УДК 513.838

Локальное заузливание подмногообразий

О. Я. Виро (Ленинград)

Введение

1. Проблема, послужившая отправной точкой настоящей работы, была следующим образом сформулирована Фоксом [5].

Проблема 32. Может ли группа локально плоской проективной плоскости в $\mathbf{R}^4$ быть конечной группой, отличной от $\mathbf{Z}_2$?

Имеется в виду, конечно, фундаментальная группа дополнения. Как известно, при стандартных вложениях замкнутых неориентируемых поверхностей в $\mathbf{R}^4$ фундаментальные группы дополнений изоморфны $\mathbf{Z}_2$.

В настоящей работе строятся гладкие вложения замкнутых неориентируемых поверхностей в $\mathbf{R}^4$ с конечными группами, отличными от $\mathbf{Z}_2$. Построение основано на конструкции заузливания подмногообразия в окрестности одной из его точек. Изучение изменения фундаментальной группы дополнения замкнутого подмногообразия при таком заузливании и составляет основное содержание статьи. Удовлетворительный ответ получается в том случае, когда фундаментальная группа дополнения исходного подмногообразия есть конечная циклическая группа.

Терминология статьи — дифференциально-топологическая. В частности, многообразиями называются гладкие многообразия, а подмногообразиями — подмногообразия гладких многообразий в смысле дифференциальной топологии.

Автор благодарен В. А. Рохлину за внимание и помощь.

Конструкция заузливания

2. Пусть A — замкнутое $(n-2)$-мерное подмногообразие n-мерного многообразия X (без края) и пусть $K=(S^n, k)$ — узел размерности $n-2$ (т. е. пара, состоящая из сферы S^n и ее ориентированного подмногообразия k, диффеоморфного S^{n-2}). Говорят, что подмногообразие C многообразия X получается в результате *заузливания подмногообразия A посредством K*, если существуют такие подмногообразия $B_1\subset S^n$ и $B_2\subset X$, что

1) пары $(B_1, k\cap B_1)$ и $(B_2, A\cap B_2)$ диффеоморфны стандартной паре (D^n, D^{n-2});

2) $A\setminus \operatorname{Int} B_2=C\setminus \operatorname{Int} B_2$;

3) результат склеивания пары $(B_2, C\cap B_2)$ с парой $(B_2, A\cap B_2)$ при помощи тождественного отображения $\partial B_2\to\partial B_2$ диффеоморфен паре (S^n, k).

Ясно, что такое заузливание не меняет дифференциально-топологического типа подмногообразия. Стандартная гомологическая техника показывает, что оно не меняет также групп гомологий дополнения заузливаемого подмногообразия. Если $K=(S^n, k)$ — связная сумма узлов $K_1=(S^n, k_1)$ и $K_2=(S^n, k_2)$, то подмногообразие k получается в результате заузливания подмногообразия k_1 посредством K_2.

3. *Любое замкнутое $(n-2)$-мерное подмногообразие A многообразия X размерности n можно заузлить посредством любого узла $K=(S^n, k)$.*

Доказательство. Пусть $h_1: \mathbf{R}^n \to S^n$ и $h_2: \mathbf{R}^n \to X$ — такие вложения, что $h_1(\mathbf{R}^{n-2})=k \cap h_1(\mathbf{R}^n)$ и $h_2(\mathbf{R}^{n-2})=A \cap h_2(\mathbf{R}^n)$. Положим $B_1=h_1(D^n)$ и $B_2=h_2(D^n)$; ясно, что B_1 и B_2 удовлетворяют условию 1). Обозначим через S^r_+ полусферу сферы S^r, на которой первая координата ξ_1 неотрицательна, и фиксируем диффеоморфизм $f: (D^n, D^{n-2}) \to (S^n_+, S^{n-2}_+)$. Согласно теореме Пале [9], диффеоморфизм $f \circ (h_1^{-1} | B_1): B_1 \to S^n_+$ можно продолжить до диффеоморфизма $F: S^n \to S^n$. Пусть $J: S^n \to S^n$ — симметрия относительно гиперплоскости $\xi_1=0$. Нетрудно проверить, что $C=(A \setminus B_2) \bigcup h_2 h_1^{-1} JF(k \setminus \operatorname{Int} B_1)$ есть замкнутое подмногообразие многообразия X, удовлетворяющее условиям 2) и 3).

Замечание. Подмногообразие A можно заузлить посредством K, вообще говоря, различными способами; например, бабушкин узел и сквер-узел получаются в результате заузливания трилистника посредством трилистника. Однако, можно показать, что если A состоит из s компонент, то существует не более $4s$ попарно недиффеоморфных пар (X, C), где C — результат заузливания подмногообразия A посредством K.

