Лекция о преподавании математики нематематикам

В. А. Рохлин

Замечательный математик, известный благодаря своим основополагающим работам в теории динамических систем и топологии, и воспитавший ряд первоклассных математиков — Владимир Абрамович Рохлин (1919–1984) — был блестящим лектором и много размышлял над проблемами преподавания математики. Одно время он руководил математическим лекторием для учителей на матмехе ЛГУ. Его собственный педагогический опыт был обширен и разнообразен: он преподавал во ВТУЗе, затем в педагогических институтах, и, в течение последних 20 лет жизни, в Ленинградском Государственном Университете. Подробности см. в книге В. А. Рохлин. «Избранные работы. Воспоминания.» М.: МЦНМО, 1999.

Ниже публикуются фрагменты одной из последних лекций В. А. Рохлина. Эта лекция состоялась 20 ноября 1981 года на заседании Ленинградского Математического Общества. Публикация основана на магнитофонной записи, которая была недавно расшифрована и подготовлена к печати в результате усилий А. М. Вершика, О. Я. Виро, Б. А. Лифшица и С. В. Рыбина. К сожалению, начало лекции — примерно 15 минут — утрачено. В нем Владимир Абрамович рассказал, в частности, о своем опыте преподавания студентам-нематематикам в вузах Архангельска, Иваново и Коломны в 1950-е годы.

А. М. Вершик

…В школе детям, естественно, не излагают серьезных доказательств, но им даются формулировки. Например, их учат делить дробь на дробь. Имеется правило, которое формулируется — формулировку они должны знать.

Однажды я присутствовал на докладе одного методиста, который объяснял, как учить детей делить дробь на дробь.

Он рассказал, что правило было сформулировано, после чего он прорешал для детей в качестве примеров несколько задач такого рода. Затем порешали примеры дети, а потом им была дана контрольная письменная работа. И в этой контрольной письменной работе почти все сделали одну типичную ошибку. Они, в некоторых случаях, и все в одних и тех же, почему-то не переворачивали дроби, а просто перемножали — в некоторых случаях сначала переворачивали, а в других — нет.

В чём дело?

И методист объяснил, что анализ показал причину ошибки. Причина ошибки заключалась в том, что в примерах, которые предлагались детям до контрольной, вторая дробь всегда была правильная. Дети и усвоили из этих примеров, как надо действовать. Так они и действовали.

Таким образом, правило, которое было сначала сформулировано этим преподавателем, вовсе не было формулировкой, которую дети должны были понять и которой они должны были руководствоваться. Это правило было продиктовано детям. Полагается диктовать правило — и оно было продиктовано.

То обстоятельство, что дети в этом возрасте должны научиться *понимать* правило и пользоваться этой формулировкой, а вовсе не примерами, которые им были показаны, — это обстоятельство совершенно ускользнуло от этого методиста и ото всех других, присутствовавших на его лекции.

Мне представляется зловредным заблуждением то, что сразу после формулировки даются примеры. Мне кажется совершенно несомненным, что дети должны сами, руководствуясь данным правилом, просчитывать первые примеры. Конечно, они должны приобрести навыки и дальше делать это автоматически, но ценнейшее обстоятельство, что дети на примере могут научиться и должны научиться понимать формулировку, было упущено.

Это не частный случай. На самом деле то, что я сейчас рассказал, — это основные принципы методики преподавания. Они общераспространены.[1)]

В наше время можно окончить среднюю школу и не решить, в действительности, ни одной математической задачи. Даются шаблоны, примеры, подражая которым дети и справляются со своими школьными обязанностями.

Когда на первом курсе студентам, да и часто не только на первом курсе, на упражнениях предлагаются задачи, понаблюдайте — что делают студенты. Ну, конечно, я не говорю о студентах матмеха.

У меня другой предмет — преподавание математики нематематикам. Но у меня такой опыт, что в группе студенческой, нематематической, предложенные задачи решают 2–3 человека. Остальные сидят и ждут.

[1)] Вероятно, в утраченном начальном фрагменте лекции Рохлин говорил о зловредности общепринятых принципов методики преподавания математики. К сожалению, сохранилось лишь критика принципа, согласно которому каждое правило надлежит, немедленно после его формулировки, иллюстрировать примерами его использования. – Примечание О. Я. Виро

Они, собственно, не знают, чего от них хотят. Они ждут, что задача будет решена на доске, или что им скажут, как решать такие задачи. Они не проявляют инициативы, им вообще совершенно непривычна сама постановка вопроса.

