# Capítulo 5

# Matrizes de transformações lineares

Na[1] dimensão *finita* consideramos uma transformação linear

$$A : E \to F$$

entre espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Denotamos o operador identidade de

$$I_E : E \to E, \quad v \mapsto v$$

e o em $F$ de $I_F$, veja (4.1.2). Agora será muito útil escrever uma base ordenada na forma de uma lista ordenada. Sejam $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ e $\tilde{\mathcal{U}}$ bases ordenadas de $E$ e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ e $\tilde{\mathcal{V}}$ de $F$. *Nas seguintes seções* vamos estabelecer e provar os detalhes da seguinte diagrama comutativo[2]

$$\begin{tikzcd}
{[v]_{\mathcal{U}}} \arrow[dd] & \mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\mathbf{a}:={[A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}}}"] \arrow[dr, "\mathcal{U}", "\simeq"'] \arrow[dd, "\mathbf{p}:={[I_E]_{\mathcal{U},\tilde{\mathcal{U}}}}"', "\simeq"] & & & \mathbb{K}^m \arrow[dl, "\mathcal{V}"', "\simeq"] \arrow[dd, "\simeq"', "\mathbf{q}:={[I_F]_{\mathcal{V},\tilde{\mathcal{V}}}}"] \\
& & E \arrow[r, "A"] & F & \\
\mathbf{p}\,[v]_{\mathcal{U}} = [v]_{\tilde{\mathcal{U}}} & \mathbb{K}^n \arrow[ur, "\simeq", "\tilde{\mathcal{U}}"'] \arrow[rrr, "\tilde{\mathbf{a}}:={[A]_{\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{V}}}}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[ul, "\simeq"', "\tilde{\mathcal{V}}"]
\end{tikzcd} \tag{5.0.1}$$

No diagrama $\mathbf{p}$ é a chamada **matriz de passagem** da base $\mathcal{U}$ de $E$ para $\tilde{\mathcal{U}}$. Ela leva, dado $v \in E$, o vetor coordenada $[v]_{\mathcal{U}}$ em respeito à base $\mathcal{U}$ ao vetor coordenada $[v]_{\tilde{\mathcal{U}}}$ em respeito à base $\tilde{\mathcal{U}}$. Além disso $\mathbf{a}$ é a **matriz da transformação linear** $A : E \to F$ em respeito às bases $\mathcal{U}$ do domínio e $\mathcal{V}$ do contra-domínio.

[1] Cap. 5 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 26 de março de 2024

[2] **Comutatividade** significa que caso entre dois espaços vetoriais no diagrama tem dois caminhos de flechas, então não importa o qual usamos. Note que a flecha de um isomorfismo '$\simeq$' também existe na direção reversa (no diagrama só mostramos uma flecha para simplicidade).

**Comentário 5.0.5** (Interpretação da parte triangular esquerda do diagrama)**.** Sejam $\mathcal{U}$,$\tilde{\mathcal{U}}$, e $\mathcal{W}$ bases do espaço vetorial $E$ da dimensão $n$. Sejam

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}:& \quad \text{a matriz de passagem de } \mathcal{U} \text{ para } \tilde{\mathcal{U}}\\
\mathbf{r}:& \quad \text{a matriz de passagem de } \tilde{\mathcal{U}} \text{ para } \mathcal{W}
\end{aligned}$$

Vamos entender nesta seção que sob estas hipóteses vale o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathbf{rp} & \quad \text{é a matriz de passagem de } \mathcal{U} \text{ para } \mathcal{W}\\
\mathbf{p^{-1}} & \quad \text{é a matriz de passagem de } \tilde{\mathcal{U}} \text{ para } \mathcal{U}
\end{aligned}$$

## 5.1 Bases induzem isomorfismos

**Definição 5.1.1** (Um símbolo com duas significados)**.** Usamos *o mesmo símbolo* para a base ordenada e para o isomorfismo determinado pela: Escrevemos

$$\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \to E, \quad x \mapsto \mathcal{U}x$$

para a transformação linear determinada pela base $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, ou seja

$$\mathcal{U}x := (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \underbrace{\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n}_{=v} \in E. \tag{5.1.1}$$

Obviamente a aplicação $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \to E$ é linear. Ela é injetiva como a base $\mathcal{U}$ é LI (Corolário 3.1.2) e sobrejetiva como $\mathcal{B}$ gera $E$.

