

Morse-Ungleichungen, Supersymmetrie und quasiklassischer Limes

Joa Weber¹

Februar 1995

Diplomarbeit am Fachbereich Physik
der Technischen Universität Berlin

Vorgelegt bei Prof. Dr. K.-E. Hellwig

¹Joachim Weber, Technische Universität Berlin, Fachbereiche Mathematik und Physik, Sekr. MA 7-2, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
E-mail: joa@math.tu-berlin.de

Inhalt

Kapitel 1	Einleitung	1
1.1	Übersicht	2
1.2	Die Morse-Ungleichungen	5
1.3	Physikalische Motivation	11
Kapitel 2	Der Wittensche Beweis der Morse-Ungleichungen	18
2.1	Der Laplace-Beltrami-Operator L	20
2.2	Der deformierte Laplace-Operator L_t	42
2.3	Der quasiklassische Limes	58
2.4	Beweis der schwachen Morse-Ungleichungen	62
2.5	Supersymmetrie	69
2.6	Beweis der starken Morse-Ungleichungen	75
Kapitel 3	Der Morse-Witten Komplex	78
3.1	Der kanonische Randoperator.	83
3.2	Der kanonische Kettenhomomorphismus	91
3.3	Der kanonische Isomorphismus zur singulären Homologie	97
3.4	Anwendung	98
	Literatur	99
	Verwendete Symbole.	102
	Index	104

Kapitel 1

Einleitung

Zielsetzung : Es werden zwei Beweise der Morse-Ungleichungen für eine glatte, geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g) präsentiert. Der erste Beweis (Kapitel 2) benutzt Methoden und Ideen, wie sie in der theoretischen Physik typisch sind. Er geht auf den Physiker E. Witten [Wi3] zurück und hat eine asymptotisch variierte Hodge-Theorie zur Grundlage. Der zweite (klassische) Beweis (Kapitel 3) benutzt den Morse-Witten Komplex für M . Dieser besteht aus den Kettengruppen $C_k(f, g, \sigma)$ und dem kanonischen Randoperator $\partial_k: C_k(f, g, \sigma) \rightarrow C_{k-1}(f, g, \sigma)$. Die Kettengruppen werden von den kritischen Punkten einer Morse-Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ frei abelsch über \mathbb{Z} erzeugt, d.h. $C_k(f, g, \sigma) \simeq \mathbb{Z}^{\#\text{Crit}_k f}$ (σ ist eine orientierungsabhängige Größe). Im Fall der Gültigkeit der Morse-Smale Bedingung ist der kanonische Randoperator wie folgt definiert: Sei $\langle x \rangle \in \text{Crit}_k f$ ein Erzeuger von $C_k(f, g, \sigma)$, dann ist

$$\partial_k \langle x \rangle := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1} f} n(x, y) \langle y \rangle \quad ,$$

wobei die Koeffizienten $n(x, y)$ die Anzahl der x mit y verbindenden Orbits (gezählt mit einem orientierungsabhängigen charakteristischen Vorzeichen) bezeichnen. $(C_k(f, g, \sigma), \partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ stellt einen algebraischen Kettenkomplex dar, es können also zugehörige Homologiegruppen $HM_*(f, g, \sigma, M; \mathbb{Z})$ definiert werden. Es stellt sich heraus, daß diese nicht von (f, g, σ) abhängen und kanonisch isomorph zur ganzzahligen singulären Homologie von M sind. Hieraus folgen nun die Morse-Ungleichungen. Dieser zweite Zugang wurde zwar in [Wi3] als plausibel betrachtet, konnte mit den dort verwendeten Methoden jedoch nicht gezeigt werden.

1.1 Übersicht

In **Kapitel 1** dieser Arbeit wiederholen wir in Paragraph **1.2** 'Die Morse-Ungleichungen' die hier relevanten grundlegenden Begriffe der endlich-dimensionalen nichtdegenerierten Morse-Theorie, insbesondere die starken und schwachen Morse-Ungleichungen. Wir zeigen die Äquivalenz der starken Morse-Ungleichungen zur Existenz eines algebraischen Kettenkomplexes $(C_k, \partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, wobei die Kettengruppen C_k von den kritischen Punkten einer Morse-Funktion f vom Morse-Index k frei abelsch über \mathbb{Z} erzeugt sind und die Bettizahlen $b_k(\partial \cdot)$ der zugehörigen Homologiegruppen mit denen der singulären Homologie der Mannigfaltigkeit M übereinstimmen.

In Paragraph **1.3** 'Physikalische Motivation' skizzieren wir den physikalischen Hintergrund beziehungsweise die physikalischen Fragestellungen, welche E. Witten 1982 [Wi2&3] einerseits den Morse Komplex wiederentdecken ließen, andererseits zu einem neuen Beweis der Morse-Ungleichungen durch asymptotische Analysis einer variierten Hodge-Theorie führten.

Letzteres ist Inhalt von **Kapitel 2** 'DER WITTENSCHEN BEWEIS DER MORSE-UNGLEICHUNGEN'. In Paragraph **2.1** 'Der Laplace-Beltrami-Operator L ' bilden wir zunächst den Abschluß $\bar{\Lambda}^p(M)$ des Raumes $\Lambda^p(M)$ der glatten p -Differentialformen auf M bezüglich eines L^2 -inneren Produkts $\langle \cdot, \cdot \rangle^p$ und erhalten einen Hilbertraum $(\bar{\Lambda}^p(M), \langle \cdot, \cdot \rangle^p)$. Wir definieren den Laplace-Beltrami-Operator L als Abschluß in $\bar{\Lambda}^p(M)$ des Operators $dd^* + d^*d$ auf $\Lambda^p(M)$ (d ist die äußere Differentiation). L ist selbstadjungiert und von unten durch Null beschränkt. Anschließend beweisen wir das Theorem über die Hodge-Zerlegung von $\bar{\Lambda}^p(M)$, woraus letztendlich folgt $\dim \text{Ker } L = b_p$ (p -te Bettizahl von M).