Ведь если вы скажете этим молодым людям, что они должны пойти в магазин и в аптеку, и что перерыв в аптеке тогда-то, а в магазине тогда-то, они выберут правильный порядок посещения магазина и аптеки и не пойдут в аптеку во время перерыва. Ну, конечно, всякие бывают случаи. (*Оживление.*)

Задачи, которые предлагаются студентам на занятиях, гораздо проще этой задачи про аптеку и магазин. Однако детям и в голову не приходит приниматься за их решение. И детям, и таким детям, которым уже 17–18 лет. Вот это удивительное явление, конечно же, является следствием самого преподавания математики.

Подобным же образом, удивительным является общий уровень познаний в области точных наук, не только математики, среди взрослого населения, среди людей, которые давно уже не учатся, по крайней мере, в школе или в ВУЗе, и считаются людьми образованными.

Если вы возьмете писателей, музыкантов, актеров, режиссеров, очень многих врачей (я уже не говорю о других представителях гуманитарных специальностей), вы обнаружите совершенно удивительные вещи.

Они с гордостью говорят и пишут, что не сильны в математике или физике. Они рассказывают об этом с некоторой усмешкой, и, в общем, не делают большого различия. Позвольте мне такой несколько утрированный оборот речи: для них всё это — какая-то область техники, физики — есть что-то не очень высокое, не очень достойное уважения, но, во всяком случае, нечто такое, что должно им служить.

С врачами, конечно, дело постепенно меняется. Сейчас преподают математику и философам, и представителям других гуманитарных специальностей. Однако преподают всё по тому же самому шаблону, совершенно не добиваясь какого бы то ни было понимания или проникновения в предмет.

Если вы внимательно почитаете интересные, иной раз, статьи представителей гуманитарных специальностей, вы заметите, что они очень любят пользоваться оборотами речи, заимствованными из физики и математики. Это модно, современно, но, о ужас, что они пишут! Поразительно, что они не очень представляют себе, что такое множитель и делитель, что такое степень, что такое отрицательное и положительное число. Например, можно встретить такую фразу, что имеется нечто отрицательное и потому это не ноль, а бесконечность?! (*Смех*).

Я не преувеличиваю, я мог бы привести несколько мест, где такое можно прочитать. Это всё написано известными людьми с громкими именами. Написано в газетах. Что-то они запомнили из курса начальной школы и почему-то думают, что они запомнили правильно.

Что же со всем этим делать? Это трудный вопрос.

Я не верю в то, что проблему повышения уровня образования — общего, массового — в области точных наук (и математики, в частности) можно решить быстро. Это трудная задача, которая требует огромных усилий и времени.

Возникает еще один вопрос. А можно ли и нужно ли эту задачу решать? Все образованные общества до недавнего времени были образованными гуманитарно. В истории человечества еще не было общества, которое было бы массовым образом образовано в области точных наук.

Классическое образование в образованных слоях общества в свое время было распространенным, чрезвычайно распространенным. Но точные сколько-нибудь науки сколько-нибудь серьезным образом не были достоянием образованной части общества никогда.

Многие современные развивающиеся страны имеют большую историю, уходящую в глубь веков и даже тысячелетий. Многие из них имеют свою интеллигенцию, но это интеллигенция опять же гуманитарная. Они чрезвычайно охотно изучают гуманитарные науки, но точные науки не очень охотно. Не очень охотно и не очень успешно.

Заканчивая эти предварительные замечания, я хочу сказать, что на самом деле никто не знает, ну и я, конечно, не знаю, к чему привело бы, массовое серьезное обучение математике и точным наукам, — улучшило бы это положение, или ухудшило, что улучшилось бы, что ухудшилось. Я этого не знаю, как не знает никто. Такого опыта нет. Тем не менее мы почему-то к этой цели стремимся. Мы стараемся. Как-то мы интуитивно чувствуем, что это будет хорошо, если наши дети и внуки будут приобщены к логической культуре, к математической культуре, если они будут лучше понимать точные науки.

Очень может быть, что это приведет к невиданному перевороту, к невиданным результатам, – кто знает. Но, так или иначе, до этого далеко.

Обращаясь к более узкому предмету своей лекции, я должен сказать, что обучение математике математиков — дело бесконечно более легкое, чем обучение математике нематематиков.

В конце концов, с будущими математиками мы разговариваем честно. Вот есть наука, и этой науке, которую знаем мы, мы стараемся обучить будущих математиков. Как бы мы ни были искусны или неискусны в деле чтения лекций и ведения упражнений, мы, зная предмет, способны интересующимся людям свои знания передать. Но как быть с теми, которые не интересуются и думают, что не способны, или так говорят.

Очень часто это говорят люди, которые просто погрязли, так сказать, с детства в интеллектуальной лени. Эта интеллектуальная лень —

чрезвычайно распространенное явление, иной раз это удается быстро выяснить. Поговорив недолго с человеком, утверждающим, что у него нет никаких математических способностей, что он бесконечно далек от всего этого, обнаруживаешь, что он прекрасно понял всё, что вы ему сказали.

