же время специфические эффекты размерности 4 проявляются, по-видимому,

Ключевые слова: многообразия – гладкие, кусочно-линейные и топологические, экзотические многообразия. заузливания, поверхности Долгачева, логарифмические преобразования Кодаиры.

в наиболее чистом виде в случае замкнутых (т. е. компактных и без края) односвязных многообразий. Недавно появились примеры экзотики и такого сорта: Дональдсон [1, 2] доказал, что многие хорошо известные односвязные компактные комплексные алгебраические поверхности доставляют ее – некоторые из них гомеоморфны, но не диффеоморфны друг другу, некоторые гомеоморфны, но не диффеоморфны соответствующим связным суммам нескольких экземпляров комплексной проективной плоскости $\mathbf{C}P^2$, комплексной проективной плоскости с обращенной ориентацией $\overline{\mathbf{C}P}^2$, произведения $S^2 \times S^2$ и $K3$-поверхности.

Для гладких односвязных замкнутых четырехмерных многообразий естественной грубой мерой их величины и сложности служит двумерное число Бетти, т. е. ранг формы пересечения (эта форма полностью определяет топологический тип такого многообразия). Сейчас наименьшее известное значение двумерного числа Бетти для экзотических односвязных компактных многообразий равно 9: Котчик [3] доказал, что поверхность Барлоу, которая была построена Барлоу [4] в 1985 г. и гомеоморфна $\mathbf{C}P^2 \# 8\overline{\mathbf{C}P}^2$, недиффеоморфна $\mathbf{C}P^2 \# 8\overline{\mathbf{C}P}^2$. Для следующего значения существует бесконечное семейство гомеоморфных, но попарно недиффеоморфных компактных односвязных комплексных алгебраических поверхностей. Это поверхности Долгачева, гомеоморфные $\mathbf{C}P^2 \# 9\overline{\mathbf{C}P}^2$.

Экзотические четырехмерные объекты другого сорта, а именно заузливания, т. е. пары, состоящие из гладкого четырехмерного многообразия и его гладкого двумерного подмногообразия, были построены в работе Виро, Крека и Финашина [5]. Для любого $g \geqslant 10$ они построили бесконечное семейство гомеоморфных, но недиффеоморфных заузливаний в S^4 связной суммы $\#_g \mathbf{R}P^2$ g экземпляров вещественной проективной плоскости.

§ 2. Новая экзотика

В настоящей работе *не строятся* новые экзотические объекты двух типов, описанных выше (т. е. замкнутые многообразия и гладкие заузливания замкнутых поверхностей в замкнутых многообразиях). Строящиеся здесь экзотические объекты – это компактные односвязные четырехмерные многообразия с непустым краем,[1] заузливания поверхностей в четырехмерных многообразиях с краем и заузливания в замкнутых многообразиях, но с одной точкой негладкости, где поверхность вложена как конус над фиксированным узлом. Однако эти объекты имеют меньшие гомологии, чем объекты, обсуждавшиеся выше, и тесно связаны с ними. Они, быть может, позволят лучше понять феномен экзотичности.

Т е о р е м а 1. *Существует такое бесконечное семейство гладких односвязных компактных четырехмерных многообразий $V_{p,q}$ с целыми взаимно-простыми p, q, что:*

(i) *край многообразия $V_{p,q}$ гомеоморфен гомологической сфере Пуанкаре;*

(ii) *форма пересечений многообразия $V_{p,q}$ изоморфна $\langle +1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$;*

(iii) *если $p = r = 2$ и $q \neq s$, то многообразие $V_{p,q}$ недиффеоморфно $V_{r,s}$;*

(iv) *все $V_{p,q}$ гомеоморфны друг другу.*

Т е о р е м а 2. *Существует такое бесконечное семейство подмножеств S_p с целыми $p > 1$ многообразия $\mathbf{C}P^2 \# 2\overline{\mathbf{C}P}^2$, что:*

---

[1] П р и м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е. Р. Гомпф сообщил, что он построил семейство экзотических многообразий, содержащее многообразия $V_{p,q}$, строящиеся ниже. С. Акбулат прислал препринт с построением многообразий с краем, обладающих еще меньшими числами Бетти.