*Portanto $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \to E$ é um isomorfismo (símbolo $\simeq$).*

No caso $E = \mathbb{K}^n$ a base canônica $\mathcal{E}^n$ produz o operador identidade $\mathcal{E}^n = I_{\mathbb{K}^n}$.

Seja $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ uma base ordenada de $E$. Dado $v \in E$, então $x := \mathcal{U}^{-1}v \in \mathbb{K}^n$ é o vetor coordenada $[v]_{\mathcal{U}}$ de $v$ em respeito à base $\mathcal{U}$ introduzido em (3.1.2): Com efeito como $\mathcal{B}$ é base exprime-se $v$ como CL dos elementos de $\mathcal{B}$ com coeficientes únicos $x_i$, ou seja $v = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n =: \mathcal{U}x$. Assim

$$\mathcal{U}^{-1}v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v]_{\mathcal{U}} \in \mathbb{K}^n. \tag{5.1.2}$$

O isomorfismo $\mathcal{U}^{-1} : E \to \mathbb{K}^n$ é chamado de **sistema de coordenadas** em $E$. No caso de $E = \mathbb{K}^n$ com base canônica $\mathcal{U} = \mathcal{E}$ abreviamos $[v] := [v]_{\mathcal{E}}$.

## 5.2 A matriz em respeito a uma base

Dado uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e bases $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de $E$ e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ de $F$, então podemos representar os elementos $A\xi_j \in F$ como combinação linear na base $\mathcal{V}$ com coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{K}$ únicos. Com efeito

$$\boxed{A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj}.} \tag{5.2.1}$$

Note como pela nossa definição o índice do vetor $\eta_i$ coincide com o primeiro (mais perto) índice do escalar $a_{ij}$ o qual escrevemos *atrás* do vetor.

**Definição 5.2.1.** Os escalares $a_{ij}$ definidos por (5.2.1) formam uma matriz $m \times n$ chamada de **matriz de $A$** em respeito às bases $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, símbolo

$$[A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} := \mathbf{a} = [a_{ij}] := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{5.2.2}$$

No caso $E = F$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ abreviamos $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$.
No caso $E = F = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{E}$ abreviamos $[A] := [A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.

**Comentário 5.2.2** (Colunas são os vetores coordenadas das imagens da base)**.** Note-se que a matriz $\mathbf{a}$ tem como colunas

$$\mathbf{a}_{\bullet j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [A\xi_j]_{\mathcal{V}}$$

os vetores coordenadas das imagens $A\xi_j$, ou seja

$$[A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = \left[[A\xi_1]_{\mathcal{V}} \dots [A\xi_n]_{\mathcal{V}}\right] = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \dots \mathbf{a}_{\bullet n}] = \mathbf{a}.$$

**Exercício 5.2.3.** Seja $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ a base canônica e $A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinado por

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \ \ 2e_1 - e_2 - e_3 \\ Ae_2 &= -e_1 + e_2 \\ Ae_3 &= -e_1 \qquad + e_3. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Considere a base ordenada $\mathcal{V} := (e_1, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$ e determine a matriz $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{E},\mathcal{V}}$. (Vamos reencontrar $A$ nos Exercícios 5.4.8 e 6.6.3.)

**Exercício 5.2.4** (Identidade $I = I_E$)**.** Mostre que a matriz da identidade

$$[I]_{\mathcal{U}} := [I]_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathbb{1} \tag{5.2.4}$$

sempre é a matriz identidade se usamos a mesma base $\mathcal{U}$ para o domínio e o contra-domínio de $I \colon E \to E$.

**Exercício 5.2.5** (Homotetias $\alpha I$)**.** Seja $E$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $n < \infty$. Suponha que $A \in \mathcal{L}(E)$ não seja um múltiplo do operador identidade: $A \neq \alpha I$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Mostre que existem bases de $E$ do tipo $\mathcal{U} = (u, Au, \dots)$ e $\mathcal{V} = (v, 2Av, \dots)$ tais que as matrizes $[A]_\mathcal{U}$ e $[A]_\mathcal{V}$ de $A$ são diferentes.