Циклические разветвленные накрытия

4. Пусть A — замкнутое $(n-2)$-мерное подмногообразие n-мерного многообразия X и пусть m — натуральное число. Многообразие Y называется *циклическим m-листным разветвленным накрывающим пары* (X, A), а отображение $p: Y \to X$ — *циклическим m-листным разветвленным накрытием пары* (X, A), если

а) определяемое отображением p отображение $Y \setminus p^{-1}(A) \to X \setminus A$ есть циклическое m-листное гладкое накрытие;

б) для всякой точки $a \in A$ существуют такие вложения $\varphi_a: D^{n-2} \times D^2 \to X$ и $\varphi_a': D^{n-2} \times D^2 \to Y$, что $\varphi_a(D^{n-2} \times D^2)$ — окрестность точки a и $p\varphi_a'(v, w)=\varphi_a(v, w^m)$, где $v \in D^{n-2}$, $w \in D^2$ (w рассматривается как комплексное число).

5. Из результатов Фокса [4] следует, что всякий $(n-2)$-мерный узел $K=(S^n, k)$ обладает при каждом натуральном m единственным с точностью до диффеоморфизма циклическим m-листным разветвленным накрытием. Соответствующее накрывающее пространство мы будем обозначать через $N_m(K)$, а проекцию $N_m(K) \to S^n$ — через p_m.

Основная теорема

6. *Пусть C — результат заузливания замкнутого связного $(n-2)$-мерного подмногообразия A односвязного n-мерного многообразия X посредством узла $K=(S^n, k)$. Если группа $\pi_1(X\setminus A)$ изоморфна $\mathbf{Z}_m$, то коммутант группы $\pi_1(X\setminus C)$ изоморфен $\pi_1(N_m(K))$, а сама группа $\pi_1(X\setminus C)$ представляется как полупрямое произведение группы $\pi_1(N_m(K))$ на $\mathbf{Z}_m$.*

Замечание. Группы $\pi_1(N_m(K))$ вычислены для многих узлов (см. п. 17).

Доказательство основной теоремы. Пусть $B_1\subset S^n$ и $B_2\subset X$ удовлетворяют условиям 1), 2) и 3) п. 2 и пусть $p: Y\to X\setminus C$ — накрытие, отвечающее коммутанту группы $\pi_1(X\setminus C)$. Так как $H_1(X\setminus C)\cong \cong H_1(X\setminus A)\cong\mathbf{Z}_m$, то $p: Y\to X\setminus C$ — циклическое m-листное накрытие.

Положим $B_2'=p^{-1}(B_2\setminus C)$, $B_1'=p_m^{-1}(B_1)$, $k'=p_m^{-1}(k)$. Пусть S — край лежащего в ∂B_2 слоя трубчатой окрестности T подмногообразия C в X. Из связности подмногообразия C следует, что ядро гомоморфизма включения $\pi_1(T\setminus C)\to\pi_1(T)$ порождается образом гомоморфизма включения $\pi_1(S)\to\pi_1(T\setminus C)$. В силу теоремы Ван Кампена, примененной к триаде $(X;\ X\setminus C,\ T)$, наименьший нормальный делитель группы $\pi_1(X\setminus C)$, содержащий образ гомоморфизма $\sigma:\pi_1(S)\to\pi_1(X\setminus C)$, совпадает с $\pi_1(X\setminus C)$. Следовательно, композиция гомоморфизма σ и проекции $\pi_1(X\setminus C)\to\pi_1(X\setminus C)p_*\pi_1(Y)\cong\mathbf{Z}_m$ является эпиморфизмом, а это влечет связность прообраза $p^{-1}(S)$ окружности S. (Здесь применяется общая теорема, сформулированная, например, в [2]: пусть пространства $\Gamma, \Gamma_0\subset\Gamma$ и Δ линейно связны и пусть $\psi:\Delta\to\Gamma$ — регулярное накрытие; если композиция гомоморфизма включения $\pi_1(\Gamma_0)\to\pi_1(\Gamma)$ и проекции $\pi_1(\Gamma)\to \to\pi_1(\Gamma)/\psi_*\pi_1(\Delta)$ есть эпиморфизм, то множество $\psi^{-1}(\Gamma_0)$ линейно связно.)

Из связности множеств $p^{-1}(S)$, $B_2\setminus C$ и $X\setminus(C\cup\operatorname{Int}B_2)$ следует, очевидно, связность множеств $B_2'=p^{-1}(B_2\setminus C)$ и $Y\setminus\operatorname{Int}B_2'=p^{-1}(X\setminus(C\cup \cup\operatorname{Int}B_2))$. Таким образом, сужения $B_2'\to B_2\setminus C$ и $Y\setminus\operatorname{Int}B_2'\to X\setminus(C\cup \cup\operatorname{Int}B_2)$ накрытия $p: Y\to X\setminus C$ являются циклическими m-листными накрытиями.