In Paragraph **2.2** 'Der deformierte Laplace-Operator L_t ' erläutern wir die Idee Wittens den Operator der äußeren Differentiation d mit e^{-itf} zu konjugieren (f Morse-Funktion auf M , $t \in \mathbb{R}$), d.h.

$$d_t := e^{-tf} d e^{tf} \quad , \quad L_t := d_t d_t^* + d_t^* d_t \quad .$$

Die Bedeutung dieser Idee zeigt sich in dem Resultat $\dim \text{Ker } L_t = b_p$, denn wir können nun $t \in \mathbb{R}$ beliebig variieren ohne die linke Seite zu verändern. Dies ist entscheidend, denn das Spektrum von L_t kann für große t besser analysiert werden. Unter Verwendung einer mittels Morse-Koordinaten konstruierten Metrik berechnen

wir L_t zu

$$L_t = L + t^2 \cdot \|df\|^2 + t \cdot A \quad ,$$

wobei A ein beschränkter Operator nullter Ordnung ist. Die beiden letzten Terme interpretieren wir als Potential. Für großes t sind die lokalen Minima genau durch die kritischen Punkte von f gegeben. Es ist nun naheliegend, daß sich der $t \rightarrow \infty$ Limes von L_t als direkte Summe $\bigoplus_a K^{(a)}$ von harmonischen Oszillatoren $K^{(a)}$ ergibt, welche bei den kritischen Punkten von f lokalisiert sind.

In Paragraph 2.3 zeigt sich, daß diese Vermutung richtig ist. Den $t \rightarrow \infty$ Limes nennen wir quasiklassischen Limes. Für großes t vereinfacht sich das Spektrum von L_t , es spaltet in einen tiefliegenden und einen hochliegenden Anteil auf. Die Eigenwerte in ersterem wachsen schwächer als t , jene in letzterem mindestens wie t .

In Paragraph 2.4 werden wir die schwachen Morse-Ungleichungen beweisen. Wir analysieren hierzu den quasiklassischen Limes $\bigoplus_a K^{(a)}$ von L_t . Es stellt sich heraus, daß jeder Summand $K^{(a)}$ genau eine Eigenfunktion (-form) zum Eigenwert Null besitzt. Diese ist bei einem kritischen Punkt $x^{(a)}$ von f lokalisiert. Sie ist eine Differentialform vom Grad $Ind_f(x^{(a)})$. Es ergibt sich

$$\dim Ker \bigoplus_a K^{(a)} |_{\Lambda^p(M)} = c_p := \# \{x \in M \mid df(x) = 0, Ind_f(x) = p\} \quad .$$

Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte von L_t liefert $c_p \geq b_p$.

In Paragraph 2.5 definieren wir den Begriff 'Supersymmetrische Quantenmechanik'. Die Bedeutung dieser Theorie für den Beweis der starken Morse-Ungleichungen liegt darin, daß für nichtverschwindende Eigenwerte von L_t die zugehörigen Eigenformen in Paaren (p gerade, p ungerade) oder physikalisch ausgedrückt (bosonisch, fermionisch) auftreten (p sei der Grad der Form).

In Paragraph 2.6 werden die starken Morse-Ungleichungen bewiesen.

In **Kapitel 3** 'DER MORSE-WITTEN KOMPLEX' konstruieren wir diesen und zeigen die Isomorphie der zugehörigen Homologiegruppen $HM_*(M; \mathbb{Z})$ zur singulären Homologie von M $H_*^{\text{sing}}(M; \mathbb{Z})$. Das beweist, wie zuvor bemerkt, die starken Morse-Ungleichungen (Thm. 1.2.4). Der Morse-Witten Komplex ist in der Mathematik seit langem bekannt (unter dem Namen Morse-Komplex). Er wurde bereits von R. Thom (40'er Jahre) [T], J. Milnor (50'er Jahre) [Mi] und S. Smale (60'er Jahre) [Sm] studiert. Anfang der 80'er Jahre wurde er von dem Physiker E. Witten [Wi3] wiederentdeckt, der durch die Untersuchung eines supersymmetrischen

quantenmechanischen Systems auf ihn gestossen ist. Die Instantonen dieses Systems sind gerade die isolierten verbindenden Orbits des Morse-Witten Komplex.

In Paragraph **3.1** 'Der kanonische Randoperator' zeigen wir, daß der Gruppenhomomorphismus ∂_k ein Randoperator ist, d.h. daß gilt $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

In Paragraph **3.2** 'Der kanonische Kettenhomomorphismus' konstruieren wir diesen, $\psi^{\beta\alpha}$ genannt. Er stellt einen Homomorphismus zwischen zwei Morse-Witten Komplexen über M für verschiedene Wahlen von (f, g, σ) dar. Wir wiederholen dazu im wesentlichen die Konstruktion von ∂_k in Paragraph 3.1 für den Fall $M \times S^1$, sowie einer hierauf speziell definierten Morse-Funktion F und Metrik G . f^α und f^β werden hierzu durch eine Homotopie verbunden, genauso g^α und g^β . Auf Homologieniveau stellt $\psi_*^{\beta\alpha}$ einen Isomorphismus dar.

In Paragraph **3.3** 'Der kanonische Isomorphismus zur singulären Homologie' skizzieren wir die Beweisidee für einen solchen. Das besondere hierbei ist, daß es sich bereits auf Kettenniveau um einen Isomorphismus handelt. Ein Isomorphismus auf Homologieniveau wurde dagegen schon mehrfach bewiesen [Mi] [Sa].

Abschließend zeigen wir in Paragraph **3.4** 'Anwendung', wie sich mittels der Morse-Homologie die Homologie von S^n der n -dimensionalen Sphäre einfach berechnen läßt.

Terminologie:

- Innerhalb eines Kapitels erfolgen Verweise zweistellig. Die erste Stelle gibt die Nummer des Paragraphen innerhalb des Kapitels an, die zweite Stelle die Nummer des Objekts (des Satzes, der Gleichung usw.), z.B. verweist (2.5) in Kapitel 3 auf die Gleichung 5 in Paragraph 3.2.