2. Conclua que as **homotetias** (múltiplos $\alpha I$ do operador identidade) são os únicos operadores cuja matriz não depende da base escolhida.

3. Conclua que as matrizes do tipo $\alpha \mathbb{1}_n$ são os únicos que comutam ($\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$) com todas matrizes invertíveis $n \times n$.

[ad 1.: Conclua $n \geq 2$. Mostre que existe conjunto LI da forma $X = \{v, Av\}$. Depois estenda $X$ para receber uma base $(\xi_1 = v, \xi_2 = Av, \dots, \xi_n)$ de $E$.]

**Exercício 5.2.6.** Suponha que $E = F \oplus G$ e $n = \dim E$ é finita. Mostre que existe uma base ordenada $\mathcal{X}$ de $E$ tal que veja (7.1.1) e (7.2.1)

$$[P_{F,G}]_\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathcal{O}_{k,\ell} \\ \mathcal{O}_{\ell,k} & \mathcal{O}_\ell \end{bmatrix}, \qquad [S_{F,G}]_\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -\mathbb{1}_\ell \end{bmatrix}.$$

**Teorema 5.2.7.** *Levando transformações lineares às suas matrizes (5.2.2)*

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_{\mathcal{U},\mathcal{V}} : \mathcal{L}(E,F) &\xrightarrow{\simeq} \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

*é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ base de $E$ e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ de $F$.
Linear. Escreve (5.2.2) para $A$, para $B$, e depois adiciona as duas equações e use $(A + B)\xi_j = A\xi_j + B\xi_j$.
Injetivo. Suponha $(a_{ij}) := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = [B]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} =: (b_{ij})$. Então $A$ e $B$ coincidem

$$A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \cdots + \eta_m a_{mj} = \eta_1 b_{1j} + \cdots + \eta_m b_{mj} = B\xi_j$$

nos elementos de uma base e linearidade implica que coincidem em todo $v \in E$.
Sobrejetivo. Dado $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$, para cada um $j$ defina

$$A\xi_j := \eta_1 a_{1j} + \cdots + \eta_m a_{mj}$$

Isso determina $A$ unicamente (Prop. 4.1.12). Então $\Psi(A) := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = \mathbf{a}$. □

Lembre-se de Exemplo 3.0.13 (c) e de Comentário 3.0.14 que $\dim \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) = mn$. Segundo Corolário 6.4.9 isomorfismos preservam dimensões, assim obtemos $\dim \mathcal{L}(E, F)$.

**Corolário 5.2.8.** $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) = mn = \dim E \cdot \dim F$.

**Teorema 5.2.9.** *Considere duas transformações lineares entre espaços vetoriais*

$$E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$$

*com bases respectivas* $\mathcal{U} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\mathcal{V} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, *e* $\mathcal{W} = (\nu_1, \ldots, \nu_p)$. *Então a matriz da composição*

$$[BA]_{\mathcal{U},\mathcal{W}} = [B]_{\mathcal{V},\mathcal{W}} \, [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \tag{5.2.6}$$

*é o produto das matrizes.*

*Demonstração.* Sejam $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ as matrizes de $A$ e $B$, seja $\mathbf{c}$ aquela de $BA$. Assim

$$A\xi_j = \sum_{k=1}^{m} \eta_k a_{kj}, \qquad B\eta_k = \sum_{i=1}^{p} \nu_i b_{ik}, \qquad BA\xi_j = \sum_{i=1}^{p} \nu_i c_{ij}$$

para $j = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, m$. Use estas identidades para obter

$$\sum_{i=1}^{p} \nu_i c_{ij} = B(A\xi_j) = \sum_{k=1}^{m} (B\eta_k) a_{kj} = \sum_{i=1}^{p} \nu_i \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}$$

onde no último passo temos permutado a ordem das somas *finitas*. Mas como a base $\mathcal{W}$ é LI os coeficentes dos $\nu_i$ devem ser iguais (Corolário 3.1.2). □

## 5.3 Mudança de base – diagrama comuta

Nesta seção no diagrama (5.0.1) estudamos o que acontece

5.3.1 com um vetor coordenada $[v]_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1} v$ se trocamos a base $\mathcal{U}$ de $E$ para uma outra base $\tilde{U}$;

5.3.2 com a matriz de uma transformação linear onde adicionalmente permitimos trocar a base de $F$.