В силу условий 1) и 3), существует диффеоморфизм $\Phi: S^n\setminus(k\cup\operatorname{Int}B_1)\to B_2\setminus C$. Поскольку $H_1(S^n\setminus(k\cup\operatorname{Int}B_1))\cong \cong H_1(S^n\setminus k)$ — бесконечная циклическая группа, существует единственный нормальный делитель G_m группы $\pi_1(S^n\setminus(k\cup\operatorname{Int}B_1))$ с $\pi_1(S^n\setminus(k\cup\operatorname{Int}B_1))/G_m\cong\mathbf{Z}_m$, и поэтому существует единственное с точностью до диффеоморфизма циклическое m-листное (неразветвленное) накрытие многообразия $S^n\setminus(k\setminus\operatorname{Int}B_1)$. Следовательно, существует диффеоморфизм $\Phi': N_m(K)\setminus(k'\cup\operatorname{Int}B_1')\to B_2'$, накрывающий диффеоморфизм Φ.

Из условий 1) и 2) следует, что $\pi_1(X\setminus(C\cup\operatorname{Int}B_2))\cong\pi_1(X\setminus A)\cong\mathbf{Z}_m$, и потому $\pi_1(Y\setminus\operatorname{Int}B_2')=0$. В силу теоремы Ван Кампена, примененной к триаде $(Y;\ Y\setminus\operatorname{Int}B_2',\ B_2')$, группа $\pi_1(Y)$ изоморфна поэтому фактор-группе группы $\pi_1(B_2')$ по нормальному делителю, порожденному образом гомоморфизма включения $\alpha:\pi_1(\partial B_2')\to\pi_2(B_2')$.

С другой стороны, в силу условия 1), многообразие B_1' диффеоморфно шару. Применяя теорему Ван Кампена к триаде $(N_m(K)\setminus(k'\setminus B_1');\ B_1',\ N_m(K)\setminus(k'\cup \operatorname{Int} B_1'))$, мы видим, что группа $\pi_1(N_m(K)\setminus(k'\setminus B_1'))$ изоморфна факторгруппе группы $\pi_1(N_m(K)\setminus(k'\cup \operatorname{Int} B_1'))$ по нормальному делителю, порожденному образом гомоморфизма включения

$$\beta:\pi_1(\partial B_1'\setminus k')\to\pi_1(N_m(K)\setminus(k'\cup\operatorname{Int} B_1')).$$

Так как, очевидно, $\Phi'(\partial B_1'\setminus k')=\partial B_2'$, то $\Phi_*'\operatorname{Im}\beta=\operatorname{Im}\alpha$. Следовательно, Φ_*' индуцирует изоморфизм

$$\theta:\pi_1(N_m(K)\setminus(k'\setminus B_1'))\to\pi_1(Y).$$

Поскольку подмногообразие $k'\setminus\operatorname{Int} B_1'$ диффеоморфно $(n-2)$-мерному шару, гомоморфизм включения

$$\iota:\pi_1(N_m(K)\setminus(k'\setminus B_1'))\to\pi_1(N_m(K))$$

биективен. С другой стороны, гомоморфизм $p_*:\pi_1(Y)\to\pi_1(X\setminus C)$ инъективен, и, согласно определению накрытия $p: Y\to X\setminus C$, образ гомоморфизма p_* — коммутант группы $\pi_1(X\setminus C)$. Следовательно, гомоморфизм

$$\rho=p_*\circ\theta\circ\iota^{-1}:\pi_1(N_m(K))\to\pi_1(X\setminus C)$$

инъективен, и $\operatorname{Im}\rho$ — коммутант группы $\pi_1(X\setminus C)$.

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(X\setminus(C\cup\operatorname{Int}B_2)) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X\setminus C)\\ \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2}\\ H_1(X\setminus(C\cup\operatorname{Int}B_2)) & \xrightarrow{i_\#} & H_1(X\setminus C),\end{array}\qquad (*)$$

в которой горизонтальные гомоморфизмы индуцированы включениями, а вертикальные являются гомоморфизмами Гуревича, коммутативна. В силу условий 1) и 2), h_1 и $i_\#$ — изоморфизмы. Из этого следует (в силу коммутативности диаграммы $(*)$), что 1) i_* — мономорфизм; 2) $\operatorname{Im} i_*\cap\operatorname{Ker} h_2=1$; 3) множество $\operatorname{Im} i_*\cup\operatorname{Ker} h_2$ порождает группу $\pi_1(X\setminus C)$. Но $\operatorname{Ker} h_2=\operatorname{Im}\rho$, и, таким образом, группа $\pi_1(X\setminus C)$ есть полупрямое произведение группы $\pi_1(N_m(K))$ на $\pi_1(X\setminus(C\cup\operatorname{Int}B_2))\cong\mathbf{Z}_m$.