Verweise zwischen Kapiteln erfolgen dreistellig. Die erste Stelle gibt jetzt das Kapitel an, die zweite den Paragraphen innerhalb dieses Kapitels und die dritte die Nummer des Objekts, z.B. verweist (3.2.5) auf dieselbe Gleichung wie zuvor.

- Wir verwenden gelegentlich die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über gleiche obere und untere Indizes wird summiert.

1.2 Die Morse-Ungleichungen

In diesem Paragraphen wollen wir kurz die grundlegenden Begriffe der Morse-Theorie einführen, insbesondere den der *Morse-Funktion* und der *Bettizahl*. Hierbei definieren wir die Bettizahlen nicht in ihrer allgemeinsten Form, sondern als Dimensionen der de Rham Kohomologiegruppen, welche wir zuvor einführen. Anschließend zitieren wir die schwachen und die starken Morse-Ungleichungen, zeigen deren Äquivalenz zur Existenz eines bestimmten Kettenkomplexes und schließen mit einem illustrierenden Beispiel.

Mit M^n bezeichnen wir im folgenden eine **geschlossene** (kompakte und unberandete) glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n . $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine glatte Funktion.

$p \in M$ heißt **kritischer Punkt von f** , falls gilt $df(p) = 0$. Das heißt in einem und damit jedem lokalen Koordinatensystem x^1, \dots, x^n um p gilt

$$(2.1) \quad \partial_1 f(p) = \dots = \partial_n f(p) = 0 \quad .$$

Ein kritischer Punkt $p \in M$ heißt **nichtdegeneriert**, falls die **Hesse-Matrix**

$$(2.2) \quad \left(\partial_i \partial_j f(p) \right)_{ij \in \{1, \dots, n\}}$$

nichtdegeneriert ist, d.h. Null nicht als Eigenwert besitzt. Der **Morse-Index $Ind_f(p)$** eines nichtdegenerierten kritischen Punktes $p \in M$ ist definiert als die Anzahl der negativen Eigenwerte der Hesse-Matrix (diese ist symmetrisch und nichtdegeneriert \Rightarrow sie besitzt n reelle nichtverschwindende Eigenwerte). Diese Definitionen sind unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

Eine Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ heißt **Morse-Funktion**, falls gilt: Alle kritischen Punkte von f sind nichtdegeneriert.

Da M in unserem Fall kompakt ist, folgern wir leicht die Endlichkeit der Anzahl von kritischen Punkten von f (siehe z.B. [We, Prop. 1.2.5]). Mit $c_k(f)$ oder auch c_k bezeichnen wir die Anzahl der kritischen Punkte von f vom Morse-Index k .

Die kritischen Punkte von Morse-Funktionen haben lokal eine einfache Gestalt:

Lemma 2.1 (Morse-Lemma) [H, Kap.6, Lemma 1.1] Sei $p \in M$ ein nichtdegenerierter kritischer Punkt einer C^{r+2} -Abbildung $g: M \rightarrow \mathbb{R}$, $r \geq 1$, mit

$\text{Ind}_g(p) = k$, dann existiert eine C^r -Karte (φ, U) um p (genannt **Morse-Karte** oder auch **Morse-Koordinaten**), so daß gilt

$$g \circ \varphi^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(p) - \sum_{i=1}^k \xi_i^2 + \sum_{i=k+1}^n \xi_i^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Jetzt benötigen wir einige Grundbegriffe des Differentialformenkalküls. Mit $\Lambda^p(M)$, $p \in \{0, \dots, n\}$, bezeichnen wir den **Raum der glatten p -Formen auf M** .

$$d_p : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)$$

sei die **äußere Differentiation**, sie erfüllt

$$(2.3) \quad d_p \circ d_{p-1} = 0 \quad .$$

Es seien hierbei $\Lambda^p(M) := 0$ und $d_p := 0$ für $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n\}$. Aus (2.3) folgt $\text{Im } d_{p-1} \subseteq \text{Ker } d_p$, die folgende Definition macht also Sinn

$$(2.4) \quad H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) := \frac{\text{Ker } d_p}{\text{Im } d_{p-1}}, \quad p \in \mathbb{Z} \quad .$$

Die $H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R})$ sind endlichdimensionale Vektorräume, sie heißen **p -te de Rham Kohomologiegruppen von M** .

Die **Bettizahlen von M** seien nun definiert als

$$(2.5) \quad b_p := \dim H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) \quad , \quad p \in \mathbb{Z} \quad .$$

Üblicherweise werden die Bettizahlen im Rahmen der algebraischen Topologie als Dimensionen der singulären Homologiegruppen definiert. Die Definition (2.5) ist dann das Theorem von de Rham. Hieraus folgt die Unabhängigkeit der b_p von der gewählten differenzierbaren Struktur auf M .

Theorem 2.2 [H, Kap. 6, Thm. 3.5] Sei $f \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$, $r \geq 1$, eine Morse-Funktion auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M , dann gelten

i) **die starken Morse-Ungleichungen**

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} c_k \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} b_k \quad , \quad 0 \leq m \leq n \quad ,$$

ii)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k \quad .$$

Durch Summation der Ungleichungen aus i) für $m = i$ und $m = i - 1$ folgt das

Theorem 2.3 [H, Kap. 6, Thm. 3.7] *Die Voraussetzungen seien wie in Theorem 2.2, dann gelten die **schwachen Morse-Ungleichungen***

$$c_k \geq b_k \quad , \quad 0 \leq k \leq n \quad .$$

Theorem 2.4 *Die starken Morse-Ungleichungen (Thm. 2.2 i)) sind äquivalent zur Existenz eines Gruppenhomomorphismus $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) mit $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, wobei C_k die von den kritischen Punkten der Morse-Funktion f frei abelsch erzeugte Gruppe sei, d.h. $C_k \simeq \mathbb{Z}^{\#\text{Crit}_k f}$. Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n\}$ sei $C_k := 0$. Die Bettizahlen $b_k(\partial)$ des Kettenkomplexes $(C_k, \partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ stimmen mit jenen der Mannigfaltigkeit M überein.*

BEWEIS '⇒' Es gelte also Theorem 2.2 i). Wir definieren

$$\alpha_k := rk \text{ Ker } \partial_k \quad , \quad \beta_k := rk \text{ Im } \partial_k \quad ,$$

wobei rk den Rang einer Gruppe bezeichnet und Im bzw. Ker das Bild bzw. den Kern eines Gruppenhomomorphismus. Wir stellen an $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ drei Bedingungen

- i) ∂_k ist ein Gruppenhomomorphismus
- ii) $b_k(\partial) = b_k$
- iii) $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, was äquivalent ist zu $Im \partial_k \subset Ker \partial_{k-1}$.

