

Capítulo 7

Fórmula de Taylor

7.1 Uma variável

O¹ caso de uma variável é tratado no Cálculo I. Vamos repetir uns fatos como motivação. Denotamos de $f^{(n)}(x)$ e n -ésima derivada de f no ponto $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.1.1. *Se uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiver uma representação em série de potências num ponto a e de raio de convergência $R > 0$, ou seja se vale*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad |x-a| < R$$

então os coeficientes são $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. $0! := 1$ e $x^0 := 1$

Demonstração. Por hipótese $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$, assim $f(a) = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \dots = c_0$ e $f'(a) = 0 + c_1 + 2c_2(a-a) + 3c_3(a-a)^2 + \dots = c_1$ etc. □

Corolário 7.1.2. *Uma função f como no Teorema 7.1.1 é da forma*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots \end{aligned}$$

no todo ponto x com $|x-a| < R$.

Definição 7.1.3. Uma série da forma

$$T(x) = T^{f,a}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

¹Cap. 7 de MA211 2024-1, autor Joa Weber: 9 de abril de 2024

é chamada de **série de Taylor** da função f no ponto a e a n -ésima soma parcial

$$T_n(x) = T_n^{f,a}(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

é chamada de n -ésimo **polinômio de Taylor** da função f no ponto a .

Observe que $T_0(x) = f(a)$ é constante e $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ aproxima f pela tangente no ponto a .

Exemplo 7.1.4. A função

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0, \end{cases}$$

não é igual a sua série de Taylor em 0 a qual é a função nula porque toda derivada anula-se $f^{(n)}(0) = 0 \forall n$. Por exemplo

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{he^{1/h^2}} = 0.$$

Exemplo 7.1.5 (Exponencial). A série de Taylor no ponto 0 de $f(x) := e^x$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

e converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim O raio da convergência R é infinito.

A fórmula vale como todas derivadas em 0 são 1. Dado $x \in \mathbb{R}$, pelo teste de razão $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n}| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$, como o limite é menor de 1, obtemos convergência no ponto x , para todo x .

Corolário 7.1.6. Dado $x \in \mathbb{R}$, o limite seguinte é nulo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0. \quad (7.1.1)$$

Demonstração. Se o limite não fosse nulo, a soma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ seria infinita. \square

Observação 7.1.7. Se e^x tiver uma expansão em serie de potencias no ponto 0, então $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ segundo Corolário 7.1.2.

Função iguale sua série de Taylor

Chegamos à questão quando uma função, a qual admite derivadas de todas as ordens, é igual a sua série de Taylor num ponto a ?

Teorema 7.1.8 (Série de Taylor). *Dado $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e um ponto $a \in \mathbb{R}$, definimos a função n -ésimo resto $R_n = R_n^{f,a} := f - T_n^{f,a}$. Dado $R > 0$, se a seqüência resto se anula no intervalo aberto de centro a e raio R , ou seja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad |x - a| < R$$

então f iguale no mesmo intervalo sua série de Taylor no ponto a , em símbolos

$$f(x) = T^{f,a}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad |x - a| < R.$$

Demonstração. Seja $|x - a| < R$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - R_n(x)) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \stackrel{\text{hipot.}}{=} f(x) - 0.$$

□

Para verificar a hipótese $R_n \rightarrow 0$ no teorema é útil o critério seguinte.

Proposição 7.1.9 (Critério – Desigualdade de Taylor). *Na situação de Teorema 7.1.8, se nos pontos de um intervalo fechado a a $(n + 1)$ -ésima derivada é limitada por a mesma constante M , em símbolos*

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \quad |x - a| \leq d$$

então

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot |x - a|^{n+1}, \quad |x - a| \leq d \\ &\leq M \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\stackrel{(7.1.1)}{\underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow}} 0. \end{aligned}$$

Em cinza é o caso que todas as derivadas são limitadas pela mesma constante M .

Idéia de demonstração. Seja $n = 1$ e $x \in [a, a + d]$. Aplicando integração $\int_a^x \dots dt$ à desigualdade $f''(t) \leq M$ obtemos segundo o Teorema Fundamental de Cálculo (TFC)

$$f'(x) - f'(a) \stackrel{(\text{TFC})}{=} \int_a^x f''(t) dt \leq \int_a^x M dt = M(x - a).$$

A esta estimativa aplique $\int_a^x \dots dt$ para obter similarmente

$$\begin{aligned} R_1(x) := f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) &\stackrel{(\text{TFC})}{=} \int_a^x \underbrace{f'(t) - f'(a)}_{\leq M(t-a)} dt \\ &\leq M \frac{(t-a)^2}{2} \Big|_{t=a}^x = \frac{M}{2} (x - a)^2. \end{aligned}$$