Следствия

7. *Пусть P — неориентируемая замкнутая поверхность. Для всякого двумерного узла $K=(S^4, k)$ существует такое вложение $f:P\to\mathbf{R}^4$, что коммутант группы $\pi_1(\mathbf{R}^4\setminus f(P))$ изоморфен $\pi_1(N_2(K))$, а сама группа $\pi_1(\mathbf{R}^4\setminus f(P))$ представляется как полупрямое произведение группы $\pi_1(N_2(K))$ на $\mathbf{Z}_2$.*

Доказательство. В силу основной теоремы такое вложение получается в результате заузливания посредством K вложенной в $\mathbf{R}^4$ с группой $\mathbf{Z}_2$ поверхности P.

8. Лемма. *Пусть A — ориентированное замкнутое связное $(n-2)$-мерное подмногообразие замкнутого односвязного n-мерного многообра-*

зия X. Если m — наибольшее целое число, на которое делится реализуемый подмногообразием A класс $\xi \in H_{n-2}(X)$, то группа $H_1(X \setminus A)$ изоморфна $\mathbf{Z}_m$.

Доказательство этой леммы для $n=4$ содержится в работе Рохлина [2] (п. 2,2); это доказательство полностью переносится на случаи $n \neq 4$.

9. Лемма. *Всякий класс целочисленных $(n-2)$-мерных гомологий односвязного замкнутого многообразия X размерности $n \geqslant 4$ реализуется связным (ориентированным замкнутым $(n-2)$-мерным) подмногообразием A с коммутативной группой $\pi_1(X \setminus A)$.*

Доказательство. Пусть L — какое-нибудь связное подмногообразие, реализующее класс $\xi \in H_{n-2}(X)$, и пусть коммутант группы $\pi_1(X \setminus L)$ порождается (как нормальный делитель этой группы) элементами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$. Реализуем σ_1 вложением $q: S^1 \to X \setminus L$; поскольку σ_1 принадлежит коммутанту группы $\pi_1(X \setminus L)$, гомоморфизм включения $H_1(q(S^1)) \to H_1(X \setminus L)$ тривиален, и потому существует такой класс $\varkappa \in H_2(X \setminus L,\ q(S^1))$, что $\partial\varkappa$ — естественная образующая группы $H_1(q(S^1))$. Пусть $\alpha: H_2(X \setminus L,\ q(S^1)) \to H_2(X,\ q(S^1))$ — гомоморфизм включения. Так как $\pi_1(X,\ q(S^1))=0$, то гомоморфизм Гуревича $\pi_2(X,\ q(S^1)) \to H_2(X,\ q(S^1))$ сюръективен, и поэтому класс $\alpha\varkappa$ реализуется отображением $Q: (D^2,\ S^1) \to (X,\ q(S^1))$; последнее можно считать трансверсально регулярным на L погружением с конечным числом двойных точек, лежащих вне L.

Ориентируем X. Пусть

$$\mathrm{Ind}: H_{n-2}(X \setminus q(S^1)) \otimes H_2(X,\ q(S^1)) \to \mathbf{Z}$$

— спаривание посредством индекса пересечения и пусть L реализует класс $\xi' \in H_{n-2}(X \setminus q(S^1))$. Очевидно, $\mathrm{Ind}\,(\xi' \otimes \alpha\varkappa)=0$; таким образом, пересечение $L \cap Q(D^2)$ состоит из четного числа $\{x_1, \ldots, x_s;\ y_1, \ldots, y_s\}$ точек, у первой половины которых индекс пересечения подмногообразия L с $Q(D^2)$ равен $+1$, а у второй половины равен -1.

Проведем на $Q(D^2)$ не пересекающиеся друг с другом и не задевающие двойных точек Q простые гладкие дуги $I_1, \ldots, I_s$ с $\partial I_i = \{x_i,\ y_i\}$. Используя нормальное расслоение погружения Q, построим такие вложения $\psi_1, \ldots, \psi_s: D^1 \times D^{n-2} \to X$, что

$$\psi_i(D^1 \times D^{n-2}) \cap Q(D^2) = \psi_i(D^1 \times 0) = I_i,$$

$$\psi_i(D^1 \times D^{n-2}) \cap L = \psi_i(\partial D^1 \times D^{n-2}) \qquad (i=1, \ldots, s);$$

$$\psi_i(D^1 \times D^{n-2}) \cap \psi_j(D^1 \times D^{n-2}) = \varnothing \qquad (i,\ j=1, \ldots, s \text{ и } i \neq j).$$

Произведем морсовские перестройки (индекса 1) подмногообразия L посредством вложений $\psi_1, \ldots, \psi_s$, т. е. построим подмногообразие L'' многообразия L', сгладив углы «подмногообразия с углами»

$$L' = \left(L \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \psi_i(\partial D^1 \times D^{n-2})\right) \cup \bigcup_{i=1}^{s} \psi_i(D^1 \times \partial D^{n-2}).$$

Поскольку в точках $x_1, \ldots, x_s$ индекс пересечения подмногообразия L с $Q(D^2)$ равен $+1$, а в точках $y_1, \ldots, y_s$ равен -1, подмногообразие L'' реализует класс ξ.