### 5.3.1 Vetor coordenada – parte triangular

A matriz $\mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}}$ do operador identidade, por definição (5.2.1), satisfaz

$$\xi_j = I_E \, \xi_j \overset{(5.2.1)}{=} \tilde{\xi}_1 p_{1j} + \cdots + \tilde{\xi}_n p_{nj} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5.3.1}$$

Nas outras palavras $\mathbf{p}$ exprime os elementos da *base velha* $\mathcal{U} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de $E$ como combinação linear dos elementos da *base nova* $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n)$ de $E$. Por isso $\mathbf{p}$ é chamado de **matriz de passagem de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ para $\boldsymbol{\tilde{\mathcal{U}}}$**. A matriz de passagem participa do diagrama (5.0.1) fazendo as partes triangulares comutativo (5.0.1).

**Lema 5.3.1.** *A parte triangular do diagrama (5.0.1) comuta, ou seja*

$$\tilde{\mathcal{U}} \mathbf{p} = \mathcal{U} \qquad \text{ou equivalentemente} \qquad [I_E]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{U}.$$

*Demonstração.* Para $x \in \mathbb{K}^n$ vale

$$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p}x = \left(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n\right) \begin{bmatrix} \sum_k p_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_k p_{nk}x_k \end{bmatrix} = \sum_\ell \tilde{\xi}_\ell \sum_k p_{\ell k} x_k = \sum_k \underbrace{\left(\sum_\ell \tilde{\xi}_\ell p_{\ell k}\right)}_{\overset{(5.3.1)}{=} \xi_k} x_k = \mathcal{U}x$$

□

**Corolário 5.3.2.** *Matrizes de passagem $[I_E]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}}$ são isomorfismos com inversa*

$$[I_E]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}}^{-1} = [I_E]_{\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1}\widetilde{\mathcal{U}}.$$

*Demonstração.* Aplicando $\widetilde{\mathcal{U}}^{-1}$ em ambos os lados de $\widetilde{\mathcal{U}}\mathbf{p} = \mathcal{U}$ obtém-se $\widetilde{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{U} = \mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}}$. Como $\mathcal{U}$ e $\widetilde{\mathcal{U}}$ são isomorfismos $\mathbf{p}$ é (Coment. 4.1.11). Forma inversa em ambos lados, use (4.1.3), para obter $[I_E]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}}^{-1} = \mathbf{p}^{-1} = \mathcal{U}^{-1}\widetilde{\mathcal{U}} = [I_E]_{\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}}$. □

**Comentário 5.3.3** (Trocando a base (o sistema de coordenadas))**.** Seja $v \in E$. Dado o vetor coordenada $[v]_\mathcal{U}$ em respeito a uma base $\mathcal{U}$ de $E$. Para calcular as coordenadas em respeito a uma outra base $\widetilde{\mathcal{U}}$ simplesmente aplique a matriz de passagem $\mathbf{p} = [I]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}}$, ou seja

$$[I]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}} [v]_\mathcal{U} = [v]_{\widetilde{\mathcal{U}}} .$$

**Exercício 5.3.4.** Considere as bases $\mathcal{U} = (\xi, \eta)$ e $\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$ de $\mathbb{R}^2$ onde

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\xi} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\eta} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Seja $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Determine o vetores coordenadas $[v]_\mathcal{U}$ e $[v]_{\widetilde{\mathcal{U}}}$.[3]

### 5.3.2 Matriz de uma TL – parte trapézio

**Lema 5.3.5.** *A parte trapézio do diagrama (5.0.1) comuta, ou seja*

$$A\mathcal{U} = \mathcal{V}\mathbf{a}.$$

*Demonstração.* Seja $x \in \mathbb{K}^n$, então

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}x &= A\left(\xi_1, \dots, \xi_n\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\left(\xi_1 x_1 + \dots \xi_n x_n\right) \\ &= \underbrace{(A\xi_1)}_{\eta_1 a_{11} + \dots + \eta_m a_{m1}} x_1 + \dots + \underbrace{(A\xi_n)}_{\eta_1 a_{1n} + \dots + \eta_m a_{mn}} x_n \\ &= \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{j1}) x_1 + \dots + \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{jm}) x_n \end{aligned}$$