Таким образом, вопрос о способностях в этой области — сложный вопрос, и не надо уж так прямо и просто доверять людям, которые говорят, что у них нет склонности к этим областям, у них, видите ли, гуманитарный интерес.

Обращаясь собственно к преподаванию математики нематематикам, я должен, прежде всего, объяснить, кого я называю нематематиком. Бесполезно обсуждать этот вопрос вообще. Я просто скажу, кого я имею в виду вот сейчас, говоря об этом предмете. Я имею в виду обучение математике людей, которые не собираются математикой заниматься, которые изучают ее либо для прикладных целей, либо потому, что проявляют к ней непрофессиональный интерес.

Ну, интерес этот, конечно, облегчает как-то задачу преподавателя. Очень часто этого интереса нет, а есть отвращение. Сколько угодно имеется сейчас категорий обучающихся, которые обязаны что-то учить в области точных наук, но не проявляют к этому интереса. Тем не менее, они должны сдавать экзамены и прочее. Как быть с этими людьми? Как быть с людьми, которые проявляют интерес к математике, но обучаются по программам, по которым научиться нельзя? Имеется много математических программ для студентов ВТУЗов[2)] самого разного содержания, самого разного объема.

Однако часто и программы, и соответствующие учебники не являются самостоятельными, а представляют собой просто испорченные курсы, по которым готовят математиков. Всё тот же порядок изложения, всё те же пределы, та же производная, тот же интеграл, те же кривые второго порядка, и так далее, и тому подобное.

Изложение ведется в том же порядке, но менее понятно. Нет надлежащих доказательств, которые позволили бы понять суть дела. Нет литературного таланта у авторов учебников. Всё это скучно, непонятно. Хорошо, если лектор сможет заинтересовать студентов и что-то им объяснить, так сказать, за рамками написанного.

Это положение вещей является совершенно массовым, и не только в нашей стране оно таково, как я говорил. Это явление вполне международное. И, как мне кажется, суть дела здесь в следующем. По-видимому, высшие технические учебные заведения, педагогические институты и средние школы требуют совершенно особых курсов математики. Для каждой категории обучающихся (достаточно большой, конечно) нужен,

[2)] Аббревиатура ВТУЗ означает высшее техническое учебное заведение.

по-видимому, свой курс. И вовсе не тот, по которому учат математике математиков.

Главный дефект этих курсов, главная причина их неуспехов, как мне кажется, заключается в следующем. Никто из крупных математиков никогда не занимался составлением курса математики для нематематиков. Сейчас я говорю уже не о средней школе, а о высшей, и имею в виду следующее.

Вот обычно, перед тем, как излагать дифференциальное и интегральное исчисление, студентам преподают теорию пределов. Теперь и в средней школе то же самое. Там тоже преподают пределы. Между тем, и это яркий пример имеющегося положения вещей, пределы — это самая трудная часть курса для понимания и, что самое интересное, — совершенно ненужная. И дифференциальное исчисление, и интегральное исчисление, и, вообще, всю классическую математику, я уже не говорю о математике конечной, прекрасно можно изложить без пределов. Более того, они там совершенно не нужны. Это совершенно чужеродное явление, чужеродный предмет, который был внесен в эту область людьми, стремившимися *обосновать* анализ.

Между тем, цель *обоснования* во ВТУЗе, конечно, не достигается, и даже не ставится. Уже из этого примера видно, что эти курсы совершенно не продуманы и просто представляют собой ухудшенные варианты университетских курсов.

Сейчас я объясню свою мысль, относящуюся к пределам, чуть более подробно.

Вот когда я учился в школе (возможно это и сейчас так), мне объясняли, что такое площадь круга. Мне говорили, что площадь круга — это предел некий, и потом что-то писали, говорили, и получали какую-то формулу для площади круга. Трудно было понять, что там рассказывали, а когда я стал математиком, то мне стало совершенно ясно, почему это было трудно понять — потому что всё это сплошной вздор.

Никто из обучавшихся вместе со мною не сомневался в том, что он знает, что такое площадь круга. Скорее нам было странно, что для круга определяется площадь, но почему-то она не определяется для других фигур. Нам было странно то, что площадь круга, которая нам совершенно понятна, определяется нам через какие-то пределы, которые нам совершенно непонятны. Нам было странно, конечно же (и всем детям странно, которые немножечко об этом размышляли), что какие-то теоремы о пределах нужны для того, чтобы установить совсем ясные и простые вещи, в которых мы не сомневались.

Ну, а для чего же вообще определять площадь круга и доказывать, что она равна πR^2? Почему не объявить просто, что площадь круга есть, по определению, πR^2, какая разница? По-видимому, разница в том, действительно серьезная разница, что площадью обладает не один круг, что площадь — это общее понятие, что площадь определена для широкого класса фигур, она обладает всем известными свойствами, которыми и пользуются и которые делают площадь понятием полезным.