(i) S_p *гомеоморфно двумерной сфере* S^2*;*

(ii) S_p *только в одной точке не является гладким подмногообразием многообразия* $CP^2 \# 2\overline{CP}^2$;

(iii) *в своей особой точке* S_p *локально заузлено как конус над трилистником;*

(iv) S_p *имеет индекс самопересечения* -1*;*

(v) *для любых* p, q *существует гомеоморфизм многообразия* $CP^2 \# 2\overline{CP}^2$ *на себя, являющийся диффеоморфизмом на некоторой окрестности поверхности* S_p *и переводящий* S_p *в* S_q*;*

(vi) *для любых* $p \neq q$ *не существует диффеоморфизма многообразия* $CP^2 \# 2\overline{CP}^2$ *на себя, отображающего* S_p *в* S_q*;*

(vii) *дополнение открытой регулярной окрестности поверхности* S_p *в* $CP^2 \# \overline{CP}^2$ *диффеоморфно многообразию* $V_{2,2p-1}$ *теоремы 1.*

Теорема 1 будет доказана ниже в § 4, теорема 2 – в § 9.

Замечание. Удаление малого четырехмерного шара с центром в особой точке поверхности S_p дает очевидную переформулировку теоремы 2, в которой речь идет уже не о поверхностях с особенностями, а о гладких поверхностях, но зато в многообразии с краем.

§ 3. Топологические логарифмические преобразования

Упомянутые выше поверхности Долгачева получаются друг из друга (и, в частности, из $CP^2 \# 9\overline{CP}^2$) посредством конструкций, которые по природе своей принадлежат алгебраической геометрии. Эти конструкции называются *логарифмическими преобразованиями Кодаиры.* С топологической точки зрения (т. е. без учета комплексных алгебраических структур) это преобразование представляет собой переклеивание трубчатой окрестности некоторого двумерного тора, гладко вложенного в многообразие, которое подвергается преобразованию.

Рассмотрим эту топологическую версию логарифмического преобразования Кодаиры более тщательно. Пусть X – гладкое четырехмерное многообразие, T – его гладкое подмногообразие, гомеоморфное двумерному тору и имеющее тривиальное нормальное расслоение. Пусть U – трубчатая окрестность тора T. Фиксируем какую-нибудь тривиализацию

$$\theta : S^1 \times S^1 \times D^2 \to U$$

трубчатого расслоения $U \to T$. Пусть j, k, l, m – целые числа с $jm - kl = 1$. Обозначим через h диффеоморфизм трехмерного тора ∂U, определяемый формулой

$$h(\theta(x, y, z)) = \theta(x, y^j z^k, y^l z^m).$$

Обозначим через Y четырехмерное многообразие

$$(X \setminus \operatorname{Int} U) \underset{h}{\cup} U.$$

Оно называется результатом *топологического логарифмического преобразования* многообразия X *вдоль* T *кратности* m. Для определения многообразия Y с точностью до диффеоморфизма достаточно фиксировать X, T, θ, m, k и гомологический класс δ окружности $\theta(S^1 \times 1 \times 0)$ в T. Число k называется *дополнительной кратностью* и δ — *направлением* логарифмического преобразования.

Поверхности Долгачева делятся на семейства $D_{p,q}$, где p, q — натуральные взаимно-простые числа (имеются также семейства $D_{p,q}$ с не взаимно-простыми p, q, но они состоят из неодносвязных многообразий, и мы их рассматривать не будем). $D_{1,1}$-поверхности диффеоморфны $CP^2 \# 9\overline{CP}^2$. В $CP^2 \# 9\overline{CP}^2$ гомологический класс, имеющий в естественном базисе координаты (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), обладает нулевым индексом самопересечения и естественной реализацией посредством гладко вложенного тора. $D_{p,q}$-поверхности получаются из $CP^2 \# 9\overline{CP}^2$ в результате применения пар логарифмических преобразований кратностей p и q соответственно вдоль пары непересекающихся торов, изотопных этому тору. Как было доказано Фридманом и Морганом [6], если $p = r = 2$ и $s \neq q$, то никакая $D_{p,q}$-поверхность недиффеоморфна ни одной $D_{r,s}$-поверхности.

Если взять любое односвязное гладкое четырехмерное многообразие X с гладко вложенным тором T, имеющим в X односвязное дополнение и нулевой индекс самопересечения, то пара топологических логарифмических преобразований со взаимно-простыми кратностями p, q вдоль T и некоторого ненулевого сечения его трубчатой окрестности даст новое гладкое четырехмерное многообразие, являющееся односвязным. Варьируя дополнительные кратности и направления преобразований, можно добиться, чтобы результат этой пары преобразований оказался гомеоморфным X. В качестве X здесь можно взять четырехмерное многообразие с двумерным числом Бетти, значительно меньшим десяти. Действительно, в качестве X можно взять $S^2 \times S^2$ и $CP^2 \# \overline{CP}^2$ с двумерными числами Бетти 2. Однако неизвестно, приводит это к экзотике или нет. К сожалению, доказательства в случае поверхностей Долгачева существенно опираются на методы алгебраической геометрии и потому на тот факт, что это комплексные алгебраические поверхности. Для X с двумерным числом Бетти, меньшим десяти, такие преобразования не могут быть сделаны сохраняющими какую-либо комплексно-аналитическую структуру, и не видно никакого способа ввести такую структуру в результат преобразований.