O caso $x \in [a - d, a]$ funciona analogamente. No caso geral de $n \in \mathbb{N}$ usa-se indução fazendo integração n vezes. □

Corolário 7.1.10. Para todo $x \in \mathbb{R}$ vale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Demonstração. Escolhemos $a = 0$. Dado $d > 0$, como $f(x) := e^x = f^{(n+1)}(x)$ iguale todas suas derivadas temos $|f^{(n+1)}(x)| = |e^x| \leq e^d =: M$ quando $|x| \leq d$, independente de n . Proposição 7.1.9 verifica a hipótese de Teorema 7.1.8. \square

Exercício 7.1.11. Determine a série de Taylor $T^{f,2}$ de $f(x) := e^x$ no ponto $a = 2$ e mostre que é igual à própria função exponencial, ou seja $T^{f,2}(x) = e^x$.

Exercício 7.1.12. Determine a série de Taylor $T^{\sin,0}$ de $g(x) := \sin x$ no ponto $a = 0$ e mostre que é igual à própria função seno, ou seja $T^{\sin,0}(x) = \sin x$.

7.2 Várias variáveis

Deixa lembrar que neste texto U denota um subconjunto *aberto*.

Teorema 7.2.1 (Teorema do Valor Médio – TVM). Dado uma função diferenciável $f: \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ e dois pontos P_0 e P_1 tal que o **segmento fechado**

$$[P_0, P_1] := \{P_0 + t(P_1 - P_0) \mid t \in [0, 1]\} \subset U$$

é contido em U . Então existe um ponto $\bar{P} \in (P_0, P_1)$ no segmento aberto² com

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\bar{P}) \cdot (P_1 - P_0) = df(\bar{P})(P_1 - P_0).$$

Demonstração. A função $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(r(t))$, onde $r(t) := P_0 + t(P_1 - P_0)$, é contínua e diferenciável em $(0, 1)$. Conforme o TVM para uma variável (Cor. A.0.11) existe um ponto $\bar{t} \in (0, 1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\bar{t})(1 - 0)$. \square

7.2.1 Gradiente nulo

Observação 7.2.2. Para qualquer função $f: \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ vale obviamente

$$f \equiv \text{const} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ (\neq) \end{matrix} \quad \nabla f \equiv 0.$$

O recíproco é falso já no caso de $k = 1$ variável, se a função é definida em dois intervalos abertos disjuntos. Exemplo: $f(x) := -1$, $x < 0$, e $f(x) := 1$, $x > 0$.

Definição 7.2.3. Um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ é chamado de **conexo por caminho** se qualquer dois pontos $P_0, P \in U$ podem ser conectados através de um número finito de segmentos em U :

$$\exists P_1, \dots, P_n = P \in U: \overline{P_0, P_1}, \overline{P_1, P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}, P} \subset U.$$

Teorema 7.2.4. Seja U conexo por caminho e $f: \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável:

$$\nabla f \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{const}.$$

² o segmento aberto $(P_0, P_1) := \{P_0 + t(P_1 - P_0) \mid t \in (0, 1)\}$ não contém os extremidades P_0 e P_1

Demonstração. Fixe um ponto $P_0 \in U$. Vamos mostrar: qualquer ponto $P \in U$ tem o mesmo valor $f(P) = f(P_0)$. Conecte P_0 com P através de segmentos $\overline{P_0, P_1}, \overline{P_1, P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}, P} \subset U$. O Teorema 7.2.1 do Valor Médio diz que

$$f(P_1) - f(P_0) = \underbrace{\nabla f(\bar{P})}_{= 0 \text{ hip.}} \cdot (P_1 - P_0) = 0$$

ou seja $f(P_0) = f(P_1)$. O mesmo argumento para o segundo segmento $[P_1, P_2]$ mostra que $f(P_1) = f(P_2)$. Repetimos o argumento ate chegamos no último segmento $[P_{n-1}, P]$ com a conclusão $f(P_{n-1}) = f(P)$. \square

Teorema 7.2.5. *Seja U conexo por caminho e $f, g: \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável:*

$$\nabla f = \nabla g \quad \Rightarrow \quad g = f + \text{const.}$$

Demonstração. Para $h := g - f$ vale $\nabla h = 0$, consequentemente $h \equiv \text{const}$ segundo Teorema 7.2.4. \square

Teorema 7.2.6. *Para funções $P, Q: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vale o seguinte:*

$$\exists f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \underbrace{f_x = P, f_y = Q}_{\nabla f = (P, Q)} \quad \Rightarrow \quad P_y = Q_x.$$

Na parte III vamos interpretar a lista $(P, Q): \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^2$ como campo vetorial ao longo de $U \subset \mathbb{R}^2$. A aplicação do teorema será como um critério: Se $P_y \neq Q_x$ então o campo vetorial (P, Q) não é igual a um campo gradiente ∇f .