Таким образом, отношение школьного курса к понятию площади было тогда (а, может быть, и сейчас во многих случаях остается) совершенно диким.

Но таково же и отношение в преподавании математики во ВТУЗе и к интегралам, и к производной, и к объему, и к массе, и к плотности, и к заряду, и к моменту инерции и, вообще, ко всем математическим и физическим величинам такого дифференциального или интегрального характера.

С точки зрения человека, который не является профессиональным математиком, вещи эти существуют, они не требуют определения — они требуют вычисления, и они должны быть готовы для применений. Вот то, что нужно.

Точке зрения, с которой их нужно определять, не место в таком преподавании — по крайней мере, человеку, который не сомневается в существовании площади у всех фигур и в свойствах площади, такому человеку не нужно определять площадь. Нужно изучать ее свойства, нужно научить его эту площадь вычислять.

Совершенно то же относится и к другим математическим понятиям. Ну вот, возьмите понятие интеграла. Я хотел бы по этому поводу задать один вопрос исторического характера. Скажите, Архимед владел понятием интеграла или нет? На этот счет существуют разные мнения. Одни говорят: владел. Другие говорят: не владел. Я выскажу свое собственное мнение. Я думаю, что Архимед, величайший математик, возможно, всех времен, не владел понятием интеграла. И вот почему я так думаю.

Архимед многократно, и многими различными способами вычислял интеграл от x^2 между нулем и единицей. Он вычислял его, когда занимался площадью участка плоскости, ограниченного отрезками прямых и дугой параболы. Он вычислял этот интеграл, когда вычислял объём шара, и во многих других случаях. Каждый раз он употреблял особые приемы, очень остроумные, гениальные. Но, по-видимому, он не знал, что это всё одно и то же. Хотя, наверное, чувствовал.

Причина этого совершенно понятна. Греки не владели понятием действительного числа. Объем и площадь были для них совершенно разными сущностями, геометрическими сущностями, которые они не сравнивали. Например, $x + x^2$, такое выражение, которое можно написать, вызвало бы протест. Человек, образованный по-древнегречески, сказал бы, что x и x^2 никак не возможно складывать. Это все равно, что складывать линии с плоскими фигурами. А мы складываем. У нас есть числа. И вот числовым понятием интеграла Архимед, по-видимому, не владел. Если бы он им владел, то он, вне всякого сомнения, не вычислял бы один и тот же интеграл много раз.

С другой стороны, Архимед оставил нам метод исчерпывания, который, по-видимому, как нельзя более подходит для преподавания математики нематематикам. В силу этого метода, вместо всей теории пределов, нужен один единственный факт. Я его сформулирую. Факт этот очень несложен. Он состоит в том, что если неотрицательное число меньше любого положительного числа, то это нуль. Повторяю, если неотрицательное число меньше любого положительного числа, то это нуль.

Факт этот, конечно, нетрудно доказать. Но, может быть, его не нужно и доказывать. После того, как вы знакомы с этим фактом, вы можете на его основе доказывать все равенства, которые встречаются в дифференциальном и интегральном исчислении и их применениях и, вообще, во всём анализе, — при условии, что вы не занимаетесь теоремами существования.

Вы не доказываете существования. Именно для доказательства существования и существует теория пределов.

Если вам не нужно доказывать существование площади, то теория пределов не нужна в этом вопросе. Если вам не нужно доказывать существование интеграла, то теория пределов не нужна — и так далее. Если вам нужно только вычислять, то вы можете обойтись без теории пределов. Это сразу делает дифференциальное и интегральное исчисление бесконечно более простым.

[ПЕРЕРЫВ]

Я говорил о теории пределов. Почему эта теория вызывает у меня такое желание столь круто с ней расправиться, изгнать ее из курса математики для нематематиков?

Я не хочу сказать, что ее необходимо отовсюду изгнать, нет. Я хочу сказать только следующее. Теория пределов в настоящее время служит не средством ввести основные понятия анализа, а очень высоким и трудно преодолимым порогом, через который нужно перебраться для того, чтобы что-нибудь понять.

И порог этот — совершенно лишний! Он, как правило, непреодолим для студентов-нематематиков и является совершенно лишним.

Позвольте я приведу пример, который это продемонстрирует. Я в качестве примера мог бы взять дифференциальное исчисление или интегральное. Я возьму более простой случай, или, лучше сказать, предмет, о котором быстрее можно рассказать, — интегральное исчисление.

Вы должны объяснить начинающим, что такое интеграл. Конечно, вы можете начать, и это, вероятно, правильно, просто с площади, как это обычно делают.