Экзотические заузливания Виро—Крека—Финашина, упомянутые выше, тесно связаны с поверхностями Долгачева. Именно, они получаются как пары (пространство орбит, множество неподвижных точек) для некоторых антиголоморфных инволюций, действующих в поверхностях Долгачева. Появление этих инволюций объясняется тем, что логарифмические преобразования можно производить эквивариантно относительно стандартной инволюции комплексного сопряжения в $CP^2 \# 9\overline{CP}^2$. Соответствующее преобразование пары (пространство орбит, множество неподвижных точек) является конструкцией заузливания, предложенной Виро, Креком и Финашиным в [5]. Экзотические заузливания работы [5] получаются друг из друга посредством таких конструкций. Те же конструкции применимы и в значительно более простых ситуациях. Но, как и в случае многообразий, не хватает доказательства недиффеоморфности. Итак, мы имеем конструкции, которые по крайней мере иногда дают экзотические объекты. Эта работа возникла в результате попыток исследовать эффект этих конструкций в некоторых других случаях.

§ 4. Многообразия $V_{p,q}$

Все многообразия $V_{p,q}$ получаются из $V_{1,1}$ посредством пар топологических логарифмических преобразований. Поэтому для начала построим $V_{1,1}$. Это многообразие является регулярной окрестностью двумерного клеточного пространства K, которое представляет собой букет двумерной сферы S и тора R с двумя круговыми перепонками P и Q, натянутыми на меридиан и параллель тора R. Поверхности S и R гладко вложены в $V_{1,1}$ с индексами самопересечения $S \circ S = -1$ и $R \circ R = 0$. Они трансверсально пересекаются, притом ровно в одной точке. Перепонки P и Q также вложены гладко, имеют индексы -1 и пересекаются ровно в одной точке (принадлежащей их граничным окружностям), притом трансверсально. Они не пересекаются с S и пересекаются с R только по своим граничным окружностям. Описанные свойства определяют $V_{1,1}$ с точностью до диффеоморфизма. Это многообразие было построено Матумото [7] и Гийу и Mареном [8], Добавление D, с. 47. Они доказали, что $V_{1,1}$ допускает гладкое вложение в $\mathbf{C}P^2 \# 9\overline{\mathbf{C}P}^2$, при котором R отображается в один из стандартных представителей класса $(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Они доказали, кроме того, что замыкание дополнения образа этого вложения есть результат E_8-пламбинга и, значит, что край многообразия $V_{1,1}$ гомеоморфен гомологической сфере Пуанкаре.

Чтобы построить многообразие $V_{p,q}$, возьмем R и какое-нибудь ненулевое сечение R' его трубчатой окрестности и произведем пару топологических логарифмических преобразований многообразия $V_{1,1}$ вдоль R и R' кратностей p, q, дополнительных кратностей 1, 1 и с совпадающими в очевидном смысле направлениями.

Вложение $V_{1,1} \to \mathbf{C}P^2 \# 9\overline{\mathbf{C}P}^2$, построенное Матумото [7] и Гийу и Mареном [8], очевидно, дает вложение многообразия $V_{p,q}$ в простейшую $D_{p,q}$-поверхность. Замыкание дополнения образа этого вложения не зависит от p, q (это все тот же E_8-пламбинг). Следовательно, эти $D_{p,q}$-поверхности представляются в виде результата склеивания многообразий $V_{p,q}$ с постоянной частью, не зависящей от p, q. Как было доказано Буало и Оталем [9], любые два гомеоморфизма гомологической сферы Пуанкаре изотопны. Поэтому результат склеивания определяется с точностью до диффеоморфизма склеиваемыми многообразиями. Следовательно, утверждение (iii) теоремы 1 вытекает из известных упомянутых выше результатов о дифференциально-топологических типах поверхностей Долгачева.

Для завершения доказательства теоремы 1 заметим, что утверждение (ii) непосредственно вытекает из построения многообразия $V_{p,q}$ и утверждение (iv) вытекает из (ii), (i) и тривиальности фундаментальной группы многообразия $V_{p,q}$ в силу топологической классификации компактных односвязных четырехмерных многообразий с краем гомологическая сфера. Классификация таких многообразий содержится по существу в работе Фридмана [10] (см. Вожель [11] и Бойер [12]).