Demonstração. Pela hipótese $f_x = P$ e $f_y = Q$ são de classe C^1 . Por isso $(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x, (f_y)_y \in C^0$. Equivalentemente $f \in C^2$ e o Teorema 3.4.4 de Schwarz aplica: $P_y = f_{xy} = f_{yx} = Q_x$. \square

7.2.2 Expansão de Taylor com resto de Lagrange R_1

Por razões da apresentação e legibilidade consideramos o caso de duas variáveis \mathbb{R}^2 .

Teorema 7.2.7. *Seja $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ e um vetor não-nulo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tal que o segmento $\overline{P_0 P_1}$ é contido no aberto U onde $P_1 := P_0 + (h, k)$. Então existe um $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ no segmento aberto (P_0, P_1) tal que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = T_1(h, k) + R_1(h, k)$$

onde

$$T_1 = T_1^{f, P_0}$$

$$T_1(h, k) := f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

e

$$R_1 = R_1^{f, \bar{P}}$$

$$R_1(h, k) := \frac{1}{2} (f_{xx}(\bar{P})h^2 + 2f_{xy}(\bar{P})hk + f_{yy}(\bar{P})k^2).$$

Demonstração. Considere a função $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0 + ht, y_0 + kt)$. Aplique Teorema A.0.12 com $n = 1$ (expansão de Taylor – uma variável). \square

7.2.3 Expansão de Taylor com resto de Lagrange R_n

Por razões da apresentação e legibilidade consideramos o caso de duas variáveis \mathbb{R}^2 .

Teorema 7.2.8. *Seja $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ e um vetor não-nulo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tal que o segmento $\overline{P_0 P_1}$ é contido no aberto U onde $P_1 := P_0 + (h, k)$. Então existe um $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ no segmento aberto (P_0, P_1) tal que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = T_n(h, k) + R_n(h, k)$$

onde

$$T_n = T_n^{f, P_0}$$

$$T_n(h, k) := f(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^{m-i} \partial y^i}}_{g^{(m)}(0)} h^{m-i} k^i$$

e

$$R_n = R_n^{f, \bar{P}}$$

$$R_n(h, k) := \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{\partial^{n+1} f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x^{n+1-i} \partial y^i} h^{n+1-i} k^i.$$

Demonstração. Considere a função $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0 + ht, y_0 + kt)$. Calcule $g^{(m)}(t)$ usando indução. Aplique Teorema A.0.12 (expansão de Taylor – uma variável). Veja também [Gui01, §15.6]. \square

Índice Remissivo

- $[P_0, P_1], (P_0, P_1)$ segmentos, 52
 $(u^\ell) \leq (v^\ell) \leq (w^\ell)$ seqüências, 12
 $C^0(D)$ funções contínuas em D , 13
 $C^k(U), C^\infty(U)$, 19
 $\text{Jac}_f = \frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = [Df]$ matriz Jacobiana, 29
 $\mathcal{O} := (0, \dots, 0)$ origem de \mathbb{R}^n , 5
 $\mathbb{S}^{k-1} \subset \mathbb{R}^{k-1}$ esfera unitária, 36
 $T_P S$ plano tangente, 28
 U subconjunto aberto, 8
 $U \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto, 1
 $\mathcal{E}^k = \{e_1, \dots, e_k\} \subset \mathbb{R}^k$ base canônica, 29
 $H^f(p)$ matriz Hessiana, 42
 $\text{Mat}(m \times k)$ matrizes $m \times k$, 5
 $T = T^{f,a}$ série de Taylor de f em a , 50
 $T_n = T_n^{f,a}$ n -ésimo polinômio de Taylor, 50, 98
 $\dot{r} := \frac{d}{dt}r$, 39
 g' derivada (1 variável), 16
 $x^0 := 1 \forall x \in \mathbb{R}$, 7
 $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmo, 7
 \perp ortogonal, 46
 \sin seno, 1
 $\sqrt{x^2} = |x|$, 7
 $\forall, \exists, \exists!$ “para todos”, “existe”, “existe unicamente”, 1
 $:=$ “definido por”, 1
 $|X|$ número de elementos de um conjunto X , 101
 $|\alpha|$ absoluto de um número α , 1
 \dot{A} fronteira, 6
 A^C complemento, 6
 $\overset{\circ}{A}$ interior, 6
 \bar{A} fechadura, 6
 $B_r(x)$ bola de raio r e centro x , 6
 $Df(a) = f'(a)$ derivada, 29
 $[Df(a)]$ matriz da derivada, 29
 $D_v f$ derivada de Gateaux, 36
 $D_{\hat{v}}$ derivada direcional $|\hat{v}| = 1$, 36
 $df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ diferencial, 29
 e número de Euler, 7
 $\mathcal{E}^k = \{e_1, \dots, e_k\}$ base canônica de \mathbb{R}^k , 37
 \wedge ‘e’, \vee ‘ou’, 1
 $[a, b], (a, b)$ intervalo fechado, aberto, 1
 $|x|$ norma de $x \in \mathbb{R}^n$, 5
 $x \cdot y$ produto escalar, 5
 $\times, X \times Y$ produto cartesiano, 102
 $Y^{\times k} := Y \times \dots \times Y$, 102
 $\dot{\cup}$ união de conjuntos disjuntos, 101
 $\hat{v} = \frac{1}{|v|}v$ vetor unitário, 36
aberto, 6
aproximação linear, 29
autovalor, 43
autovetor, 43
base canônica, 29, 37
binomial
coeficiente –, 7
bola
aberta, 6
coeficiente
binomial, 7
coeficiente binomial, 7
compacto, 6
complemento, 6
composição, 14
conexo por caminho, 53
conjunto, 101

