

Capítulo 2

Limites e Continuidade

2.1 Limites

Definição 2.1.1 (Limite). Seja¹ $f: \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com domínio D . Seja $a \in \bar{D}$ um elemento da fechadura de D . Dizemos que o **limite** de f quando a variável u tende a a (existe e) é igual a $L \in \mathbb{R}$, em símbolos

$$\lim_{u \rightarrow a} f(u) = L,$$

se e somente se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u \in D: |u - a| < \delta \Rightarrow |f(u) - L| < \varepsilon. \quad (2.1.1)$$

Caso o limite L existir, então L é independente do caminho C ao longo do que os pontos u aproximam-se a a :

Lema 2.1.2 (Critério). *Suponha que o limite de f quando os pontos u tendem a a ao longo de um caminho C_1 é L_1 e ao longo de um caminho C_2 é L_2 com $L_1 \neq L_2$. Então $\lim_{u \rightarrow a} f(u)$ não existe.*

Demonstração. Escolha $\varepsilon := (L_2 - L_1)/2$. □

Exemplo 2.1.3 (Limites não existem). As funções são definidas em todo ponto menos da origem.

a) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ igual -1 para $x < 0$, igual 1 para $x > 0$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \underbrace{f(x)}_{\equiv -1} = -1 \neq 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \underbrace{f(x)}_{\equiv 1}.$$

b)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo eixo-}x}} \underbrace{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}_{\equiv 1} = 1 \neq -1 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo eixo-}y}} \underbrace{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}_{\equiv -1}.$$

¹Cap. 2 de MA211 2024-1, autor Joa Weber: 6 de março de 2024

c)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo} \\ \text{diagonal } y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo} \\ \text{anti-diagonal } y=-x}} \frac{xy}{x^2+y^2}. \quad (2.1.2)$$

Os limites ao longo do eixo- x , e ao longo do eixo- y , são ambos nulos.

d) Seja $m \in \mathbb{R}$ a inclinação da reta $y = mx$.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{reta } y=mx}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xm^2}{1+m^4x^2} = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{parábola } x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

O limite ao longo da parábola $x = -y^2$ é $-\frac{1}{2}$.

Exemplo 2.1.4 (Limite existe). O limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ é nulo.

Demonstração 1 (Definição 2.1.1). Escolha $\varepsilon > 0$ e defina $\delta := \varepsilon/3$. Seja $\sqrt{x^2+y^2} = |(x,y) - (0,0)| < \delta = \varepsilon/3$. Então

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = 3|y| \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Demonstração 2 (Coordenadas polares 1.1.2). De $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ segue

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = 3 \lim_{r \rightarrow 0} \overbrace{r \cos^2 \theta \sin \theta}^{\text{limitado}} = 0.$$

Seqüências em \mathbb{R}^k

As propriedades do limite de uma seqüência $(u^\ell) = (u^\ell)_{\ell=1}^\infty$ em \mathbb{R}^k , onde cada um membro $u^\ell = (u_1^\ell, \dots, u_k^\ell) \in \mathbb{R}^k$ é uma lista ordenada de k números, são análogo a seqüências em \mathbb{R} . Dizemos que o limite definido por

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} u^\ell := \left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} u_1^\ell, \dots, \lim_{\ell \rightarrow \infty} u_k^\ell \right)$$

existe, se os k limites à direita existem.

Lema 2.1.5. *Dado seqüências $(u^\ell), (v^\ell) \subset \mathbb{R}^k$ com limites a e b , respectivamente. Então vale o seguinte*

- (i) $\lim_{\ell \rightarrow \infty} (u^\ell + v^\ell) = a + b$;
- (ii) $\lim_{\ell \rightarrow \infty} (u^\ell \cdot v^\ell) = a \cdot b$.

Lema 2.1.6 (Teorema do sanduíche). *Dado três seqüências $(u^\ell) \leq (v^\ell) \leq (w^\ell)^2$ em \mathbb{R}^k tal que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} u^\ell = a = \lim_{\ell \rightarrow \infty} w^\ell$. Então $\lim_{\ell \rightarrow \infty} v^\ell = a$.*

² $(u^\ell) \leq (v^\ell) \leq (w^\ell) : \Leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}$: membros correspondentes de u^ℓ, v^ℓ , e w^ℓ satisfazem $u_1^\ell \leq v_1^\ell \leq w_1^\ell, \dots, u_k^\ell \leq v_k^\ell \leq w_k^\ell$

2.2 Continuidade

Definição 2.2.1. Seja $f: \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com domínio D .

- a) A função f é dita **contínua num ponto $a \in D$ do seu domínio** se
 1) o limite $\lim_{u \rightarrow a} f(u)$ existe e 2) é igual ao valor $f(a)$. Em símbolos

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u \in D: \quad |u - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(a)| < \varepsilon.$$

- b) A função f é **contínua** se é contínua em todo ponto do seu domínio. Neste caso dizemos que f é de **classe C^0** . Denotamos de $C^0(D)$ o conjunto de todas as funções contínuas com domínio D .

Teorema 2.2.2 (Adição e multiplicação). *Sejam as funções f e g contínuas nos seus domínios. Então são contínuas as funções $f + g$, $f - g$, e fg no seu domínio $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ e a função f/g no seu domínio $\text{dom } f \cap \text{dom } g \cap \{g \neq 0\}$.*

Corolário 2.2.3. a) *Polinômios $p = p(x_1, \dots, x_k)$ são contínuas em \mathbb{R}^k .*
 b) *Funções racionais, ou seja $h = p/q$ onde p e q são polinômios, são contínuas em $\mathbb{R}^k \setminus \{q = 0\}$.*

Demonstração. Sabemos do cálculo I que polinômios de uma variável são contínuas em \mathbb{R}^k . **Polinômios de varias variáveis** $p(x_1, \dots, x_k)$ são somas finitas de termos da forma $a_{j_1 \dots j_k} x_1^{j_1} \dots x_k^{j_k}$ onde $a_{j_1 \dots j_k} \in \mathbb{R}$ e $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}_0$. Aplique Teorema 2.2.2. \square

Exercício 2.2.4. Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ no qual a função $f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é contínua.

SOLUÇÃO. Como função racional f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Segundo Exemplo 2.1.3 b) o limite de f quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ não existe. Assim $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Comentário 2.2.5. A função $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

é descontínua no ponto $(0, 0)$; veja Exemplo 2.1.3 b).

Exercício 2.2.6. Mostre que a função $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) := \begin{cases} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

é contínua.

SOLUÇÃO. A função $\frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$ é racional assim contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Resta checar se o limite de h quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ existe e é igual a $h(0, 0)$: Isso é verdadeiro segundo Exemplo 2.1.4.

Teorema 2.2.7 (Composição). *Se as funções $f(x_1, \dots, x_k)$ e $g(y)$ são contínuas e o domínio de g é contido na imagem de f , a **função composta***

$$h := g \circ f: \mathbb{R}^k \supset \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto g(f(x_1, \dots, x_k))$$

é contínua.

Exercício 2.2.8. Determine o maior domínio D tal que a função $h(x, y) := \arctan(\frac{y}{x})$ é contínua.

RESULTADO. Como $\text{dom}(\arctan) = \mathbb{R} = \text{im } f$ onde $f(x, y) := \frac{y}{x}$, obtemos $D = \text{dom } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$.