Пусть D_i — регулярная окрестность в X образа вложения ψ_i. Очевидно, гомоморфизмы включения $\pi_1(\partial D_i \setminus L) \to \pi_1(D_i \setminus L)$ биективны, а гомоморфизмы включения $\pi_1(\partial D_i \setminus L') \to \pi_1(D_i \setminus L')$ сюръективны. Применяя теорему Ван Кампена к триадам

$$\left(X \setminus L;\ \bigcup_{i=1}^{s} D_i \setminus L,\ X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{s} \operatorname{Int} D_i \cup L\right)\right)$$

и

$$\left(X \setminus L';\ \bigcup_{i=1}^{s} D_i \setminus L',\quad X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{s} \operatorname{Int} D_i \cup L'\right)\right),$$

мы видим, что гомоморфизм включения

$$\beta : \pi_1\left(X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{s} \operatorname{Int} D_i \cup L\right)\right) \to \pi_1(X \setminus L)$$

биективен, а гомоморфизм включения

$$\gamma : \pi_1\left(X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{s} \operatorname{Int} D_i \cup L\right)\right) \to \pi_1(X \setminus L')$$

сюръективен. В силу леммы 8, $H_1(X \setminus L)$ и $H_1(X \setminus L')$ — изоморфные циклические группы, из чего следует, что эпиморфизм $\gamma \circ \beta^{-1} : \pi_1(X \setminus L) \to \pi_1(X \setminus L')$ превращается при коммутировании в изоморфизм; поэтому коммутант группы $\pi_1(X \setminus L')$ порождается элементами $\gamma\beta^{-1}(\sigma_1)$, $\gamma\beta^{-1}(\sigma_2), \ldots, \gamma\beta^{-1}(\sigma_r)$. При этом класс $\gamma\beta^{-1}(\sigma_1)$ равен 1, так как он представим петлей, образ которой лежит в $q(S^1) = Q(\partial D^2) \subset Q(D^2) \subset X \setminus L'$. Таким образом, коммутант группы $\pi_1(X \setminus L')$, и, значит, коммутант группы $\pi_1(X \setminus L'')$, порождается меньшим числом элементов, чем коммутант группы $\pi_1(X \setminus L)$. Повторяя эту процедуру, мы получим подмногообразие A с коммутативной группой $\pi_1(X \setminus A)$.

10. *Пусть X — замкнутое односвязное многообразие размерности $n \geqslant 4$ и пусть m — наибольшее целое число, делящее класс $\xi \in H_{n-2}(X)$. Для всякого $(n-2)$-мерного узла $K = (S^n, k)$ существует такое реализующее класс ξ связное подмногообразие C, что коммутант группы $\pi_1(X \setminus C)$ изоморфен $\pi_1(N_m(K))$, а сама группа $\pi_1(X \setminus C)$ представляется как полупрямое произведение группы $\pi_1(N_m(K))$ на $\mathbf{Z}_m$.*

Доказательство. В силу леммы 9, существует реализующее класс ξ связное подмногообразие A, для которого группа $\pi_1(X \setminus A)$ коммутативна и потому изоморфна $\mathbf{Z}_m$ (лемма 8). Применяя основную теорему, мы видим, что в результате заузливания подмногообразия A посредством K получается требуемое подмногообразие.

Информация о группах $\pi_1(N_m(K))$

11. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — натуральные числа. Пересечение комплексной гиперповерхности

$$\{(z_1, z_2, \ldots, z_r) \in \mathbf{C}^r \mid z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \ldots + z_r^{a_r} = 0\}$$

со сферой S^{2r-1} обозначим через $k(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, а пару $(S^{2r-1}, k(a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_r))$ — через $K(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

12. Лемма (см. [8]). *Существует циклическое a_1-листное разветвленное накрытие $k(a_1, a_2, \ldots, a_r)\to S^{2r-3}$ пары $K(a_2, \ldots, a_r)$.*

13. Лемма. *Если a_1, a_2, a_3 — натуральные числа с $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}>1$, то группа $\pi_1(k(a_1, a_2, a_3))$ конечна. В частности,*

1) *для всякого натурального j группа $\pi_1(k(2, 2, j))$ изоморфна $\mathbf{Z}_j$;*

2) *$\pi_1(k(2, 3, 3))$ — группа из 8 элементов, изоморфная группе кватернионов;*

3) *$\pi_1(k(2, 3, 4))$ — группа из 24 элементов, изоморфная бинарной группе тетраэдра*;*

4) *$\pi_1(k(2, 3, 5))$ — группа из 120 элементов, изоморфная бинарной группе додекаэдра.*

Доказательство см., например, в [1].