§ 5. Неэффективные топологические логарифмические преобразования

Известные результаты о поверхностях Долгачева и теорема 1 показывают, что иногда пара топологических логарифмических преобразований может изменить дифференциально-топологический тип четырехмерного многообразия, оставив его топологический тип прежним. Следующая теорема представляет собой результат противоположного направления.

Теорема 3. *Пусть T – тор, гладко вложенный в $S^2 \times S^2$, который получен добавлением тривиальной ручки к слою $S^2 \times \mathrm{pt}$, и пусть T' – ненулевое*

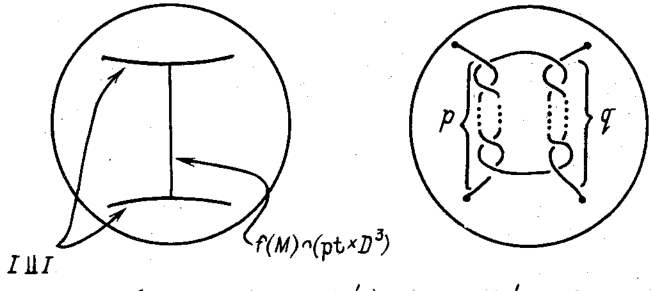

Рис. 1.

сечение его трубчатой окрестности. Для любых взаимно-простых p, q пусть Y есть результат пары топологических логарифмических преобразований многообразия $S^2 \times S^2$ вдоль T и T' с кратностями p и q, дополнительными кратностями 1 и 1 и направлениями вдоль ручки, которая была добавлена к $S^2 \times \mathrm{pt}$ для получения T. Тогда Y диффеоморфно $S^2 \times S^2$.

Отмечу, что та же пара топологических логарифмических преобразований изменяет дифференциально-топологические типы многообразий $\mathbf{C}P^2 \# 9\overline{\mathbf{C}P}^2$ и $V_{1,1}$, не меняя их топологических типов.

Теорема 3 обладает аналогом (см. ниже: теорема 4) для заузливаний, поскольку в ней все можно сделать инвариантным относительно инволюции, действующей как симметрия относительно плоскости в каждом сомножителе произведения $S^2 \times S^2$. Эту инволюцию можно интерпретировать как нетривиальный автоморфизм двулистного накрытия сферы S^4, разветвленного над стандартно вложенным тором. Таким образом, аналог теоремы 3 утверждает, что некоторые конструкции заузливания Виро–Крека–Финашина не меняют дифференциально-изотопического типа стандартно вложенного в S^4 тора. На самом деле частный случай теоремы 3 первоначально был получен как следствие теоремы 4. Приводимое ниже доказательство теоремы 3 опирается аналогичным образом на результат Мойшезона [16], на который мне любезно указал Р. Гомпф.

§ 6. Заузливание вдоль почти круговой кольцевой перепонки

Напомню теперь конструкцию заузливания из работы [5]. Пусть X – гладкое четырехмерное многообразие и F – его гладкое замкнутое двумерное подмногообразие. Пусть M – гладкая кольцевая перепонка на F в X, пересекающаяся с F только по своему краю и имеющая индекс 0. Другими словами, пусть M – гладкое двумерное подмногообразие многообразия X, гомеоморфное $S^1 \times I$ и обладающее в X такой регулярной окрестностью N, что существует диффеоморфизм $f: N \to S^1 \times D^3$, переводящий $N \cap F$ в $S^1 \times (I \amalg I)$, где $I \amalg I \subset D^3$ есть пара незаузленных и незацепленных отрезков. Фиксируем этот диффеоморфизм так, чтобы отрезки $I \amalg I$ составляли 0-связку[2] (т.е. чтобы каноническая проекция $D^3 \to D^2$ переводила $I \amalg I$ в пару горизонтальных отрезков). Для любых взаимно-простых p, q обозначим через $K(F, M, f, p, q)$ новое подмногообразие многообразия X, получаемое из F в результате замены 0-связки суммой $(1/p)$-связки и $(1/q)$-связки (рис. 1).

---

[2] 0-tangle (см. Конвей [13]).