А что мешает вам объявить интегралом саму эту площадь? Ведь никто из ваших слушателей не сомневается в существовании площади. Вам пришлось бы потратить много времени на то, чтобы заставить ваших слушателей в этом существовании усомниться.

Конечно, имея в своем распоряжении площадь, вы очень легко можете построить интегральные суммы. Вы скажете своим слушателям, что у площади имеются общеизвестные свойства. Я вам их назову.

- ▷ Если одна фигура содержится в другой, то площадь первой фигуры не превосходит площади второй. Трудно не согласиться с этим, и все с вами согласятся.
- ▷ Вы можете сказать, что если вы складываете, составляете, две фигуры без общих внутренних точек, то их площади складываются, и с этим согласятся.
- ▷ Вы скажете, что площадь не меняется, если фигура перемещается как твердое тело по плоскости. И с этим согласятся.
- ▷ И наконец, вы скажете, что площадь единичного квадрата равна единице.

Эти четыре свойства, как хорошо известно, однозначно определяют площадь на широком классе фигур. На классе всех квадрируемых фигур.[3)]

Эти же свойства, в чуть-чуть измененном виде, однозначно определяют интеграл на широком классе функций. Таким образом, вы можете, начав с площади, определить интеграл его свойствами, в которых никто не сомневается, поскольку речь идет о площади.

В дальнейшем вы замечаете, что если вы построите для так называемой криволинейной трапеции, которая определяется графиком функции, нижние и верхние римановские суммы (а если хотите, и лебеговские суммы — никакой разницы!), то интересующая вас площадь будет заключена между этими двумя вспомогательными площадями. Это прямо следует из того, что я сказал. Вы пишите то самое неравенство, которое обычно пишут в курсах интегрального исчисления: нижняя сумма не превосходит интеграла, а интеграл не превосходит верхней суммы. Одним словом, интеграл есть то единственное число, которое заключено между нижними и верхними суммами.

[3)]См. статью В. А. Рохлина *Площадь и объём* в книге «Энциклопедия элементарной математики, книга пятая — Геометрия» с. 7–89. М.: Наука, 1966.

Всё это на языке площадей, вполне очевидно, не вызывает никакого сомнения, легко усваивается. Вместе с тем, это дает способ вычисления площадей. Ни о каких пределах нет речи. Если вам нужно доказать равенство какое-нибудь — между двумя интегралами или равенство какого-нибудь числа какому-нибудь интегралу — то просто замечаете, что оба числа, равенство которых вы хотите доказать, заключены между нижними суммами, с одной стороны, и верхними суммами, с другой стороны. Следовательно, они равны, потому что разность между теми и другими, при надлежащем выборе подразделения, может быть сделана меньшей любого положительного числа. А она неотрицательна. Значит это ноль.

Вопрос о том, как это технически осуществляется в каждом отдельном случае, не возникает. Вся эта техника имеется. Она подробно описана во всех обычных курсах, только там всё поставлено с ног на голову.

Совершенно так же вы можете определить и производную несколькими способами. Конечно, будет лучше, если вы начнете с наглядного примера. Скажем, с касательной или со скорости, как это обычно делают. Но никакой нужды в теории пределов здесь нет. Это не значит, что вы не сможете позже, когда вы пожелаете или если программа этого действительно разумным образом требует и лица, которых вы обучаете, должны действительно познакомиться с понятием предела, это не значит, что вы не можете потом объяснить, что, в действительности, производная есть такой-то и такой-то предел. Но первоначально это совершенно не нужно, а для многих категорий обучающихся это и вообще не нужно.

Одним словом, я предложил бы следующий подход к понятиям анализа, который я условно назову *наивно-аксиоматическим.* Этот подход состоит в том, что вы на самом деле определяете интересующие вас понятия аксиомами.

Например, в случае интеграла это вот какие аксиомы.

Интеграл постоянной — это произведение этой постоянной на длину интервала интегрирования. Конечно, эта аксиома не появится просто так. Сначала вы поговорите о площади. Всё это будет подготовлено. Но вот вам аксиома номер один.

Аксиома номер два: если одна функция не превосходит другой по значению в каждой точке, то интеграл первой функции не превосходит интеграла второй.

И третья аксиома: если вы интегрируете функцию по промежутку, который составлен из двух меньших промежутков, то соответствующий интеграл равен сумме двух других интегралов, распространенных на эти промежутки.

Это и всё! Трудно придумать менее сложный подход. Конечно, в применении к площади такие вещи можно говорить сразу — к площади все привыкли, в применении к интегралам — несколько позже, но на основании этих свойств великолепно вычисляются все интегралы. В действительности, во всех учебниках они именно на основании этих свойств и вычисляются.