Aus i) ergibt sich mit dem Homomorphiesatz für Gruppen

$$(2.6) \quad c_k = rk C_k = rk \text{ Ker } \partial_k + rk \text{ Im } \partial_k = \alpha_k + \beta_k \quad .$$

Aus ii) ergibt sich

$$(2.7) \quad b_k = b_k(\partial) = rk \frac{Ker \partial_k}{Im \partial_{k+1}} = \alpha_k - \beta_{k+1} \quad .$$

Aus iii) erhalten wir

$$(2.8) \quad \beta_k \leq \alpha_{k-1} \quad .$$

Es bleibt zu zeigen, daß Zahlen $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}_0$ ($k = 0, \dots, n$) existieren, so daß (2.6)-(2.8) erfüllt sind. Die Forderung (2.8) ergibt sich bereits aus (2.7): $\beta_k = \alpha_{k-1} - \beta_{k-1} \leq \alpha_{k-1}$. Aus (2.6) und (2.7) erhalten wir

$$(2.9) \quad \beta_{k+1} = c_k - b_k - \beta_k \quad .$$

Es ergeben sich hieraus

$$\beta_0 = c_{-1} - b_{-1} - \beta_{-1} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= c_0 - b_0 \\
\beta_2 &= c_1 - b_1 - (c_0 - b_0) = (c_1 - c_0) - (b_1 - b_0) \\
(2.10) \quad &: \\
\beta_k &= \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{s+k-1} c_s - \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{s+k-1} b_s \\
&: \\
\beta_{n+1} &= \sum_{s=0}^n (-1)^{s+n} c_s - \sum_{s=0}^n (-1)^{s+n} b_s = 0 = \beta_r \quad \text{für } r \geq n+1
\end{aligned}$$

, Thm. 2.2 i) .

Aus den starken Morse-Ungleichungen ergibt sich $\beta_k \geq 0$ für alle k , was notwendig ist um die β_k als Rang einer Gruppe zu interpretieren. Aus (2.6) erhalten wir nun $\alpha_k = c_k - \beta_k$, d.h.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= c_0 - \beta_0 = c_0 \\
\alpha_1 &= c_1 - (c_0 - b_0) = (c_1 - c_0) + b_0 \\
\alpha_2 &= c_2 - (c_1 - c_0) + (b_1 - b_0) = (c_2 - c_1 + c_0) + (b_1 - b_0) \\
(2.11) \quad &: \\
\alpha_k &= c_k - \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{s+k-1} c_s - \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{s+k-1} b_s \\
&= \sum_{s=0}^k (-1)^{s+k} c_s + \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{s+k-1} b_s \\
&: \\
\alpha_{n+1} &= c_{n+1} - \beta_{n+1} = 0 = \alpha_r \quad \text{für } r \geq n+1 .
\end{aligned}$$

Mittels der starken Morse-Ungleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad \alpha_k &= \sum_{s=0}^k (-1)^{s+k} c_s - \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{s+k-1} b_s \\
&\geq \sum_{s=0}^k (-1)^{s+k} b_s - \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{s+k-1} b_s = b_k \geq 0 .
\end{aligned}$$

∂_k wird nun wie folgt konstruiert: Auf α_k Erzeugern von C_k definieren wir ∂_k zu Null, den restlichen $\beta_k = c_k - \alpha_k$ Erzeugern ordnen wir Erzeuger von C_{k-1} zu. $\text{Ker } \partial_{k-1}$ wählen wir nun so, daß letztere Erzeuger darin enthalten sind (möglich da $\beta_k \leq \alpha_{k-1}$). Die Konstruktion ergibt sich nun iterativ.

' \Leftarrow ' Mit Bezeichnungen wie zuvor ergibt sich unter Verwendung der Relationen (2.6)-(2-8) und $\beta_0 = 0$

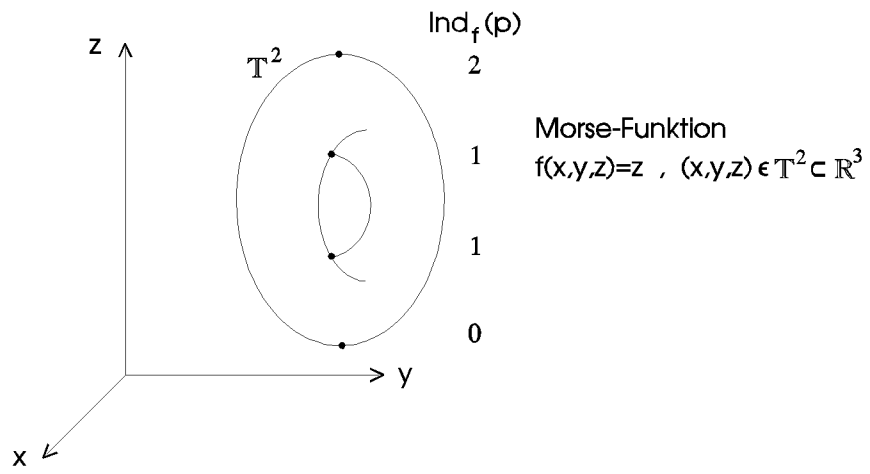
$$\begin{aligned}
c_0 &= \alpha_0 + \beta_0 = b_0 + \beta_1 \geq b_0 \\
c_1 - c_0 &= \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_0 - \beta_0 && , (2.6) \\
&\geq \alpha_1 - \beta_2 - (\alpha_0 - \beta_1) && , \beta_2 \geq 0 \\
&= b_1 - b_0 && , (2.7) \\
c_2 - c_1 + c_0 &= \alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_0 + \beta_0 && , (2.6) \\
&\geq (\alpha_2 - \beta_3) - (\alpha_1 - \beta_2) + (\alpha_0 - \beta_1) && , \beta_3 \geq 0 \\
&= b_2 - b_1 + b_0 && , (2.7) \\
&\vdots \\
c_k - c_{k-1} + c_{k-2} - \dots \pm c_0 \\
&= \alpha_k + \beta_k - \alpha_{k-1} - \beta_{k-1} + \alpha_{k-2} + \beta_{k-2} - \dots \pm \alpha_0 \pm \beta_0 \\
&\geq (\alpha_k - \beta_{k+1}) - (\alpha_{k-1} - \beta_k) + (\alpha_{k-2} - \beta_{k-1}) - \dots \pm (\alpha_0 - \beta_1) \\
&= b_k - b_{k-1} + b_{k-2} - \dots \pm b_0 \quad \square
\end{aligned}$$