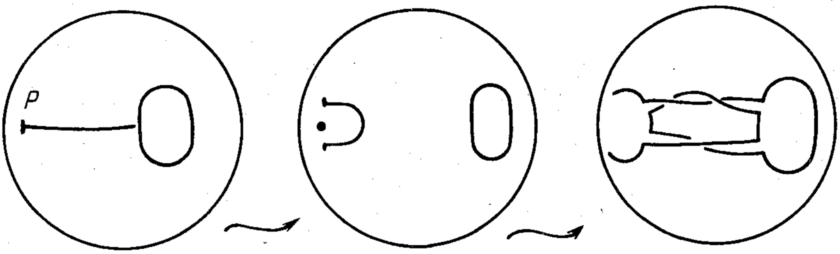

Рис. 2.

В теореме 3 каждый из торов, вдоль которых производились топологические логарифмические преобразования, получался из вложенной сферы вложенной перестройкой индекса 1. Рассмотрим соответствующую конструкцию заузливания. Пусть F, как и выше, гладкое замкнутое двумерное подмногообразие гладкого четырехмерного многообразия X, и пусть D – гладкая круговая перепонка индекса 0 на F в X. Пусть $c: D^2 \times I \to X$ – такое гладкое вложение, что $c(D^2 \times I) \cap D$ есть диск $c(D^2 \times 0)$, расположенный в $\operatorname{Int} D^2$, и $c(D^2 \times I) \cap F = c(D^2 \times 1)$. Положим $Z = c(S^1 \times I)$ и обозначим через M кольцевую перепонку, полученную из $Z \cup (D \setminus c(D^2 \times 0))$ сглаживанием угла вдоль $c(S^1 \times 0)$.

В этой ситуации заузливание вдоль M можно разложить (с точностью до диффеоморфизма) в композицию некоторого заузливания вдоль D (или, точнее, некоторой заузленной перестройки индекса 2 или 0) и последующей вложенной перестройки индекса 1 вдоль $c(0 \times I)$. Заузливание вдоль D также представляет собой композицию: сначала к F добавляется новая незаузленная двумерная сфера, пересекающая D по $c(S^1 \times 0)$ (т. е. сначала производится вложенная морсовская перестройка индекса 0 поверхности F), а затем делается заузливание Виро–Крека–Финашина вдоль кольца $D \setminus c(\operatorname{Int} D^2 \times 0)$. Если бы этот второй шаг был пропущен, то первая перестройка индекса 0 сократилась бы с последующей перестройкой индекса 1. Изотопия, производящая это сокращение, переводит результат композиции нашего заузливания вдоль D с перестройкой индекса 1 в результат заузливания вдоль M.

§ 7. Заузливание тора, стандартно вложенного в S^4

Тор, стандартно вложенный в S^4, можно рассматривать как след незаузленной окружности, лежащей в трехмерной полусфере, оставляемый ею при вращении этой полусферы вокруг своей границы, т. е. вокруг $\mathbf{R}^3 \subset \mathbf{R}^5$, в котором эта граница лежит (при этом вращении вся полусфера заметает целиком S^4). Пусть D – круг, описываемый при том же вращении незаузленной дугой, соединяющей эту окружность с некоторой точкой P края трехмерной полусферы. Ясно, что D есть круговая перепонка на T в S^4 индекса 0.

Заузливание тора T вдоль нее описанного выше типа дает узлы или зацепления, доставляемые конструкцией Артина [14], т. е. заметаемые набором дуг и окружностей, расположенных в трехмерной полусфере, при ее вращении вокруг своего края. Действительно, перестройку индекса 0 можно рассматривать как добавление малой незаузленной дуги с концами, лежащими на границе трехмерной полусферы вблизи точки P. Последующая конструкция заузливания вдоль кольцевой перепонки эквивалентна соединению в трехмерной полусфере окружности и этой дуги посредством связки, определяющей заузливание вдоль кольцевой перепонки (рис. 2). Ясно, что если связка представляет собой сумму

$(1/p)$-связки и $(1/q)$-связки с нечетным $p+q$, то в результате возникает двумерный узел, строящийся конструкцией Артина [14] по торическому узлу типа $(p+q, 2)$. В частности, если $q=1-p$, то получается тривиальный двумерный узел.