Замечание. Орлик [7] показал, что если $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\leqslant 1$, то группа $\pi_1(k(a_1, a_2, a_3))$ бесконечна.

14. Пусть $K=(S^n, k)$ — $(n-2)$-мерный узел; m — натуральное число. Обозначим через $Z(m, K)=(S^{n+1}, z(m, K))$ $(n-1)$-мерный узел, получающийся из m и K конструкцией Зимана [10] (m-twist spun K).

15. Лемма. *Для любого узла $K=(S^n, k)$ и любых натуральных m и i группы $\pi_1(N_{mi}(Z(m, K)))$ и $\pi_1(N_m(K))$ изоморфны.*

Доказательство (ср. [6]). Пусть T — трубчатая окрестность подмногообразия $z(m, K)$ в S^{n+1}. Зиман [10] показал, что многообразие $S^{n+1}\setminus z(m, K)$ расслаивается над окружностью со структурной группой $\mathbf{Z}_m$ и слоем $N_m(K)\setminus x$ (где $x\in N_m(K)$), причем сужение $T\setminus z(m, K)\to S^1$ этого расслоения является тривиальным расслоением со слоем $D^n\setminus 0$. Следовательно, существует циклическое mi-листное накрытие $\pi: S^1\times(N_m(K)\setminus x)\to S^{n+1}\setminus z(m, K)$ с $\pi^{-1}(T\setminus z(m, K))=S^1\times(D\setminus x)$, где D — окрестность точки x, диффеоморфная D^n. С другой стороны, согласно определению циклического разветвленного накрытия, сужение

$$N_{mi}(Z(m, K))\setminus p_{mi}^{-1}(z(m, K))\to S^{n+1}\setminus z(m, K)$$

разветвленного накрытия $p_{mi}: N_{mi}(Z(m, K))\to S^{n+1}$ есть циклическое mi-листное (неразветвленное) накрытие. В силу единственности циклического mi-листного накрытия многообразия $S^{n+1}\setminus z(m, K)$ существует диффеоморфизм

$$f: N_{mi}(Z(m, K))\setminus p_{mi}^{-1}(z(m, K))\to S^1\times(N_m(K)\setminus x),$$

причем $f(p_{mi}^{-1}(T\setminus z(m, K)))=S^1\times(D\setminus x)$.

Очевидно, группа $\pi_1(p_{mi}^{-1}(T))$ тривиальна. В силу теоремы Ван Кампена, примененной к триаде

$$(N_{mi}(Z(m, K));\ p_{mi}^{-1}(T),\ N_{mi}(Z(m, K))\setminus p_{mi}^{-1}(z(m; K))),$$

* Бинарной группой многогранника называется прообраз группы вращений этого многогранника при естественном эпиморфизме $SU(2)\to SO(3)$.

группа $\pi_1(N_{mi}(Z(m, K)))$ изоморфна факторгруппе группы $\pi_1(N_{mi}\ (Z(m, K))\setminus p_{mi}^{-1}(z(m, K)))$ по образу гомоморфизма, индуцированного включением

$$f^{-1}(S^1\times(D\setminus x))\to N_{mi}(Z(m, K))\setminus p_{mi}^{-1}(z(m, K)).$$

Из этого следует, что группа $\pi_1(N_{mi}(Z(m, K)))$ изоморфна $\pi_1(N_m(K))$.

16. Если натуральные числа a_1, a_2 взаимно просты, то, как доказано, например, в [1] (§ 1), многообразие $k(a_1, a_2)$ диффеоморфно окружности и пара $K(a_1, a_2)$ — торический узел типа (a_1, a_2); таким образом, в этом случае к паре $K(a_1, a_2)$ применима конструкция Зимана.

17. Лемма. *Если m — натуральное число, то*:

1) *группа* $\pi_1(N_{2m}(Z(2, K(2, j))))$ *с нечетным натуральным* j *изоморфна* $\mathbf{Z}_j$;

2) *группа* $\pi_1(N_{2m}(Z(2, K(3, 4))))$ *изоморфна бинарной группе тетраэдра*;

3) *группа* $\pi_1(N_{2m}(Z(2, K(3, 5))))$ *изоморфна бинарной группе додекаэдра.*

4) *группа* $\pi_1(N_{3m}(Z(3, K(2, 3))))$ *изоморфна группе кватернионов*;

5) *группа* $\pi_1(N_{3m}(Z(3, K(2, 5))))$ *изоморфна бинарной группе додекаэдра*;

6) *группа* $\pi_1(N_{5m}(Z(5, K(2, 3))))$ *изоморфна бинарной группе додекадра.*

Поскольку все 6 утверждений доказываются одинаково, можно ограничиться доказательством утверждения 1). В силу леммы 15, группа $\pi_1(N_{2m}(Z(2, K(2, j))))$ изоморфна $\pi_1(N_2(K(2, j)))$. Из леммы 12 следует, что группа $\pi_1(N_2(K(2, j)))$ изоморфна $\pi_1(k(2, 2, j))$. Последняя (в силу леммы 13) изоморфна $\mathbf{Z}_j$. Таким образом, группа $\pi_1(N_{2m}(Z(2, K(2, j))))$ изоморфна $\mathbf{Z}_j$.