Die Morse Ungleichungen zeigen, daß die Topologie einer glatten Mannigfaltigkeit die Analysis auf ihr einschränkt: Eine Morse-Funktion auf einer Mannigfaltigkeit mit Bettizahlen b_k muß mindestens b_k kritische Punkte vom Morse-Index k besitzen.

Beispiel 2.5 Sei $M = \mathbb{T}^2$ der **2-Torus**, eingebettet in den \mathbb{R}^3 , wie in Figur 2.1 skizziert. Aus der algebraischen Topologie ist bekannt, daß gilt

$$(2.6) \quad b_0(\mathbb{T}^2) = 1 \quad , \quad b_1(\mathbb{T}^2) = 2 \quad , \quad b_2(\mathbb{T}^2) = 1 \quad .$$

Sei nun $f: \mathbb{R}^3 \supset \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$, die Höhenfunktion. Diese hat offenbar genau 4 kritische Punkte. Ein Minimum mit $Ind_f(m) = 0$, zwei Sattelpunkte mit $Ind_f(m_i) = 1$ und ein Maximum mit $Ind_f(M) = 2$. Dieses Beispiel realisiert also gerade die, durch die Morse-Ungleichungen gegebene, minimale Anzahl kritischer Punkte einer beliebigen Morse-Funktion auf \mathbb{T}^2 .



Figur 2.1

1.3 Physikalische Motivation

In diesem Paragraphen wollen wir das Konzept der Supersymmetrie in der Physik skizzieren (siehe z.B. [BL, Ch. 1...3] für mehr Details) und motivieren welche physikalischen Untersuchungen und Überlegungen zu dem Wittenschen Beweis der Morse-Ungleichungen (siehe Kapitel 2), sowie zum Morse-Witten Komplex (siehe Kapitel 3) führen. Wir orientieren uns hierbei vor allem an den Artikeln [Wi1],[Wi2],[Wi3]. Im ersten Teil 'SUPERSYMMETRISCHE QUANTENFELD-THEORIE' (im folgenden SS QFT abgekürzt) diskutieren wir insbesondere den Aspekt der spontanen Symmetriebrechung. Indem wir die Ortsabhängigkeit der Felder streichen, gelangen wir von der SS QFT zur 'SUPERSYMMETRISCHEN QUANTENMECHANIK' (SS QM); diesen Begriff diskutieren wir im zweiten Teil. Er führt zu Wittens deformierter Hodge-Theorie, sowie zum Morse-Witten Komplex.

SUPERSYMMETRISCHE QUANTENFELDTHEORIE

Wir betrachten im folgenden nur den Fall von 1+1 Dimensionen (d.h. eine Raum- und eine Zeitdimension), sowie einem **Supersymmetrieoperator** Q_α (d.h. $N = 1$, $\alpha = 1, 2$ ist ein Spinorindex). Der Hilbertraum \mathfrak{H} einer QFT läßt sich als direkte Summe der bosonischen Zustände \mathfrak{H}_b und der fermionischen Zustände \mathfrak{H}_f schreiben

$$(3.1) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_f \oplus \mathfrak{H}_b \quad .$$

Sei N_F der Operator der Fermionenzahl, und sei $(-1)^{N_F}$ der Operator der Fermionenzahl modulo 2; er sei definiert durch

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (-1)^{N_F} \varphi &= \varphi \quad , \quad \forall \varphi \in \mathfrak{H}_b \quad , \\ (-1)^{N_F} \psi &= -\psi \quad , \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}_f \quad . \end{aligned}$$

Für den Supersymmetrieoperator Q_α soll nun folgende Bedingung gelten

$$(3.3) \quad \{(-1)^{N_F}, Q_\alpha\} := (-1)^{N_F} Q_\alpha + Q_\alpha (-1)^{N_F} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad ,$$

d.h. Q_α bildet \mathfrak{H}_b in \mathfrak{H}_f und \mathfrak{H}_f in \mathfrak{H}_b ab. Die **Supersymmetriealgebra** lautet

$$(3.4) \quad [Q_\alpha, H] := Q_\alpha H - H Q_\alpha = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad , \quad \{Q_1, Q_2\} = 0 \quad ,$$

d.h. Q_α ist tatsächlich ein Symmetrieoperator und führt daher zu einer Erhaltungsgröße. Diese Superladung (vgl. z.B. [IZ, Se. 3-1-3] für den analogen Fall der elektrischen Ladung) ist wie sich herausstellt durch #Fermionen – #Bosonen

gegeben.