Теорема 4. *Пусть T и D – такие, как выше простейшие, вложенные в S^4 тор, и круговая перепонка на нем, пусть M – любая кольцевая перепонка, полученная из D способом, описанным выше в § 6, и пусть f – подходящая тривиализация ее регулярной окрестности. Тогда поверхность $K(T, M, f, p, 1-p)$ диффеотопна T.*

Доказательство. Как было показано в §6, заузливание вдоль M разлагается в композицию заузливания вдоль D и последующей перестройки индекса 1. Как было показано выше, заузливание вдоль D дает тривиальный двумерный узел. Перестройка единственна с точностью до диффеоморфизма, поскольку она сохраняет ориентацию и любые две дуги, способные служить ее осью, изотопны (потому что их внутренности, расположенные в дополнении тривиального узла, гомотопны). Ясно, что простейшая из таких перестроек индекса 1 дает тор, гладко изотопный T. •

Таким образом, заузливание Виро–Крека–Финашина, примененное к тору, стандартно вложенному в S^4, и к простейшей кольцевой перепонке индекса нуль, дает тор того же гладкого изотопического класса в случае, если заузливающая связка есть сумма $1/p$- и $1/(1-p)$-связок. Замечу, что те же заузливающие связки в случае связной суммы 10 экземпляров проективной плоскости приводили к экзотическим заузливаниям (см. [5]).

§ 8. Доказательство теоремы 3

Многообразие Y теоремы 3 является двулистным разветвленным накрывающим сферы S^4 с ветвлением над тором, который получается из стандартно вложенного тора в результате перестроек, описанных в предыдущем пункте. Так как двулистным разветвленным накрывающим сферы S^3 с ветвлением над торическим зацеплением типа $(p+q, 2)$ является линзовое пространство $L(p+q, 1)$, то двулистное разветвленное накрывающее сферы S^4 с ветвлением над зацеплением, которое получается из торического зацепления типа $(p+q, 2)$ при помощи конструкции Артина, диффеоморфно результату перестройки произведения $L(p+q, 1) \times S^1$ вдоль $\mathrm{pt} \times S^1$. Перестройке индекса 1 этого двумерного зацепления, которая, согласно сказанному выше, превращает его в $K(T, M, f, p, q)$, отвечает перестройка индекса 2 двулистного разветвленного накрывающего, в результате которой получается многообразие Y. Таким образом, многообразие Y можно получить из $L(p+q, 1) \times S^1$ в результате двух перестроек индекса 2, одна из которых производится вдоль $\mathrm{pt} \times S^1$. Так как Y односвязно и спинорно (последнее в силу ориентируемости поверхности ветвления), то, как показал Мойшезон [16, Лемма 13, стр. 208], оно диффеоморфно $S^2 \times S^2$.

§ 9. Доказательство теоремы 2

Лемма 1. *Если X – гладкое четырехмерное многообразие с краем, полученное в результате приклеивания нескольких ручек индекса 2 к четырехмерному шару, то его удвоение $Y = X \underset{\mathrm{id}}{\cup} X$ (т. е. результат склеивания двух экземпляров многообразия X посредством тождественного отображения края) диффеоморфно связной сумме нескольких экземпляров многообразия $S^2 \times S^2$ или $\mathbf{C}P^2 \# \overline{\mathbf{C}P^2}$.*

Доказательство. Естественное задание многообразия Y оснащенным зацеплением получается из задания многообразия X присоединением к зацеплению новых компонент с нулевыми оснащениями, представляющих собой меридианы компонент зацепления, задающего многообразие X. Посредством изотопий и сложений с этими новыми компонентами легко сделать старые компоненты незаузленными и незацепленными. После этих преобразований новые компоненты, как и прежде, являются меридианами старых. Теперь зацепление сделалось несвязной суммой зацеплений Хопфа. Хорошо известно, что оснащенное зацепление Хопфа с оснащением, равным 0 на одной из компонент, определяет $S^2 \times S^2$ или $\mathbf{C}P^2 \# \overline{\mathbf{C}P}^2$, в зависимости от оснащения другой компоненты. •

Хорошо известно, что гомологическая сфера Пуанкаре ограничивает компактное односвязное четырехмерное многообразие с двумерным числом Бетти 1. Это многообразие получается, например, как результат приклеивания одной ручки индекса 2 к D^4 вдоль трилистника с оснащением +1. Обозначим это многообразие через W. Его можно представить так же, как регулярную окрестность объединения гладко вложенного тора Y с двумя круговыми перепонками, натянутыми на меридиан и параллель; здесь тор имеет индекс самопересечения +1, а перепонки имеют индексы −1. Ср. [7] и [8]. Ясно, что $V_{1,1}$ получается из W в результате одного σ-процесса и что W обладает деформационным ретрактом, гомеоморфным S^2 и вложенным гладко всюду, кроме одной точки, в окрестности которой он расположен (с точностью до PL-гомеоморфизма), как конус над трилистником. Этот деформационный ретракт легко увидеть в первом описании многообразия W: он представляет собой объединение осевого диска ручки индекса 2 и конуса над граничной окружностью этого диска с вершиной внутри шара D^4. Обозначим этот деформационный ретракт через S.