Примеры

18. Пусть $\mathscr{P}$ — замкнутая неориентируемая поверхность в $\mathbf{R}^4$ с $\pi_1(\mathbf{R}^4\setminus\mathscr{P})=\mathbf{Z}_2$. Из основной теоремы и леммы 17 следует, что 1) для любого нечетного натурального j фундаментальная группа дополнения результата заузливания поверхности $\mathscr{P}$ посредством узла $Z(2, K(2, j))$ изоморфна метациклической группе

$$|a,\ b\colon\ a^j=1,\quad b^2=1,\quad (ab)^2=1|;$$

2) фундаментальная группа дополнения результата заузливания поверхности $\mathscr{P}$ посредством $Z(2, K(3, 4))$ представляется как полупрямое произведение бинарной группы тетраэдра на $\mathbf{Z}_2$; 3) фундаментальная группа дополнения результата заузливания поверхности $\mathscr{P}$ посредством $Z(2, K(3, 5))$ представляется как полупрямое произведение бинарной группы додекаэдра на $\mathbf{Z}_2$.

19. Пусть m — натуральное число и A_m — алгебраическая кривая в $\mathbf{C}P^2$, определяемая в однородных координатах уравнением $w_1{}^m+w_2{}^m+$ $+w_3{}^m=0$. Известно, что A_m есть ориентируемая поверхность рода $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, реализующая класс $m\xi_0$, где ξ_0 — естественная образующая группы $H_2(\mathbf{C}P^2)$, и что группа $\pi_1(\mathbf{C}P^2\setminus A_m)$ изоморфна $\mathbf{Z}_m$. Следовательно, если $m\equiv 0 \pmod 2$, или $m\equiv 0 \pmod 2$, или $m\equiv 0 \pmod 3$, или $m\equiv 0 \pmod 5$, то, заузливая A_m посредством подходящего узла (см. п. 17), мы получим поверхность в $\mathbf{C}P^2$ с конечной некоммутативной фундаментальной группой дополнения, диффеоморфную A_m и реализующую тот же гомологический класс. Например, в результате заузливания поверхности A_3 посредством $Z(3, K(2, 3))$ получается поверхность C, диффеоморфная тору и реализующая класс $3\xi_0$, с группой $\pi_1(\mathbf{C}P^2\setminus C)$, разложимой в полупрямое произведение группы кватернионов на $\mathbf{Z}_3$.

Добавление. Тривиальные заузливания

20. Пусть A — замкнутое связное $(n-2)$-мерное подмногообразие n-мерного многообразия X и пусть K — узел размерности $n-2$. Будем говорить, что заузливание подмногообразия A посредством K т р и в и-

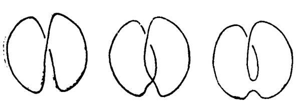

Рис. 1

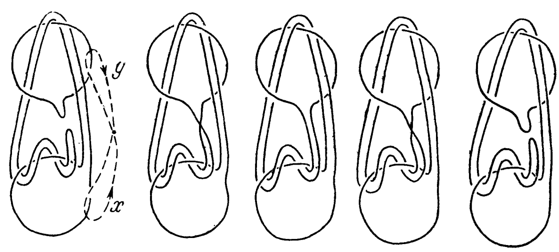

Рис. 2

а л ь н о, если пара, составленная из X и результата заузливания, диффеоморфна (X, A).

Ясно, что заузливание любого подмногообразия посредством тривиального узла тривиально. Если пара (X, A) — узел, то, в силу теоремы А. Б. Сосинского [3] о разложении узла в связную сумму простых узлов, ни один нетривиальный узел не способен тривиально заузлить A.

21. Если многообразие X односвязно и группа $\pi_1(X\setminus A)$ изоморфна $\mathbf{Z}_m$, то, в силу основной теоремы, узел K с нетривиальной группой $\pi_1(N_m(K))$ не может тривиально заузлить A.

22. *Проективную плоскость* $\mathscr{P}\subset\mathbf{R}^4$, *семейство гиперплоских сечений которой изображено на рис.* 1, *можно тривиально заузлить посредством нетривиального узла.*

Для доказательства достаточно указать такой нетривиальный двумерный узел, чтобы результат заузливания поверхности $\mathscr{P}$ посредством этого узла был изотопен $\mathscr{P}$. Покажем, что этими свойствами обладает узел *, семейство гиперплоских сечений которого изображено на рис. 2.

---

* Я должен поблагодарить М. Кушельмана, указавшего мне (по другому поводу) на этот узел и некоторые его свойства.