[3] Controle: $[v]_{\widetilde{\mathcal{U}}} = [I]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}} [v]_\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{\widetilde{\mathcal{U}}}$, $\widetilde{\mathcal{U}} = [I]_{\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}} \mathcal{U}$

e assim

$$
\begin{aligned}
A\mathcal{U}x &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\eta_j a_{jk})x_k = \sum_{j=1}^{m}\eta_j \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k}_{\mathbf{a}_{j\bullet}x} \\
&= \eta_1\mathbf{a}_{1\bullet}x + \dots + \eta_m\mathbf{a}_{m\bullet}x = (\eta_1,\dots,\eta_m)\begin{bmatrix}\mathbf{a}_{1\bullet}x \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet}x\end{bmatrix} = \mathcal{V}\mathbf{a}x
\end{aligned}
$$

□

Segundo às Lemas 5.3.5 e 5.3.1 o diagrama (5.0.1) é comutativo, e assim recebemos a relação

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{q}\mathbf{a}\mathbf{p}^{-1}$$

entre as matrizes de $A$ em respeito às bases novas e velhas.

No caso $F = E$ munido das bases $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{U}}$ recebemos

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{p}\mathbf{a}\mathbf{p}^{-1}, \qquad \tilde{\mathbf{a}} = [A]_{\tilde{\mathcal{U}}}, \quad \mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}} \tag{5.3.2}$$

**Definição 5.3.6.** Chama-se **semelhante** duas matrizes quadradas $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ se existe uma matriz invertível $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{a} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{p}$.

**Exercício 5.3.7.** Mostre que se $\mathbf{a}$ e $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p}$ são matrizes $n\times n$ semelhantes, então existe $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{a}$ e $\tilde{\mathbf{a}}$ são matrizes de $A$ relativamente a duas bases de $\mathbb{R}^n$.

### Caso especial $E = F = \mathbb{K}^n$: base canônica $\mathcal{E}$ e base $\mathcal{U}$

Considere o caso de um operador linear $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ onde $\mathbb{K}^n$ é munido originalmente da base canônica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ e depois de uma base nova $\mathcal{U}$. Neste caso o diagrama (5.0.1) torna-se no diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\mathbf{a}:=[A]"] \arrow[dr, "\mathcal{E}=I_{\mathbb{K}^n}", "\simeq"'] \arrow[dd, "\mathbf{p}:=[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E},\mathcal{U}}"', "\simeq"] & & & \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\mathcal{E}=I_{\mathbb{K}^n}"', "\simeq"] \arrow[dd, "\mathbf{p}", "\simeq"'] \\
& \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\tilde{\mathbf{a}}:=[A]_{\mathcal{U}}"'] \arrow[ur, "\mathcal{U}"', "\simeq"] & & & \mathbb{K}^n \arrow[ul, "\mathcal{U}", "\simeq"']
\end{tikzcd}
\tag{5.3.3}
$$

o qual disponibiliza a relação $[A]_{\mathcal{U}} = \mathbf{p}\,[A]\,\mathbf{p}^{-1}$ entre as matrizes de $A$ quando trocar a base canônica por qualquer outra base.

**Exercício 5.3.8.** Suponha que $E = \mathbb{K}^n$ munido da base canônica $\mathcal{E}$ como base velha, veja diagrama (5.3.3). Então os membros da base nova $\mathcal{U} = (\xi_1 \dots, \xi_n)$ formam as colunas da matriz inversa $\mathbf{p}^{-1}$. Veja Exercício 5.4.9.

Nas outras palavras, como a inversa de $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ é $[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U},\mathcal{E}}$, vale a seguinte fórmula

$$\boxed{[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U},\mathcal{E}} = [\mathcal{U}]}$$

onde $[\mathcal{U}]$ denota a matriz cujas colunas sao os elementos da base $\mathcal{U}$ de $\mathbb{K}^n$.

**Exemplo 5.3.9.** Dada em $\mathbb{R}^3$ a base canônica $\mathcal{E}$ e a base $\mathcal{V} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$

$$\xi_1 = (1,1,0), \qquad \xi_2 = (-1,0,0), \qquad \xi_3 = (0,0,1).$$

Determine a matriz de passagem $\mathbf{p}$ de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{E}$, e aquela vice versa.