Da wir nur eine Raumdimension betrachten, gibt es genau einen Impulsoperator P und die Supersymmetriealgebra (3.4) ist realisiert durch

$$(3.5) \quad Q_1^2 = H + P \quad , \quad Q_2^2 = H - P \quad \text{mit} \quad \{Q_1, Q_2\} = 0 \quad .$$

Es ergibt sich (mit der Jacobi-Identität), daß die Forderung (3.4) erfüllt ist, sowie daß gilt $[Q_\alpha, P] = 0$. Durch Addition der ersten beiden Gleichungen in (3.5) erhalten wir außerdem

$$(3.6) \quad H = \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2) \quad ,$$

d.h. H ist positiv semi-definit. Ein Zustand $\Omega \in \mathfrak{H}$ mit

$$(3.7) \quad Q_\alpha \Omega = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad ,$$

heißt **invariant unter Supersymmetrie**, wir sagen dann das System besitze Supersymmetrie. Es gilt für $\omega \in \mathfrak{H}$

$$(3.8) \quad H\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_\alpha \omega = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad .$$

Falls also ein supersymmetrieeinvarianter Zustand Ω existiert, so hat er Energie Null und ist somit der Grundzustand (das Vakuum). Die Supersymmetrie heißt **spontan gebrochen**, falls kein supersymmetrieeinvarianter Zustand existiert. In diesem Fall hat also der Grundzustand positive Energie. Falls Supersymmetrie vorliegt, kann gezeigt werden, daß Fermionen und Bosonen in Dupletts gleicher Masse vorliegen. Dies wird aber experimentell nicht beobachtet, d.h. Supersymmetrie muß bei den heutzutage experimentell erreichbaren Energien spontan gebrochen sein.

Um zu entscheiden ob in einem System spontane Supersymmetriebrechung vorliegt, müssen wir also untersuchen, ob der Energieeigenwert Null auftritt. Falls ja, so muß wegen (3.5) der Impulsoperator P auf dem zugehörigen Eigenraum verschwinden. Wir beschränken uns also zur Untersuchung des Energieeigenwerts Null oBdA auf den Teilraum \mathfrak{H}^0 von \mathfrak{H} , auf welchem P identisch Null ist. Auf $\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H}_f^0 \oplus \mathfrak{H}_b^0$ vereinfacht sich die Realisierung (3.5) der Supersymmetriealgebra (3.4) zu

$$(3.9) \quad Q_1^2 = Q_2^2 = H \quad , \quad \{Q_1, Q_2\} = 0 \quad ,$$

es genügt daher einen der beiden Operatoren Q_1, Q_2 auf das Auftreten des Eigenwerts Null zu untersuchen; wir nennen diesen Operator im folgenden Q . Seien nun

$$(3.10) \quad n_f^{E=0} \text{ bzw. } n_b^{E=0}$$

die Anzahl fermionischer bzw. bosonischer Zustände mit Energie Null. Der Operator

Q paart fermionische und bosonische Zustände nichtverschwindender Energie. Diese tragen also nicht zu der formalen Größe $Tr(-1)^{N_F}$ bei, also ist formal

$$(3.11) \quad Tr(-1)^{N_F} = n_b^{E=0} - n_f^{E=0} \quad .$$

Diese Größe betrachten wir aus zwei Gründen:

i) Sie ist invariant unter Variation der Parameter der betrachteten Theorie (Volumen, Massen, Kopplungskonstanten), denn Übergänge von Zuständen verschwindender in solche mit nichtverschwindender Energie (oder umgekehrt) müssen in Paaren (Boson, Fermion) geschehen. $n_b^{E=0} - n_f^{E=0}$ ändert sich also nicht. Wir können demnach eine zu ihrer Berechnung bequeme Wahl der Parameter treffen. Außerdem liefert die Berechnung mittels Störungstheorie ein exaktes Ergebnis, denn jeder Korrekturterm zur Energie eines bosonischen Zustands hat einen entsprechenden fermionischen Korrekturterm zur Folge.

ii) Falls $n_b^{E=0} - n_f^{E=0} \neq 0$ ist, existiert offenbar ein Zustand mit Energie Null; die Supersymmetrie ist also nicht gebrochen.

Wie in Paragraph 2.5 ausgeführt, siehe (2.5.5), hat Q bezüglich der Aufspaltung $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_f \oplus \mathfrak{H}_b$ die Gestalt

$$(3.12) \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Zustände verschwindender Energie sind genau jene in $Ker Q$. Bosonische Zustände in $Ker Q$ sind genau jene in $Ker A$, fermionische in $Ker Q$ genau jene in $Ker A^*$, d.h. es gilt

$$(3.13) \quad \begin{aligned} n_b^{E=0} - n_f^{E=0} &= \dim Ker A - \dim Ker A^* \\ &= \dim Ker A - \dim Coker A \\ &= index A \quad . \end{aligned}$$

Im Fall von Beispiel 2.5.3 ist \mathfrak{H} die L^2 -Vervollständigung der Menge der glatten Differentialformen und $A = \bar{d}$ der Abschluß des Operators der äußeren Differentiation. (\mathfrak{H}, d) ist nach [Ch, App. Se. 1] ein elliptischer Komplex und $index A$ daher definiert. Die obige Eigenschaft i) ist nun ein Spezialfall der Invarianz des Index eines Operators unter bestimmten Deformationen, siehe z.B. [BB].

