# Capítulo 3

# Derivadas Parciais

Primeiro[1] repetimos para funções de uma variável o conceito de derivada $g'(x)$ num ponto $x \in \mathbb{R}$. Chama-se $g$ de diferenciável se a derivada existe em cada um ponto do domínio. No caso de duas ou mais variáveis $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ é bem natural simplesmente escolher uma variável $x_i$, considerar todas as outras variáveis como constantes, e aplicar a definição de uma variável para obter a chamada derivada parcial em respeito a $x_i$, símbolo $f_{x_i}(x)$ ou $f_i(x)$, caso existir.

Encontramos o **primeiro déficit** da generalização natural: Enquanto, no caso de uma variável, existência da derivada $g'(p)$ implica continuidade da função $g$ no ponto $p$, ainda existência de todas as derivadas parciais $f_1(p), f_2(p), \dots, f_k(p)$ não implica continuidade de $f$ no ponto $p$ caso $k \geq 2$; veja Exercício 4.1.1. O primeiro déficit será consertado no Capítulo 4 introduzindo um conceito de diferenciabilidade mais forte, o que implica continuidade.

Um **segundo déficit** de fato já acontece no caso de uma variável e ocorre quando queremos descrever os valores de uma função diferenciável $g$ perto de um ponto $p$ usando como aproximação a tangente $T_p$ ao gráfico de $g$.[2] Variação das tangentes $T_x$ continuamente nos pontos $x$ perto de $p$ é equivalente a continuidade da função $x \mapsto g'(x)$ das inclinações; veja (contra-)Exemplo 3.1.1. Analogamente, no caso de $k \geq 2$ variáveis, existência das derivadas parciais $f_1(p), f_2(p), \dots, f_k(p)$ não é suficiente, precisamos continuidade delas para comportamento contínuo dos espaços tangentes o que é essencial para aplicações como aproximação linear. Neste caso digamos que $f$ é de classe $C^1$.

Interessantemente, existência e continuidade das derivadas parciais implica diferenciabilidade (assim continuidade), mas não vice versa; veja diagrama na introdução ao Capítulo 4.

[1] Cap. 3 de MA211 2024-1, autor Joa Weber: 14 de março de 2024

[2] A tangente $T_p$ é a reta no plano $\mathbb{R}^2$ de inclinação $g'(p)$ passando o ponto $(p, g(p))$.

## 3.1 Derivada no caso de uma variável

Seja $g\colon \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável $x$ definida num conjunto aberto. Chama-se $g$ **diferenciável no ponto** $p \in U$ se o limite seguinte existir

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(p+h)-g(p)}{h}. \tag{3.1.1}$$

Neste caso chama-se o limite a **derivada** de $g$ no ponto $p$, símbolo $g'(p) \in \mathbb{R}$.

Existência da derivada $g'$ num ponto $p$ implica continuidade da função nesse ponto. Suponha que $g'(p)$ existe. Então a função $r(h) := g(p+h)-g(p)-g'(p)h$ satisfaz $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Junto com linearidade do limite segue que

$$\lim_{h\to 0} g(p+h) = \lim_{h\to 0}\big(g(p)+g'(p)h+r(h)\big) = g(p) + \lim_{h\to 0} \underbrace{\tfrac{r(h)}{h}}_{\to 0} \cdot \underbrace{h}_{\text{limitado}} = g(p).$$

**Exemplo 3.1.1** (Derivada existe, não é contínua)**.** A função $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\sigma(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

admite derivada em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e a função derivada é

$$\sigma'(x) := \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Verificamos que $\sigma'(0) = 0$:

$$\sigma'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sigma(0+h)-\sigma(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \underbrace{\sin\left(\tfrac{1}{h^2}\right)}_{\text{limitado}} = 0.$$

A função derivada não é contínua na origem: A sequencia $x_\ell := -1/\sqrt{2\pi\ell} < 0$ onde escolhemos $\ell \in \mathbb{N}$ converge para 0, quando $\ell \to \infty$, enquanto

$$\sigma'(x_\ell) = -2\tfrac{1}{\sqrt{2\pi\ell}} \underbrace{\sin(-2\pi\ell)}_{=0} + 2\sqrt{2\pi\ell} \underbrace{\cos(-2\pi\ell)}_{=1} = -2\sqrt{2\pi\ell} \xrightarrow{\ell\to\infty} \infty \neq \sigma'(0).$$

Assim as inclinações das tangentes $T_{x_\ell}$ ao gráfico de $\sigma$ convergem para $\infty$ enquanto $x_\ell \to 0$ mas a tangente $T_0$ tem inclinação $\sigma'(0) = 0$ (é horizontal).