**Uma solução.** As colunas da matriz $\mathbf{p} := [I]_{\mathcal{V},\mathcal{E}} = [\mathcal{V}]$ são os $\xi_i$'s. A outra matriz desejada $\mathbf{q} := [I]_{\mathcal{E},\mathcal{V}} = \mathbf{p}^{-1}$ é a matriz inversa de $\mathbf{p}$. Pode-se calcular com o processo de Gauss-Jordan (MA141), veja § A.4, ou seja

$$[\mathbf{p} : \mathbb{1}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(oe)}} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbb{1} : \mathbf{p}^{-1}]$$

### 5.3.3 Determinante de uma transformação linear

**Definição 5.3.10** (Determinante)**.** Para $A \in \mathcal{L}(E)$ define-se

$$\det A := \det [A]_{\mathcal{B}} \tag{5.3.4}$$

onde $\mathcal{B}$ é uma matriz ordenada de $E$.

**Exercício 5.3.11.** Verifique que $\det A$ é bem definido, o que quer dizer que é independente da escolha da base.

[Dica: Fórmula s (5.3.2) e (A.4.1).]

## 5.4 Exercícios e umas soluções

### Matriz de uma transformação linear

**Exercício 5.4.1.** Considere a base ordenada $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$, onde

$$u = (1, 1, 1), \qquad v = (1, -1, 1), \qquad w = (1, 1 - 1).$$

Seja $\mathcal{B}^* = (\phi, \psi, \chi)$ a base (de $\mathbb{R}^{3^*}$) dual de $\mathcal{B}$. Calcule as matrizes $[\phi], [\psi], [\chi]$ das transformações lineares $\phi, \psi, \chi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

**Uma solução.** Sejam $\mathcal{E}^3 = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{E}^1 = (E_1)$ as bases canônicas onde o vetor unitário em $\mathbb{R}^1$ é a lista $E_1 = (1)$ de um membro com 1 no 1-ésimo lugar (e nulos nos outros lugares – as quais não têm). Seja $x_i := \phi e_i$, então usando a propriedade da base dual e linearidade obtemos

$$\begin{aligned}
1 = \phi u = \phi(1, 1, 1) = \phi e_1 + \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\
0 = \phi v = \phi(1, -1, 1) = \phi e_1 - \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 - x_2 + x_3 \\
0 = \phi w = \phi(1, 1, -1) = \phi e_1 + \phi e_2 - \phi e_3 = x_1 + x_2 - x_3.
\end{aligned}$$

Usamos escalonamento para resolver o SL de 3 equações nas 3 incógnitas $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ as quais são listas de um membro só. O resultado é

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
1 = x_1 = \phi e_1 = E_1 \phi_{11} = 1 \cdot \phi_{11} = \phi_{11} \\
0 = x_2 = \phi e_2 = E_1 \phi_{12} = 1 \cdot \phi_{12} = \phi_{12} \\
0 = x_3 = \phi e_3 = E_1 \phi_{13} = 1 \cdot \phi_{13} = \phi_{13}
\end{aligned}$$

e assim

$$[\phi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogamente obtemos

$$[\psi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\chi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Olha só, no caso $E = \mathbb{R}^n$ a matriz da base dual de qualquer base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tem em respeito às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^1$ a forma da base canônica.

**Exercício 5.4.2.** Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, x + y)$$

e $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definido assim

$$B(x, y, z) = (ax + (a - 1)y + (1 - a)z, -bx + (1 - b)y + bz)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Determine o operador $BA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

[Dica: Use as matrizes $[A]$ e $[B]$ que correspondem a $A$ e $B$ respectivamente.]