Witten untersuchte $Tr(-1)^{N_F}$ für das **nichtlineare supersymmetrische Sigma-Modell** [Wi2]. In diesem Modell haben die skalaren Felder Werte in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension n . Lokale Koordinaten $\varphi^1, \dots, \varphi^n$

auf M beschreiben n skalare Felder (d.h. neutral und bosonisch), g_{ij} sei die Metrik auf M in diesen Koordinaten. Die Lagrange-Funktion für n freie, massive Superfelder

$$\phi^i = \begin{bmatrix} \varphi^i \\ \psi^i \end{bmatrix}$$

lautet ausgedrückt in den Komponentefeldern φ^i, ψ^i nach [Wi3]

$$(3.14) \quad L = \int d^2x \left(\frac{1}{2} g_{ij} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j + \frac{i}{2} g_{ij} \bar{\psi}^i \gamma^k D_k \psi^j + \frac{1}{8} R_{ijkl} \bar{\psi}^i \psi^k \bar{\psi}^j \psi^l \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial(\tilde{t}f)}{\partial \varphi^i} \cdot \frac{\partial(\tilde{t}f)}{\partial \varphi^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\tilde{t}f)}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} \bar{\psi}^i \psi^j \right) \quad , \quad \mu, k = 0, \dots, 3 \quad ,$$

hierbei sind γ^k Dirac-Matrizen, D_k eine kovariante Ableitung nach der k -ten Koordinate, ψ^i antikommutierende Vektorfelder auf M , R_{ijkl} der Krümmungstensor von M und f ist eine Morse-Funktion auf M (das Superpotential), $\tilde{t} \in \mathbb{R}^+$ ist ein Parameter. Wir wählen auf M eine Metrik, die lokal bei den kritischen Punkten $Crit f$ von f flach ist und bezüglich der die Hesse-Matrix $(\partial^2(\tilde{t}f)/\partial \varphi^i \partial \varphi^j)$ von $\tilde{t}f$ diagonal ist (Morse-Koordinaten). In der Nähe der kritischen Punkte beschreibt (3.14) eine QFT mit n freien Bosonen der Masse $\sqrt{2}$ und n freien Fermionen deren Massen gerade durch die (nichtverschwindenden) Eigenwerte der Hesse-Matrix von $\tilde{t}f$ gegeben sind, siehe z.B. [BL, Se. 2.5]. Der vorletzte Term $\frac{\tilde{t}^2}{2} |\nabla f|^2$ stellt das effektive Potential in der Störungstheorie 1. Ordnung (Feynman Baumdiagramme) dar. Er verschwindet genau auf $Crit f$, d.h. wir haben $\#Crit f$ Vakua.

Es bleibt festzulegen welche der Vakua bosonisch und welche fermionisch sind. Wittens physikalische Überlegungen in [Wi2, Se. 10] führen dazu, daß er jene Vakua bosonisch bzw. fermionisch nennt, deren zugehöriger kritischer Punkt von f geraden bzw. ungeraden Morse-Index besitzt. Hieraus ergibt sich

$$(3.15) \quad Tr(-1)^{N_F} = \sum_{x \in Crit f} (-1)^{Ind_f(x)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k = \chi(M) \quad ,$$

wobei c_k die Anzahl von $x \in Crit f$ mit Morse-Index k bezeichnet. $\chi(M)$ ist die Eulercharakteristik von M und ist eine topologische Invariante. Dies verdeutlicht noch einmal die Unabhängigkeit von $Tr(-1)^{N_F}$ von den Parametern der Theorie. Damit haben wir ein einfaches Kriterium dafür, daß Supersymmetrie nicht spontan gebrochen ist, nämlich $\chi(M) \neq 0$.

SUPERSYMMETRISCHE QUANTENMECHANIK

Indem wir nun die Ortsabhängigkeit der Felder in (3.14) streichen, gehen wir von der QFT zur QM über. Wir erhalten folgenden Ausdruck (beachte: in (3.14) ist $d^2x = dx dt$)

$$(3.16) \quad I = l \int dt \left(\frac{1}{2} g_{ij} \partial_t \varphi^i \partial_t \varphi^j + \frac{i}{2} g_{ij} \bar{\psi}^i \gamma^0 D_t \psi^j + \frac{1}{8} R_{ijkl} \bar{\psi}^i \psi^k \bar{\psi}^j \psi^l \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \tilde{t}^2 g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} - \frac{1}{2} \tilde{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} \bar{\psi}^i \psi^j \right) .$$

l ist das Volumen der Raumkomponente unserer $(1+1)$ -dimensionalen Raumzeit. Wir interpretieren den Integranden als Lagrange-Funktion $L(\varphi^i, \dot{\varphi}^i, \psi^j, \dot{\psi}^j)$. Durch eine Legendretransformation gehen wir über zur entsprechenden Hamilton-Funktion und anschließend quantisieren wir das System kanonisch: $\varphi^i \mapsto \varphi^i$, $p_{\varphi^i} \mapsto -i \cdot d/d\varphi^i$, die ψ^j betrachten wir als Operatoren mit folgenden Antikommutationsrelationen

$$(3.17) \quad \{\psi^i, \psi^j\} = 0 = \{(\psi^i)^*, (\psi^j)^*\} \quad , \quad \{\psi^i, (\psi^j)^*\} = g^{ij} \quad .$$

Mit unserer speziell gewählten Metrik ergibt sich lokal bei $Crit f$ (Metrik flach $\Leftrightarrow R_{ijkl} = 0$) der Hamiltonoperator (modulo dem konstanten Faktor $l/2$)

$$(3.18) \quad H_{\tilde{t}} = \Delta + \tilde{t}^2 |\nabla f|^2 + \tilde{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} [(a^i)^*, a^j] \quad , \quad \Delta \text{ Laplace-Op.} \\ = d_{\tilde{t}}^* d_{\tilde{t}} + d_{\tilde{t}} d_{\tilde{t}}^* \quad , \quad d_{\tilde{t}} := e^{-\tilde{t}f} d e^{\tilde{t}f}, \text{ s. Kap. 2.2} \\ = (d_{\tilde{t}} + d_{\tilde{t}}^*)^2 \quad , \quad d_{\tilde{t}}^2 = 0 = (d_{\tilde{t}}^*)^2 \\ = Q^2 \quad , \quad (3.9) .$$

Witten [Wi2, p. 309] interpretierte die Operatoren $(\psi^j)^*$ bzw. ψ^j als Fermionenerzeuger bzw. -vernichter und den (Prä-)Hilbertraum dieses quantenmechanischen Systems als den Raum der glatten Differentialformen $\Lambda(M)$ auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit M . Wie in Kapitel 2.2 sind $(a^j)^* := (\psi^j)^*$ bzw. $a^j := \psi^j$ die Operatoren der äußeren bzw. inneren Multiplikation auf $\Lambda(M)$.