Более того, схемы применений понятия интеграла в естественных науках и в самой математике необычайно упрощаются. Если вы хотите, например, доказать, что некий объём есть такой-то интеграл, то вы просто убеждаетесь в том, что выполнены эти три свойства. В результате вам ничего не надо доказывать. Так как единственность у вас есть, объём оказывается интегралом, и сразу получается для него формула, будь то объём тел вращения, будь то объёмы в других ситуациях.

То же относится к статическим моментам, вычислениям центров тяжести, моментам инерции, да и вообще к любым механическим, физическим и геометрическим величинам. Никакой нужды в каких бы то ни было предельных переходах и вообще во всём том длинном и занудном изложении, которым наполнены втузовские учебники, никакой необходимости в этом нет.

Разумеется, я привожу примеры. Их можно было бы привести очень много. Ну а если говорить о деле серьезно, то, конечно, надо признать, что курс математики для ВТУЗа просто не составлен. Он не составлен не в том смысле, что нет программ или что нет учебников — есть программы, есть учебники. Под курсом я понимаю нечто другое.

Чтобы не было недоразумений, я скажу в двух словах, как я понимаю это выражение: составить курс. Представьте себе текст. Конечно, более длинный, чем текст программы, но более короткий, чем текст учебника. Текст, из которого квалифицированный человек может точно узнать, что и как излагать во всех деталях.

Такой текст вовсе не обязательно будет доступен обучающимся. Он должен быть доступен обучающим. К сожалению, если бы такой текст был составлен для средних школ, он не был бы доступен обучающим. Но, такой текст, написанный или просто содержащийся в голове, вот это — составленный курс.

Так вот я хочу сказать, что составленного курса математики, в таком вот духе, о котором я говорю, пока не существует. Конечно, есть много возможных вариантов в этом плане, и я надеюсь, что такие курсы будут составлены, и по ним будут написаны учебники.

Те немногие слова, которые были сказаны об интегральном исчислении, конечно, относятся не только к нему. Я думаю, что даже и студентам-математикам университета совсем не повредил бы семестровый предварительный курс анализа, в котором были бы введены основные понятия не с, так сказать, буквоедской точки зрения, а эти понятия были бы описаны по существу, с перспективой применений, с изложением геометрического и физического смысла и с неограниченным материалом для упражнений. После того, как это сделано, можно приступать, для математиков, уже к систематическому и тщательно составленному изложению.

Такие опыты частично проводились. Я не знаю, как обстоит дело сейчас вот у нас, скажем, на математико-механическом факультете в Ленинграде в этом отношении. Делались ли такие вещи у нас, мне неизвестно.

Мне представляется, что и при профессиональном обучении такой наивно-аксиоматический метод в начале мог бы оказаться полезным. Во всяком случае, мне кажется, что он совершенно необходим при обучении математике нематематиков.

Скажу несколько слов о более возвышенных частях курса математики. Ну, скажем, студентам-нематематикам излагают ведь и не только дифференциальное и интегральное исчисления и не только ряды, скажем. Им излагают, например, криволинейные интегралы, им излагают интегралы по поверхностям, замену переменных в кратных интегралах и так далее и тому подобное.

Это вещи уже технически не очень приятные, они могут представлять известные трудности и технически. Как быть с ними? Тут, конечно, не всегда обойдешься наивно-аксиоматическим методом. Тут приходится идти на компромиссы.

Совсем недавно я по подобному поводу имел беседу с одним из ленинградских преподавателей, которому нужно излагать студентам замену переменных в двойном интеграле. Как это сделать? Будучи математиком, преподаватель не хочет никого надувать. Ему стыдно надувать кого бы то ни было, в том числе и своих студентов. Он хочет им что-то *доказывать*.

С другой стороны, предмет довольно сложен — замена переменных в двойном интеграле. Предлагаются разные методы. Можно постепенно заменять переменные под знаком интеграла, пользуясь формулой замены переменной в простом интеграле. Представить интеграл как повторный — вот такой прием предлагается. И многие другие. Здесь, как мне кажется, действует такая привычка, которая имеется у профессиональных математиков, — *доказывать*.

Но ведь, собственно говоря, чему мы должны научить будущего инженера, будущего физика, я уж не говорю — будущего философа? Мы должны научить его, прежде всего, пониманию. Он должен понимать предмет. Мы должны, и это, вероятно, главное, отказаться от такого изложения вещей, которое нашим студентам не понятно. Студентам и школьникам.

Вполне массовым образом студентам преподают вещи, которых они не понимают. Ну какая польза в том, что студент ВТУЗа будет в каком-то смысле, довольно условном, конечно, доказывать формулу замены переменных в кратном интеграле? Не лучше ли будет, если он будет понимать эту формулу? Хотя бы на наглядном уровне?