O problema com as tangentes no exemplo anterior é que a função derivada $\sigma'$ nao é contínua.

## 3.2 Derivada parcial – Definição

Para simplicidade de notação vamos focar em duas variáveis, o caso de $n$ variáveis sendo inteiramente análogo. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis $x$ e $y$ definida num aberto $U$. Dado um ponto $(a,b)\in U$, obtemos dois caminhos naturais em $U$, paralelo ao eixo-$x$ o caminho $x\mapsto(x,b)$ e paralelo ao eixo-$y$ o caminho $y\mapsto(a,y)$. Os valores de $f$ ao longo dos caminhos são funções

$$g(x):=f(x,b),\qquad G(y):=f(a,y). \tag{3.2.1}$$

Caso a função de uma variável $g$ tem derivada no ponto $a$ no sentido de Cálculo I, veja (3.1.1), ou seja caso o limite seguinte existir

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},$$

então este limite, denotado de $g'(a)$, é chamada de derivada parcial de $f$ em relação à primeira variável $x$ no ponto $(a,b)$ e denotada de $f_x(a,b):=g'(a)$. Analogamente $f_y(a,b):=G'(b)$ caso existir.

*Para funções de uma variável: derivada = derivada parcial.*

**Definição 3.2.1** (Derivada parcial)**.** Seja $f\colon\mathbb{R}^2\supset U\to\mathbb{R}$ uma função de duas variáveis $(x,y)$ num aberto $U$ e seja $(a,b)\in U$.

a) Dizemos que $f$ tem derivada parcial em relação à primeira variável $x$ no ponto $(a,b)$ se o limite existir

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=:f_x(a,b).$$

Analogamente $f$ tem derivada parcial em relação à segunda variável $y$ se o seguinte limite existir

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}=:f_y(a,b).$$

Caso o primeiro limite exista, denominamo-lo de $f_x(a,b)$, chamado de **derivada parcial de $f$ em respeito a $x$ no ponto** $(a,b)$. Analogamente $f_y(a,b)$.

b) Se $f_x(a,b)$ existe em todos os pontos do domínio dizemos que **a derivada parcial de $f$ em respeito $x$ existe**. Analogamente para $y$.[3]

**Definição 3.2.2** ($n$ variáveis)**.** Seja $f\colon\mathbb{R}^n\supset U\to\mathbb{R}$ e $x=(x_1,\dots,x_n)\in U$. Então a derivada parcial de $f$ em respeito a $x_i$ é, se existir, o limite seguinte

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x)}{h}\overset{\substack{\text{caso}\\\text{existir}}}{=:}f_{x_i}(x).$$

**Comentário 3.2.3** (Notações alternativas)**.** É praxe denotar as derivadas parciais com uma grande variedade de símbolos, por exemplo

$$f_{x_i},\ \ \tfrac{\partial f}{\partial x_i},\ \ f_i,\ \ D_{x_i}f,\ \ D_if,\ \ \tfrac{\partial z}{\partial x_i}\ \text{onde } z=f(x_1,\dots,x_k).$$

Dependente do contexto um símbolo pode ser mais pratico, mais legível, como outros.

[3] Notações comuns são $f_x$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $D_xf$, $f_1$, $D_1f$, e $\frac{\partial z}{\partial x}$ onde $z=f(x,y)$.

**Proposição 3.2.4.** *Se $f$ e $h$ possuem derivada parcial $f_{x_i}$ e $h_{x_i}$, então valem*

$$\begin{aligned}(f+h)_{x_i} &= h_{x_i} + h_{x_i}\\ (fh)_{x_i} &= f_{x_i}h + fh_{x_i}\\ \left(\tfrac{f}{h}\right)_{x_i} &= \tfrac{f_{x_i}h - fh_{x_i}}{h^2}\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

*as chamadas **regras da soma**, **do produto**, e **do quociente**, respectivamente.*

*Demonstração.* Segue das propriedades correspondentes de funções de uma variável; veja $g(x)$ e $G(y)$ em (3.2.1) no caso de duas variáveis $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. □

**Exercício 3.2.5** (Cone)**.** Dado $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, mostre que as derivadas parciais na origem $(0, 0)$ não existem.