Лемма 2. *Многообразие, получающееся в результате склеивания многообразий $V_{1,1}$ и $-W$ посредством тождественного отображения их граничной гомологической сферы Пуанкаре,диффеоморфно* $\mathbf{C}P^2 \# 2\overline{\mathbf{C}P}^2$.

Доказательство. Так как многообразие Wнеспинорно, то неспинорно и его удвоение. Следовательно, в силу леммы 1 это удвоение диффеоморфно $\mathbf{C}P^2 \# \overline{\mathbf{C}P}^2$. Теперь доказываемое утверждение вытекает из того факта, что $V_{1,1}$ можно получить посредством σ-процесса (т. е. связным суммированием с $\overline{\mathbf{C}P}^2$) из W. •

Лемма 3. *Существует гладкое вложение многообразия $S^2 \times S^2 \setminus \mathrm{pt}$ в результат склеивания многообразий $V_{1,1}$ и $-W$ по краю, переводящее тор, который получается из слоя $S^2 \times \mathrm{pt}$ добавлением тривиальной ручки, в тор $R \subset V_{1,1}$.*

Доказательство. Дополнение точки в $S^2 \times S^2$ есть регулярная окрестность букета $S^2 \times \mathrm{pt} \vee \mathrm{pt} \times S^2$. Трубчатая окрестность слоя $S^2 \times \mathrm{pt}$ может быть получена из трубчатой окрестности тора T, представляющего собой тот же слой $S^2 \times \mathrm{pt}$ с маленькой тривиальной добавленной к нему ручкой, в результате присоединения к ней трубчатых окрестностей малых перепонок, натянутых на меридиан и параллель этой ручки. Индексы этих перепонок равны нулю. Таким образом, дополнение точки в $S^2 \times S^2$ можно представить как регулярную окрестность двумерного клеточного пространства, являющегося букетом двумерной сферы D и тора C с двумя круговыми перепонками A и B, натянутыми на меридиан и параллель тора C. Поверхности A, B, C, D гладко вложены, C и D пересекаются ровно в одной точке и притом трансверсально, A и B пересекаются тоже ровно в одной точке (расположенной в $\partial A \cap \partial B$) и тоже трансверсально, $C \circ C = D \circ D = 0$, индексы перепонок A и B тоже равны 0, перепонки A, B не пересекаются с D, а с тором C они пересекаются только по ∂A и ∂B. Эти свойства поверхностей A, B, C, D определяют регулярную окрестность их объединения с точностью до диффеоморфизма. Поэтому для задания гладкого вложения дополнения точки в $S^2 \times S^2$ в какое-нибудь четырехмерное многообразие (с точностью до диффеотопии) достаточно найти в этом многообразии набор вложенных поверхностей, обладающих этими свойствами.

Для построения требуемого вложения в качестве C нужно взять тор $R \subset V_{1,1}$. В качестве D возьмем сферу M, которая является объединением слоя трубчатой окрестности тора R в $V_{1,1}$ и соответствующего слоя трубчатой окрестности тора J в W. (Здесь мы рассматриваем трубчатые окрестности, участвовавшие в построении многообразий $V_{1,1}$ и W; границы этих окрестностей выходят на $\partial V_{1,1}$ и ∂W). Перепонки P и Q (см. построение многообразия $V_{1,1}$ в §1) нельзя взять в качестве A и B, поскольку индексы у P и Q равны -1. Чтобы изготовить подходящие перепонки, возьмем два непересекающихся ненулевых сечения H' и H'' трубчатой окрестности сферы H (напомню, что $H \cdot H = 0$), построим две круговые перепонки, приплюснув малые диски на H' и H'' и R таким образом, чтобы индексы этих перепонок оказались равны $+1$ (имеются два способа приплюснуть — один дает индекс $+1$, другой — индекс -1 (см. [15]), и затем образуем связные суммы (по краю) перепонок P, Q с получившимися перепонками. Легко проверить, что построенные перепонки вместе с R и H удовлетворяют всем условиям, наложенным выше на A, B, C, D.