- composto de elementos x_1, \dots, x_ℓ ,
 - 1, 101
 - finito, 101
 - ordenado, 101
- conjuntos
 - interseção de $-$, 101
 - união de $-$, 101
- continuamente diferenciável, 19
- continuidade, 13
- coordenadas
 - cartesianas, 7
 - polares, 7
- curva de nível, 9
- derivada, 29
 - caso 1 variável, 16
- derivada de Gateaux, 36
- derivada direcional, 36
- derivada parcial
 - k -ésima ordem, 19
- desigualdade
 - de Taylor, 51
- desigualdades
 - média geométrica \leq média aritmética, 47
- diferenciável, 24, 29
 - continuamente $-$, 19
- diferenciabilidade
 - critério importantíssimo, 27
- diferencial, 29
- domínio, 8
 - aberto U , 8
 - máximo $-$, 8
- eixo- X , 9
- equação
 - da onda, 21
 - de Laplace, 21
- esfera unitária, 36
- Euler
 - número e de $-$, 7
- fechado, 6
- fechadura, 6
- fronteira, 6
- função
 - composta, 14
 - de várias variáveis, 8
 - harmônica, 21
- gráfico, 9
- Hessiana, 42
- homogêneo, 36
- imagem, 8
- interior, 6
- interseção de conjuntos, 101
- Jacobiana
 - matriz $-$, 29
- Lagrange
 - resto de $-$, 98
- limitado, 6
- limite, 11
- logaritmo, 7
- mínimo, 41
 - estrito, 41
- mínimo local, 41
 - estrito, 41
- máximo, 41
 - estrito, 41
- máximo local, 41
 - estrito, 41
- média
 - aritmética, 47
 - geométrica, 47
- matrizes, 5
- multiplicador de Lagrange, 41, 46
- número de Euler, 7
- nível
 - curva de $-$, 8, 9
 - hipersuperfície de $-$, 9
- não-degenerado, 43
- norma, 5
- normal
 - reta $-$, 28
 - vetor $-$, 28
- origem, 5

- plano tangente, 28, 39
- polinômio de Taylor, 50
- polinômios
 - varias variáveis, 13
- ponto crítico, 42
 - da função restrição, 46
 - não-degenerado, 43
- ponto regular, 42
- produto
 - cartesiano, 102
 - escalar, 5
 - matriz, 6

- raíz, 7
- regra
 - da soma, 18
 - do produto, 18
 - do quociente, 18
- regra de cadeia, 31
- reta normal, 28, 40

- série de Taylor, 50
- segmento
 - aberto, 52
 - fechado, 52
- seqüências em \mathbb{R}^k , 12
- superfície de nível, 39

- taxa de variação, 36
- Taylor
 - desigualdade de –, 51
 - polinômio de –, 50, 98
 - série de –, 50
- teorema
 - da Função Implícita TFI, 34
 - de Rolle, 97
 - de Schwarz, 20
 - de Taylor (1 var.), 98
 - de Taylor (2 vars.), 54
 - do sanduíche, 12
 - do Valor Extremo, 43
 - do Valor Médio (1 var.), 97
 - regra de cadeia, 34
 - regra de cadeia I, 32
 - regra de cadeia II, 33
 - série de Taylor (1 var.), 51

- união de conjuntos, 101

- valor
 - crítico, 39
 - regular, 39
- valor crítico, 42
- valor regular, 42
- valores extremos, 42
- vetor gradiente, 38
- vetor normal, 28, 40
- vetor unitário, 36
- vetores canônicos e_i , 37