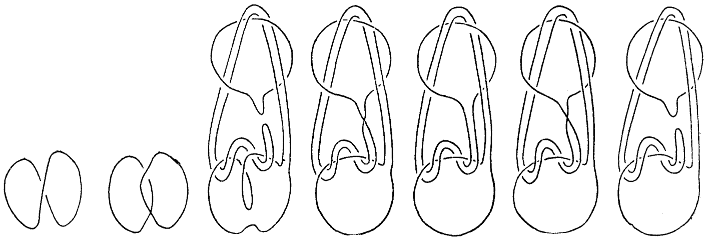

Рис. 3

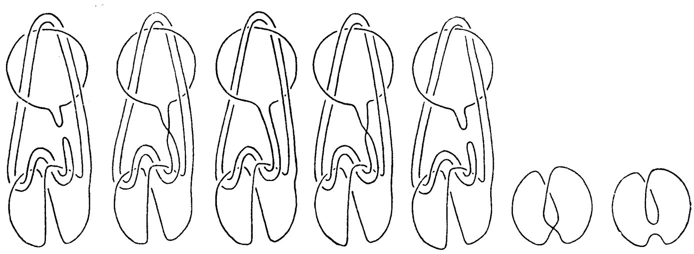

Рис. 4

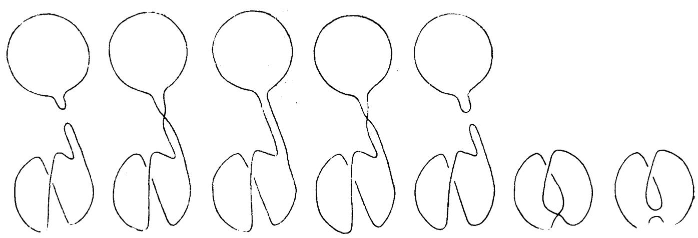

Рис. 5

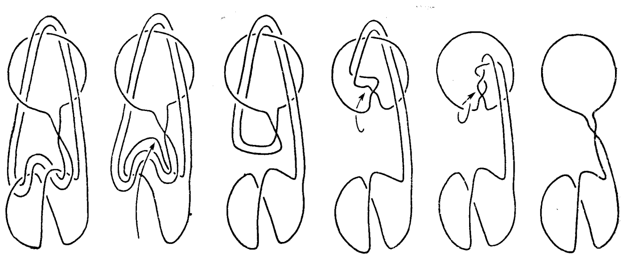

Рис. 6

С этим семейством ассоциировано копредставление

$$|x,\ y:\ xy^2x^{-2}y^{-1}x^2y^{-2}=1|$$

группы узла (петли, принадлежащие классам x и y, показаны на рис. 2; соотношение $xy^2x^{-2}y^{-1}x^2y^{-2}=1$ соответствует первой слева седловой точке; второй седловой точке соответствует тривиальное соотношение). Поскольку многочлен Александера этой группы равен t^2-2, узел не тривиален.

На рис. 3 изображено семейство гиперплоских сечений результата заузливания поверхности $\mathscr{P}$ посредством нашего узла. Перегруппируем седловые точки этого семейства так, чтобы первая слева (дезориентирующая) седловая точка стала последней; это можно сделать посредством изотопии, семейство сечений результата которой показано на рис. 4. Полученная поверхность (послойно) изотопна поверхности с семейством сечений, указанным на рис. 5 (соответствующая изотопия среднего сечения показана на рис. 6). Поверхность, изображенная на рис. 5, очевидно, изотопна $\mathscr{P}$.

(Поступила в редакцию 7/II 1972 г.)

Литература

1. Дж. Милнор, Особые точки комплексных гиперповерхностей, Москва, изд-во «Мир», 1971.
2. В. А. Рохлин, Двумерные подмногообразия четырехмерных многообразий, Функц. анализ, **5**, вып. **1** (1971), 48—60.
3. А. Б. Сосинский, Разложение узлов, Матем. сб., **81** (**123**) (1970), 145—158.
4. R. H. Fox, Covering spaces with singularities, Lefschetz symposium, Princeton Math. Ser., **12** (1957), 243—257.
5. R. H. Fox, Some problems in knot theory. Topology of 3-manifolds and related topics, Proc. the Univ. of Georgia Institute, 1961, New York, Prentice Hall, Engelwood cliffs, 1962, 168—176.
6. C. H. Giffen, The generalized Smith conjecture, Amer. J. Math., **88**, № **1** (1966), 187—198.
7. P. Orlik, Weighted homogeneous polynomials and fundamental groups, Topology, **9** (1970), 267—273.
8. P. Orlik, Smooth homotopy lens space, Mich. Math. J., **16**, № **3** (1969), 245—255.
9. R. Palais, Extending diffeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 274—277.
10. E. C. Zeeman, Twisting spun knots, Trans. Amer. Math. Soc., **115** (1965), 471—495.