**Exercício 3.2.6.** Seja $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

SOLUÇÃO. Vamos mostrar que as derivadas parciais $f_x$ e $f_y$ existem, determinar fórmulas, e depois avaliar no ponto $(2, 1)$. Fixando $y$ com um valor constante, a função $x \mapsto x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ é um polinômio de uma variável e sabemos do Cálculo I que a derivada existe e é dada pela fórmula $3x^2 + 2xy^3$, analogamente $y \mapsto x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ fixando $x$. Assim

$$f_x = 3x^2 + 2xy, \quad f_x(2, 1) = 16, , \qquad f_y = 3x^2y^2 - 4y, \quad f_y(2, 1) = 8.$$

## Derivadas parciais definidas implícitas

**Exemplo 3.2.7.** A equação $x^3+y^3+z^3+6xyz = 1$ define uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ no sentido que a variável $z = f(x, y)$ é uma função de $x$ e $y$.[4] Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

SOLUÇÃO. Para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ consideramos $y \equiv b$ com um valor constante. Aplicando $\frac{\partial}{\partial x}$ para a equação obtemos $3x^2 + 0 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Resolvendo para $\frac{\partial z}{\partial x}$ obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x^2 - 2yz}{z^2 + 2xy}$$

ao longo do subconjunto $V := \{z^2 \neq xy\}$ de $S$. Deixamos como um exercício mostrar que $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y^2-2xz}{z^2+2xy}$ ao longo $V$.

# 3.3 Interpretação Geométrica

Dado uma função contínua $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ e um ponto $p = (a, b) \in U$. Como $U$ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B_\delta(p)$ de raio $\delta$ e centro $p$ é contida em U. A equação $z = f(x, y)$ representa uma superfície em $\mathbb{R}^3$, o gráfico $S = \mathrm{gr}(f)$. Pelo ponto $P = (a, b, f(a, b))$ da superfície $S$ passam duas

[4] também poderia escolher $x = g(y, z)$ ou $y = h(x, z)$

curvas naturais $C_1$ e $C_2$: os gráficos das funções $x \mapsto f(x,b)$ e $y \mapsto f(a,y)$ ambas definidas no intervalo $(-\delta,\delta)$.

Suponha que as derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ existam. Neste caso as duas curvas tem as tangentes $T_1$ e $T_2$ no ponto $P$.

Curva $C_1$ e tangente $T_1(x) = P + (x-a)C_1'(a)$ são parametrizadas assim

$$C_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ b \\ f(x,b) \end{pmatrix}, \quad T_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ b \\ f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) \end{pmatrix}, \quad x \in (-\delta,\delta).$$

Curva $C_2$ e tangente $T_2(y) = P + (y-b)C_2'(b)$ são parametrizadas assim

$$C_2(y) = \begin{pmatrix} a \\ y \\ f(a,y) \end{pmatrix}, \quad T_2(y) = \begin{pmatrix} a \\ y \\ f(a,b) + f_y(a,b)(y-b) \end{pmatrix}, \quad y \in (-\delta,\delta).$$

Observe: para que as duas tangentes não fazem saltos descontínuos precisamos continuidade de $f$, de $f_x$, e de $f_y$ perto de $(a,b)$. Isso lida ao termo $C^1$ no §3.4.

**Exercício 3.3.1.** Seja $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, esboce o gráfico e as curvas $C_1$ e $C_2$ passando o ponto $P = (\frac{1}{2}, 1, \frac{7}{4})$ de $S = \mathrm{gr}(f)$. Calcule $f_x(\frac{1}{2},1)$ e $f_y(\frac{1}{2},1)$ e interprete cada um como inclinação de uma curva no gráfico.

Solução. Calculamos $f_x(x,y) = -2x$, assim $f_x(\frac{1}{2},1) = -1$, e $f_y(x,y) = -4y$, assim $f_y(\frac{1}{2},1) = -4$. O gráfico é um paraboloide centrado em torno do eixo-$z$ que abre para baixo começando na altura $f(0,0) = 4$. O gráfico encontra o plano-$xy$ na elipse $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{\sqrt{2}})^2 = 1$, o eixo-$x$ em $x = \pm 2$, o eixo-$y$ em $y = \pm\sqrt{2}$.