**Uma solução.** Denotamos de $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$ as bases canônicas. As duas colunas da matriz $[A] \in \mathrm{M}(3 \times 2)$ são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned} Ae_1 &= A(1,0) = (1,0,1) = 1E_1 + 0E_2 + 1E_3 \\ Ae_2 &= A(0,1) = (0,1,1) = 0E_1 + 1E_2 + 1E_3. \end{aligned}$$

As três colunas da matriz $[B] \in \mathrm{M}(2 \times 3)$ são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned} BE_1 &= B(1,0,0) = (a,-b) = ae_1 - be_2 \\ BE_2 &= B(0,1,0) = (a-1, 1-b) = (a-1)e_1 + (1-b)e_2 \\ BE_3 &= B(0,0,1) = (1-a, b) = (1-a)e_1 + be_2. \end{aligned}$$

Assim recebemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [B] = \begin{bmatrix} a & a-1 & 1-a \\ -b & 1-b & b \end{bmatrix}.$$

Use (5.2.6) no primeiro passo e no segundo calcule produto matriz para obter

$$[BA] = [B]\,[A] = \begin{bmatrix} a+1-a1 & a-1+1-a \\ -b+b & 1-b+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_2.$$

Use a relação (5.2.1) entre matriz e operador para concluir que $BA = I_{\mathbb{R}^2}$.

**Exercício 5.4.3.** Qual é a matriz $[A]$ do operador $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$A(2,3) = (2,3) \qquad \text{e} \qquad A(-3,2) = (0,0)\ ?$$

**Exercício 5.4.4.** Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n,$$

e

$$B : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad p \mapsto (p(0), p(1), \dots, p(n))\,.$$

Determina a matriz $[BA]$ da composição $BA : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$.

**Uma solução.** Seja $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$ a base canônica e seja

$$\mathcal{M} = (x^0, x, x^2, \dots, x^n) =: (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}), \qquad x^0 := 1$$

a base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ composto de monômios. Segundo a definição de $A$ recebemos

$$Ae_i = A(0,\dots,0,1,0,\dots,0) = 0x^0 + \dots + 0x^{i-1} + 1x^i + 0x^{i+1} + \dots + 0x^n$$

para $i = 1, \dots, n+1$. Segundo (5.2.1) obtemos $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{M}} = \mathbb{1}_{n+1}$. Analogamente

$$B\eta_i = (\eta_i(0), \eta_i(1), \dots, \eta_i(n)) = \left(0^{i-1}, 1^{i-1}, \dots, n^{i-1}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} e_j \underbrace{(j-1)^{i-1}}_{b_{ji}}$$

para cada $i = 1, \ldots, n+1$ o que nos da a $i$-ésima coluna da matriz

$$[B]_{\mathcal{M},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0^0 & 0^1 & \ldots & 0^n \\ 1^0 & 1^1 & \ldots & 1^n \\ 2^0 & 2^1 & \ldots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ n^0 & n^1 & \ldots & n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & n & \ldots & n^n \end{bmatrix}.$$

Assim $[B]_{\mathcal{M},\mathcal{E}} = [B]_{\mathcal{M},\mathcal{E}} \mathbb{1}_{n+1} = [B]_{\mathcal{M},\mathcal{E}} [A]_{\mathcal{E},\mathcal{M}} = [BA]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ segundo (5.2.6).

**Exercício 5.4.5.** Dado $w = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, determine a matriz $[A]$ do operador[4]

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad v \mapsto v \times w.$$

Descreva geometricamente o núcleo desse operador e determina sua imagem.

## Mudança de base – vetor

**Exercício 5.4.6.** Considere as duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ da forma

$$\mathcal{U} := ((1,1), (-1,1)), \qquad \widetilde{\mathcal{U}} := ((1,0), (1,1)).$$

Dado o vetor $v = (1,1)$ de $\mathbb{R}^2$, calcule seus vetores coordenadas $[v]_{\mathcal{U}}$ e $[v]_{\widetilde{\mathcal{U}}}$. Calcule a matriz de passagem $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}}$ e verifique que $\mathbf{p}[v]_{\mathcal{U}}$ iguale $[v]_{\widetilde{\mathcal{U}}}$.

**Exercício 5.4.7.** No $\mathbb{R}^2$ considere a base $\mathcal{U} := ((1,1), (1,0))$.
a) Calcule o vetor coordenada $[v]_{\mathcal{U}}$.
b) Determine a matriz $\mathbf{p}$ de passagem de $\mathcal{U}$ à base canônica $\mathcal{E}$, e vice versa.