Ну, например, можно ли или нельзя вначале как-нибудь объяснить студентам, как ведет себя площадь при линейном преобразовании? Вот просто подвергают линейному преобразованию. Как ведет себя площадь треугольника, многоугольника? Это, вероятно, можно объяснить. Можно, вероятно, объяснить, что в малом, в гладкой ситуации примерно так ведет себя площадь и при нелинейном преобразовании. Так что появление якобиана под знаком интеграла его уже не удивит. Но, конечно, он должен сначала к якобиану привыкнуть.

Здесь запись была прервана, по-видимому для смены кассеты с пленкой. Вероятно, в утраченном фрагменте речь шла, в частности, о теореме о неявной функции.

...аксиомы, которые устанавливают равносильность разных подходов ну, скажем, к заданию поверхности в пространстве. Поверхность в пространстве может быть задана параметрически тремя уравнениями, может быть задана одним уравнением — неявно, и может быть, наконец, задана как график функции. Все эти три подхода эквивалентны и эквивалентность устанавливается теорией неявных функций.

К моему удивлению, это мало кто знает, даже из студентов-математиков, пока не встречаются с этим остро, в других областях, где это используется. Курсы анализа это редко излагают. В учебниках анализа я этого не видел. Связь этого явления с отображениями излагается в немногих местах. Но может быть студенту ВТУЗа всё это можно изложить без так сказать буквоедства, так, чтобы он это понял (в примерах, которые понятны, в более общих формулировках). Одним словом, по-видимому, помимо наивно-аксиоматического подхода, о котором я говорил, нужна еще бóльшая свобода обращения с материалом, когда речь идет о преподавании математики нематематикам, а иной раз и математикам.

По-видимому, надо вспомнить преподавателю, как он сам воспринимал всё это, когда учился. Обычно мы такие вещи забываем. Вот я, например, могу сказать о себе, что я совсем не помню, как и что я воспринимал в школе. Может быть, я помнил это, когда был студентом еще, потом постепенно забыл. Может быть, необходимо изучение этого вопроса и на таком уровне: нужно привлечь учащихся к этой деятельности в известном смысле и послушать, что скажут они. Ведь мы обычно этим занимаемся недостаточно.

В качестве примера я приведу следующее. Вне всякого сомнения, студенты, слушающие тот или иной курс, ставят преподавателю оценки. Они не ставят ему оценку в зачетную книжку, но на самом деле у каждого преподавателя имеется некоторая устойчивая средняя оценка. Так сказать, рейтинг, как у шахматистов. В отличие от шахматного рейтинга, этот рейтинг не публикуется и даже держится в секрете. Обычно. Я не буду обсуждать вопрос о том, хорошо это или плохо. Я думаю, каждый сам знает, хорошо это или плохо. Но, несомненно, что здесь помощь студентов была бы неоценима.

Я думаю, что их помощь неоценима и при составлении курса, по которому студенты обучаются. Конечно, происходит смена поколений: одни студенты помогут нам в этом, а учить мы после этого будем других студентов. Но тем не менее, я думаю, что эта деятельность, которой с такой самоуверенностью занимаются преподаватели, без помощи обучающихся не может быть успешной. С учащимися надо консультироваться по этим вопросам в первую очередь.

Вот, не так давно у меня была встреча с девочкой, которая учится в средней школе и живет со мной рядом, соседка. Я как-то ее приглашал в гости. Она пришла ко мне вечером и сказала: «Вот я пришла, Вы меня звали, я пришла. У меня не получается задача.» (*Веселье*).

Ну хорошо. Стал я смотреть, что за задача, и пришел в ужас. Во-первых, решить эту задачу нельзя, потому что непонятно, что там спрашивается. Задача, профессионально говоря, составлена безграмотно. Догадаться можно, чего хочет вопрошавший. Мы догадываемся. Но я с удивлением обнаружил, что я-то догадывался, а она всё понимала с самого начала. (*Веселье*). Этого мало: когда я начал решать эту задачу, выяснилось, что она прекрасно знала всё то, что я говорю. Ей это всё давно известно, так я подумал сначала. Из дальнейшего разговора выяснилось, что она этого ничего не понимает. Она все эти слова знает. Оказалось, что этих слов совершенно достаточно для решения задачи. И она знает эти слова.

Такого рода опыт совершенно неоценим для преподавателя и для лиц, составляющих программу. Имейте в виду, что речь идет о массовом обучении. Не об обучении детей, которые собраны в специализированные школы, которые много сами слышали математическую речь и сами говорят на математическом языке. Нет, это дети, которые не обучаются математике профессионально и не собираются ею профессионально заниматься. Они слышат все эти слова, они научаются их произносить, но понимание этих слов у них какое-то странное. То ли его нет совсем, то ли оно какое-то странное. Во многих случаях обнаруживается совершенно неожиданное понимание.

Вот некоторые слова, математические термины, оказывается, эта девочка понимала совсем не так, как я. Ну, разумеется, надо бы выяснить, как понимает эти слова ее учительница. В этом, конечно, всё и дело.