As curvas são $C_1(x) = (x, 1, 2 - x^2)$ e $C_2(y) = \frac{7}{4} - 2y^2$. A inclinação da curva $C_1$ no ponto $P$ é $f_x(\frac{1}{2},1) = -1$ e aquela de $C_2$ é $f_y(\frac{1}{2},1) = -4$.

## 3.4 Derivadas parciais de ordem superior

**Definição 3.4.1.** Seja $f\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ uma função. Seja $k \in \mathbb{N}_0$.

$f \in C^0(U)$ $:\Leftrightarrow$ $f$ contínua em $U$.

$f \in C^1(U)$ $:\Leftrightarrow$ $f \in C^0(U)$ e todas as $n$ derivadas parciais $f_{x_i}\colon U \to \mathbb{R}$ da **primeira ordem** existem e são contínuas.

$f \in C^2(U)$ $:\Leftrightarrow$ $f \in C^1(U)$ e todas as $n^2$ derivadas parciais $f_{x_i x_j} := (f_{x_i})_{x_j}\colon U \to \mathbb{R}$ da **segunda ordem** existem e são contínuas.

$f \in C^k(U)$ $:\Leftrightarrow$ $f \in C^{k-1}(U)$ e todas as $n^k$ derivadas parciais da **$k$-ésima ordem** existem em $U$ e são contínuas.

$f \in C^\infty(U)$ $:\Leftrightarrow$ $f \in C^k(U)$ para cada um $k \in \mathbb{N}_0$.

Chama-se os elementos de $C^1(U)$ **funções continuamente diferenciáveis** em $U$, e as de $C^k(U)$ funções $k$ vezes continuamente diferenciáveis em $U$.

Por definição uma função $f$ é de classe $C^k(U)$ se e somente se todas as derivadas parciais de $f$ de todas as ordens de zero ate inclusive ordem $k$ existem em $U$ e são contínuas em $U$. É muito trabalho checar continuidade de $1 + n + n^2 + \cdots + n^k$ funções. Na verdade é suficiente só verificar continuidade das $n^k$ derivadas parciais de ordem $k$ para saber que $f \in C^k(U)$; espere até Seção 4.2.3.

**Lema 3.4.2.** *Polinômios $p(x_1, \ldots, x_k)$ são de classe $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ e funcoes racionais $h = p/q$ são de classe $C^\infty(\mathbb{R}^k \setminus \{q = 0\})$.*

*Demonstração.* Polinômios $p(x_1, \ldots, x_k)$ são somas *finitas* de termos da forma $a_{j_1 \ldots j_k} x_1^{j_1} \ldots x_k^{j_k}$. Tomando derivada parcial recebemos de novo um polinômio, mas de degrau menor. Por isso existe um $\ell \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que todas as derivadas parciais de $p$ de ordem $\ell$ anulam-se. Assim $p \in C^\ell \; \forall \ell$.

Uma derivada parcial, qualquer ordem $\ell$, de uma função racional $h = p/q$ é racional com o mesmo domínio $\mathbb{R}^k \setminus \{q \neq 0\}$. Em respeito de $\ell = 1$, note que, segundo (3.2.2), uma derivada parcial de ordem 1 é da forma $\left(\frac{p}{q}\right)_{x_i} = \frac{p_{x_i} q - p q_{x_i}}{q^2}$ e obviamente $\{q^2 = 0\} = \{q = 0\}$. O mesmo raciocino mostra que $\ell \Rightarrow \ell{+}1$. □

**Exercício 3.4.3.** Determine todas as derivadas parciais de todas as ordens da função $f(x, y) := x^2 + x^2 y^2 - 2y^2$. [Na 5a ordem todas anulam-se.]

Às vezes seria útil trocar a ordem da diferenciação parcial. O teorema seguinte trata isso.

**Teorema 3.4.4** (Hermann Schwarz 1873)**.** *Dado $f\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$, então*

$$f_{x_j x_k}, f_{x_k x_j} \in C^0(U) \quad \Rightarrow \quad f_{x_j x_k} = f_{x_k x_j} \text{ em } U.$$

Observe que funções da classe $C^2(U)$ satisfazem a hipótese do teorema de Schwarz.