Лемма 4. *Для любых взаимно-простых p, q многообразие, получающееся в результате склеивания многообразий $V_{p,q}$ и $-W$ посредством тождественного отображения края, диффеоморфно* $\mathbf{C}P^2 \# 2\overline{\mathbf{C}P^2}$. [3]

Доказательство. Результат склеивания многообразий $V_{p,q}$ и $-W$ получается из результата склеивания многообразий $V_{1,1}$ и $-W$ посредством пары топологических логарифмических преобразований вдоль двух торов, близких тору R. В силу леммы 3 эти преобразования производятся во вложенном $S^2 \times S^2 \setminus \mathrm{pt}$ таким образом, что, согласно теореме 3, они не изменяют его дифференциально-топологического типа. Следовательно, результат склеивания многообразий $V_{p,q}$ и $-W$ диффеоморфен результату склеивания многообразий $V_{1,1}$ и $-W$, а последний диффеоморфен $\mathbf{C}P^2 \# 2\overline{\mathbf{C}P^2}$ в силу леммы 2. ●

Для завершения доказательства теоремы 2 обозначим через S_p образ сферы S (напомню, что это деформационный ретракт многообразия W, см. выше) при диффеоморфизме результата склеивания многообразий $V_{2,2p-1}$ и $-W$ на связную сумму $\mathbf{C}P^2 \# 2\overline{\mathbf{C}P^2}$. Утверждения (i)–(iv) и (vii) формулировки теоремы 2 непосредственно вытекают из построения поверхностей S_p. Утверждения (v) и (vi) следуют из утверждений (iv) и (iii) теоремы 1 соответственно.

Благодарности. Значительная часть этой работы была выполнена во время моего визита в Майнц и Париж в сентябре и октябре 1988 г. Хочу выразить свою глубокую признательность М. Креку, Л. Зибенманну и М. Берже за гостеприимство, М. Креку и Л. Зибенманну за полезные обсуждения и Р. Гомпфу за ценную информацию.

---

[3] Примечание при корректуре. Как мне сообщил Р. Гомпф, эта лемма была получена им летом 1988 г. другим путем и будет включена в его статью о связных суммах эллиптических поверхностей.

Список литературы

[1] *Donaldson S. K.* Irrationality and the h-cobordism conjecture // J. Diff. Geom. *1987.* Vol. 26. P. 141–168.

[2] *Donaldson S. K.* Polynomial invariants for smooth 4-manifolds. Preprint. *1987.*

[3] *Kotschick D.* On manifolds homeomorphic to $CP^2 \# 8\overline{CP}^2$ // Invent. Math. *1989.*

[4] *Barlow R.* A. simply connected surface of general type with $p_g = 0$ // Invent. Math. *1985.* Vol. 79. P. 293–301.

[5] *Finashin S. M., Kreck M. K., Viro O. Ya.* Non-diffeomorphic but homeomorphic knottings of surfaces in the 4-sphere // Lect. Notes in Math. *1988.* Vol. 1346. P. 157–198.

[6] *Friedman R., Morgan J. W.* On the diffeomorphism types of certain algebraic surfaces I // J. Dif. Geom. *1988.* Vol. 27, N 2. P. 297–369.

[7] *Matumoto T.* Extension problem of diffeomorphisms of a 3-torus over some 4-manifolds // Hiroshima Math. J. *1984.* Vol. 14, N 1. P. 189–201.

[8] *Guillou L., Marin A.* Commentaires sur quatres articles precedent de V. A. Rohlin, in a book „A la Recherche de la Topologie Perdue" // Birkhäuser, Progr. in Math. *1986.* Vol. 62. P. 25–95.

[9] *Boileau M., Otal J.-P.* Groupe des diffeotopies de certaines varietes de Seifert // C. R. Acad. Sc. Paris. *1986.* T. 303. Ser. 1, N 1. P. 19–22.

[10] *Freedman M. H.* The topology of four-dimensionalen manifolds // J. Dif. Geom. *1982.* Vol. 17. P. 357–453.

[11] *Vogel P.* Simply-connected 4-manifolds // Sem. Notes 1, Aarhus Univ. Aarhus. *1982.* P. 116–119.

[12] *Boyer S.* Simply-connected 4-manifolds with a given boundary // Trans. Amer. Math. Soc. *1986.* Vol. 298, N 1. P. 331–357.

[13] *Conway J. H.* An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties // Computational Problems in Abstract. Algebra. Pergamon Press. *1970.* P. 329–358.

[14] *Artin E.* Zur Isotopie zweidimensionalen Flöchen im R^4 // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. *1926.* Bd 4. S. 174–177.

[15] *Рохлин В. А.* Новые примеры четырехмерных многообразий // ДАН СССР. *1965.* Т. 162, № 2. С. 273–276.

[16] *Moishezon B.* Complex surfaces and connected sums of complex projective planes // Lect. Notes in Math. *1977.* Vol. 603.

Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 1 апреля 1989 г.