## Mudança de base – matriz

**Exercício 5.4.8.** Seja $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ a base canônica e seja $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinado por (5.2.3). Dada a base ordenada $\mathcal{V} := (e_1, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$, determine a matriz

$$\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{E},\mathcal{V}} = [I]_{\mathcal{E},\mathcal{V}} [A]_{\mathcal{V},\mathcal{E}} [I]_{\mathcal{E},\mathcal{V}} = \mathbf{p}\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{p}$$

calculando $\mathbf{p}$ e $\tilde{\mathbf{a}}$, veja (5.0.1).[5] Reencontramos $A$ nos Excs. 5.2.3 e 6.6.3.

**Exercício 5.4.9.** Seja $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Suponha vetores $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ e escalares $p_{ij} \in \mathbb{R}$ satisfazem

$$e_j = \xi_1 p_{1j} + \xi_2 p_{2j} + \cdots + \xi_n p_{nj}, \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Mostre que

---

[4] O **produto vetorial** de dois vetores $v$ e $w$ de $\mathbb{R}^3$ é o vetor $v \times w$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$v \times w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y\gamma - z\beta \\ -(x\gamma - z\alpha) \\ x\beta - y\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\gamma - z\beta \\ z\alpha - x\gamma \\ x\beta - y\alpha \end{bmatrix}.$$

[5] controle: inverta $\mathbf{q} = [I]_{\mathcal{V},\mathcal{E}}$ (Gauss-Jordan): $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. a lista ordenada $\mathcal{U} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$;
2. a matriz $\mathbf{p} = [p_{ij}]$ é a inversa da matriz $\mathbf{q}$ cujas colunas são por definição $\xi_1, \ldots, \xi_n$, em símbolos $\mathbf{qp} = \mathbb{1}_n$. Veja Exercício 5.3.8.

Em palavras, obtém-se a matriz $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ de mudança da base canônica $\mathcal{E}$ para uma base nova $\mathcal{U} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ como a matriz inversa da matriz

$$\mathbf{q} := [\xi_1 \ldots \xi_n]$$

cujas colunas são os $\xi_i$'s, em símbolos

$$\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E},(\xi_1,\ldots,\xi_n)} = \mathbf{q}^{-1} = [\xi_1 \ldots \xi_n]^{-1}.$$

**Exercício 5.4.10** (Continuação de Exercício 1.3.9)**.** Seja $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ o espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ composto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Em Exercício 1.3.9 temos definido dois subconjuntos $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ e $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$ e temos mostrado, primeiro, que cada um é LI e, segundo, que cada um elemento de um dos dois subconjuntos pode ser escrito como CL dos elementos do outro.

(a) Mostre que os subespaços gerados $F := \langle \mathcal{F} \rangle$ e $G := \langle \mathcal{G} \rangle$ são iguais.

(b) Conclua que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são bases do subespaço $F$ de $E$.

(c) Determine a matriz de passagem $\mathbf{p} := [I_F]_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ da base $\mathcal{F}$ para a base $\mathcal{G}$. (Outros autores usam a notação $\mathbf{p} = I^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}$.)

**Exercício 5.4.11.**

Seja $\mathbf{c} \in M(n \times n; \mathbb{K})$ uma matriz quadrada de posto 1.

(a) Prove que: $\mathbf{c}^2 = (\operatorname{tr} \mathbf{c})\mathbf{c}$. $(*)$

(b) Dado $n \geq 2$, generalize: $\mathbf{c}^n = (\operatorname{tr} \mathbf{c})^{n-1}\mathbf{c}$.

Poderia usar (e provar) o

**Lema 5.4.12.** *Para matrizes* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(n \times n; \mathbb{K})$ *tem-se*

$$\operatorname{tr}(\mathbf{ab}) = \operatorname{tr}(\mathbf{ba}). \tag{5.4.1}$$

[ad (a): Observe que para provar $(*)$ pode-se mudar a base de $\mathbb{K}^n$ e provar $(*)$ para a nova matriz $\tilde{\mathbf{c}}$. Lembre-se: posto$(\mathbf{c}) = 1$. Escolha base apropriada de $\mathbb{K}^n$.]

**Exercício 5.4.13.** Sejam $A : E \to F$ e $B : F \to G$ transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita.

1. Prove que: $B$ injetiva $\Rightarrow$ posto$(BA)$ = posto$(A)$.
2. Encontre uma condição sobre $A$ a qual implica posto$(BA)$ = posto$(B)$.