Позвольте мне обратить ваше внимание еще на одну особенность преподавания математики и восприятия этого преподавания. Эта особенность заключается в следующем. Это — обучение, так сказать, почти что волшебство, обучение оккультное, если можно так выразиться.

Вот много лет назад я видел программу вступительного экзамена в высшие учебные заведения. Программа эта была утверждена и подписана высокими лицами, и в этой программе я увидел такую странную вещь: записано там решение уравнений первой степени с одним неизвестным и два типа уравнений,

$$ax = b, \text{ это один тип, а другой } ax + b = 0. \ (\textit{Смех}).$$

Это — разные типы, оказывается! В чём дело?

Понять это мне помогла другая девочка. Из разговора с ней я понял, что все числа — положительные. (*Смех*). Отрицательных чисел не существует, и, на самом деле, отрицательное число — это вот что такое. Это положительное число, перед которым для всеобщего обозрения стоит знак минус. (*Смех*). Ну если так, то, конечно, это разные типы уравнений. Ведь если b перенести из одной части равенства в другую, так знак изменится, а нужно, чтоб числа были положительные! Вот a положительно, b положительно — ясно, что, действительно, два типа уравнений.

Как же произошло, что это попало в программу вступительного экзамена? Это попало из школьной программы. Было такое требование выставлено, чтоб программы вступительных экзаменов не отличались от школьной программы. А то что это такое будет? Как же сдавать такой экзамен? Ну вот, из школьных программ это перекочевало в программы вступительных экзаменов.

А как же это попало в школьную программу? Ясно как. Школьные программы составляются специалистами по преподаванию математики, которые знают, как преподавать математику, и говорят, что преподавать ее надо вот так. Они знают, как преподавать математику, но они, наверно, и в самом деле думают, что все числа положительны. (*Оживление*).

Конечно, никакой учитель в классе не говорит, что все числа положительны. Это не написано в учебнике, как же он это будет говорить? Но он так думает! И если он так думает, то так же будут думать его ученики. Как это им передается? Это, конечно, интересный вопрос, но это совершенно несомненно.

Понимание предмета учителем передается учащимся. Понимание предмета лектором передается слушателям. Оно передается таинственными путями, но очень надежно. И это надо иметь в виду. Никакое внешнее обучение преподавателя, никакое правильное изложение в учебнике, программе не поможет делу, если учитель думает иначе.

Учитель, преподаватель — это в этом смысле центральная, решающая фигура. Я хочу еще раз повторить, что совершенно не верю в то, что можно как-то изменить или улучшить преподавание, улучшая программы, учебники, но не затрагивая как следует подготовку учителей.

Существуют, правда, методы переподготовки, всевозможное усовершенствование и так далее. Насколько они эффективны? Я не имею на этот счет фактических данных. Имею только личный опыт и опыт моих друзей. И тут я должен высказать весьма мрачный прогноз. По моим сведениям, переподготовка, дополнительная подготовка лиц, изучавших математику в высшем учебном заведении, педагогическом институте, ни к чему не приводит. Если за годы студенчества они ничему не научились, если за долгие годы последующего преподавания они умудрились,... я боюсь сказать забыть — это будет лучше, если они умудрились,... ну, хорошо, забыть то, чему они там научились, то, конечно, дополнительная подготовка может привести только к внешним изменениям: они привыкнут к новым словам, они привыкнут к новым методикам, но, в сущности, это ничего не изменит.

Мне кажется, что массовое преподавание математики может быть улучшено только одним путем. Это медленный, длительный, трудный путь, но, может быть, он возможен. Этот путь состоит в том, что должна быть постепенно расширена подготовка квалифицированных преподавателей.

Людей, обладающих достаточными способностями для этого, совершенно достаточно. К сожалению, их как следует не учат. И по понятным причинам: учить некому.

В прежние времена, когда преподаватели математики для тогдашних средних школ все были выпускниками университета (это было давно, школа не была массовой), положение было лучше. Мы часто слышим, читаем, что вот раньше преподаватели математики были лучше. Они лучше знали предмет и лучше преподавали. Я не знаю, правда это или нет, но если это правда, то это без сомнения объясняется тем, что тогда эти самые преподаватели обучались не в педагогических институтах, а в *немногих* университетах. Теперь они обучаются, как правило, в педагогических институтах и во *многих* университетах.

Я бы не хотел, чтобы эта лекция оставила такое мрачное воспоминание о себе. Я хочу сказать и нечто оптимистическое под конец. Я думаю, что если нужно сто лет для того, чтобы постепенно подготовить достаточное количество квалифицированных преподавателей и наладить в школе, средней и высшей, хорошее обучение математике, если ста лет для этого достаточно, то это хорошо. (*Оживление*).