**Corolário 3.4.5** (Critério para discontinuidade)**.** *Se derivadas parciais de segunda ordem não comutam $f_{x_j x_k}(p) \neq f_{x_k x_j}(p)$ num ponto $p$, então eles não são ambas contínuas, consequentemente $f \notin C^2$.*

**Exercício 3.4.6.** Seja $f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x^4 y}$. Determine $f_{xyz}$ no aberto $U := \{x \neq 0 \wedge y \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus (\text{plano-}yz \cup \text{plano-}xz)$.

Solução. I. Como a função $f(x, y, z) = \frac{x^5 y^2 z + 1}{x^4 y}$ com domínio $U$ é racional, segundo Lema 3.4.2, ela é de classe $C^\infty(U)$. Nas outras palavras, todas derivadas parciais de $f$ de todas as ordens são de classe $C^0(U)$.

II. Queremos justificar que $f_{xyz} \overset{1)}{=} f_{xzy} \overset{2)}{=} f_{zxy}$ porque assim a calculação é fácil

$$f_z = xy, \qquad f_{zx} = y, \qquad f_{zxy} = 1.$$

Faça a calculação na ordem original $((f_x)_y)_z$ para ver a diferença.

1) Simplifique notação $F := f_x$. Então $F_{yz} = f_{xyz}$ e $F_{zy} = f_{xzy}$ são de classe $C^0(U)$ segundo I. Assim o Teorema 3.4.4 de Schwarz aplica e diz que $F_{yz} = F_{zy}$.

2) Como $f_{xz}$ e $f_{zx}$ são de classe $C^0(U)$ segundo I, Schwarz diz que $f_{xz} = f_{zx}$. Tomando derivada parcial desta identidade em respeito a $y$ obtemos $f_{xzy} = f_{zxy}$.

**Exercício 3.4.7.** Seja $f(x,y,z) = xyz + \frac{\sin(y^2)}{y^5}$ com domínio $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0\}$. Calcule a) $f_{yxz}$ e b) $f_{yyz}$.

Dicas. I. Mostre que $f \in C^\infty(U)$ usando argumentos abstratos lembrando a regra do quociente (3.2.2) e a prova de Lema 3.4.2. (Não tente calcular derivadas parciais neste passo). Note que $\frac{\sin(y^2)}{y^5}$ é da forma $u \cdot \frac{1}{v}$ onde $u = \sin(y^2)$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3) \subset C^\infty(U)$ e $h = \frac{1}{y^5}$ é racional, assim $C^\infty$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0\}$.

a) Primeiro mostre que $f_{yx} = f_{xy}$, depois aplique $\partial_z$. b) Considere $F := f_y$ e justifique que $F_{yx} = F_{xy}$, depois use a) para chegar em $f_{yyx} = f_{xyy}$.

**Exercício 3.4.8** ($f \notin C^2$ usando Schwarz)**.** Prova que a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

não é de classe $C^2$ mostrando que $f_{yx}(0,0) = 0$ e $f_{xy}(0,0) = 1$.

Dica. Mostre que as derivadas parciais são dadas por

$$f_x(x,y) := \begin{cases} \frac{-x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

e

$$f_y(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^4+3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Com estas fórmulas calcule $\frac{\partial}{\partial y} f_x(0,0)$ e $\frac{\partial}{\partial x} f_y(0,0)$ segundo Definição 3.2.1.

## 3.5 Equações diferenciais parciais (EDPs)

**Definição 3.5.1** (Equação de Laplace)**.** As soluções $u = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, da EDP seguinte

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

são chamadas de **funções harmônicas**.

**Exercício 3.5.2.** Mostre que a função $u(x,y) := e^x \sin(y)$ é harmônica.

**Definição 3.5.3** (Equação da onda)**.** Dado um parâmetro $a \in \mathbb{R}$. Seja $u = f(t,x)$ uma função das variáveis $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. A EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

é chamada de **equação da onda**.

**Exercício 3.5.4.** Mostre que a função $u(t,x) := \sin(x - at)$ é uma solução da equação da onda. Esboce para $a = 1$ os gráficos das funções $u(0,x)$, $u(\frac{\pi}{4},x)$, $u(\frac{\pi}{2},x),x)$ para ilustrar como a onda move no tempo $t$.

# Referências Bibliográficas

[Gui01] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, volume 2. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 5a edition, 2001.

[Jos05] Jürgen Jost. *Postmodern analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2005.