Das Studium von $Ker H_{\tilde{t}}$ führte Witten in [Wi3] zunächst zum Beweis der schwachen Morse-Ungleichungen; dieser Beweis ist in Kapitel 2 detailliert dargestellt (\tilde{t} ist dort mit t bezeichnet). Witten argumentierte, daß die Eigenformen von $H_{\tilde{t}}$ zum Eigenwert 0 für großes \tilde{t} bei $Crit f$ lokalisiert sein müssen, und er approximiert $H_{\tilde{t}}$ dort durch einen Operator (im wesentlichen die direkte Summe von harmonischen Oszillatoren) dessen Kern explizit berechenbar ist. Die starken Morse-

Ungleichungen beweisen wir in Kapitel 2.5 und 2.6 mittels den Supersymmetrieeigenschaften unseres Systems.

Witten wollte nun das tiefliegende Spektrum von $H_{\tilde{t}}$ noch genauer analysieren, indem er die obige Approximation durch Berücksichtigung von **Tunneleffekten (Instantonen)** zu verbessern gedachte. Die Interpretation von Matrixelementen $\langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle$ mittels des Feynman Pfadintegrals (siehe z.B. [IZ, Ch. 9]) zeigt, daß die wesentlichen Beiträge von den Lösungen der klassischen Bewegungsgleichungen herrühren. Es gilt also (nun in invarianter Notation)

$$(3.19) \quad I(\varphi) = \frac{l}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(|\dot{\varphi}(t)|^2 + \tilde{t}^2 |\nabla f(\varphi(t))|^2 \right)$$

zu minimieren. Hierbei sei $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und es gelte für $x, y \in \text{Crit } f$

$$(3.20) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = x \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = y \quad .$$

Die Lösungen dieses Variationsproblems sind genau die Trajektorien des negativen Gradientenflusses der Morse-Funktion f auf M , welche von x nach y führen. Wir sehen dies folgendermaßen ein: Es ist

$$(3.21) \quad \left| \dot{\varphi} \pm \tilde{t} \nabla f(\varphi) \right|^2 = |\dot{\varphi}|^2 \pm 2\tilde{t} \langle \nabla f(\varphi), \dot{\varphi} \rangle + \left| \tilde{t} \cdot \nabla f(\varphi) \right|^2$$

und

$$(3.22) \quad \langle \nabla f(\varphi(t)), \frac{d\varphi}{dt} \rangle = df(\varphi(t)) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \quad .$$

Damit erhalten wir

$$(3.23) \quad \begin{aligned} I(\varphi) &= \frac{l}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \frac{d\varphi}{dt} \pm \tilde{t} \nabla f(\varphi) \right|^2 \mp \frac{l}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(2\tilde{t} \cdot \frac{d}{dt} f(\varphi) \right) \\ &= \frac{l}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \frac{d\varphi}{dt} \pm \tilde{t} \nabla f(\varphi) \right|^2 \mp l \tilde{t} \cdot (f(y) - f(x)) \\ &\geq \mp l \tilde{t} \cdot (f(y) - f(x)) \quad . \end{aligned}$$

Die absoluten Minima bei vorgegebenen Endpunkten $x, y \in \text{Crit } f$ sind also die Lösungen von

$$(3.24) \quad \frac{d}{dt} \varphi(t) = \pm \tilde{t} \cdot \nabla f(\varphi(t)) \quad .$$

Wir wählen das ' - ' Zeichen, dann ist f längs Lösungen von (3.24) monoton fallend.

Witten zeigt, daß für den Instantonkorrekturterm nur jene Lösungen von (3.24) relevant sind mit $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) = 1$. Nun erinnern wir uns daran (Thm 2.4), daß

die starken Morse-Ungleichungen äquivalent dazu sind, daß die kritischen Punkte von f ein Modell der Homologie von M beschreiben und zwar in folgendem Sinn: Seien C_k , $k = 0, \dots, n$, freie abelsche Gruppen erzeugt von den kritischen Punkten von f vom Morse-Index k . Die starken Morse-Ungleichungen sind nun äquivalent zur Existenz eines Operators $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ mit $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, so daß die Bettizahlen bezüglich der Homologie von ∂ gleich denen der singulären Homologie von M sind.

Die Morse-Ungleichungen liefern jedoch keine kanonische Form für den Randoperator ∂ . Die Idee ist nun die zuvor diskutierten Tunnelpfade zur Konstruktion von ∂ zu verwenden. Dies geschieht in Kapitel 3. Dort skizzieren wir zunächst den Beweis von $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$; dieses Resultat wurde in [Wi3] als plausibel betrachtet, jedoch nicht bewiesen. Ein detaillierter Beweis findet sich in [We]. Daß die Homologie bezüglich ∂ kanonisch isomorph zur singulären Homologie von M ist, werden wir ebenfalls nur skizzieren. Die Details für diesen Beweis sind noch nicht vollständig ausgearbeitet, mittels anderer (indirekter) Zugänge wurde ein Isomorphismus jedoch bereits mehrfach bewiesen, siehe [Mi] [F11] [Sa] [Sch].

Wir schließen nun diese skizzenhafte Exkursion über die physikalischen Hintergründe und Untersuchungen die Witten zu seinem neuen Beweis der Morse-Ungleichungen führten und kehren im folgenden zu mathematischer Strenge zurück.

Kapitel 2

Der Wittensche Beweis der Morse-Ungleichungen

In diesem Kapitel wollen wir die Morse-Ungleichungen, sowohl in der schwachen, als auch in der starken Form beweisen. Wir folgen hierbei den Ideen von E. Witten [Wi3].

In **Paragraph 2.1** rufen wir uns die Grundzüge der Hodge-Theorie in Erinnerung. Wir bilden den Abschluß des Raumes $\Lambda^p(M)$ der p -Differentialformen auf der Mannigfaltigkeit M bezüglich eines inneren Produkts $\langle \cdot, \cdot \rangle^p$ und erhalten einen Hilbertraum $\bar{\Lambda}^p(M)$. Wir definieren den Laplace-Beltrami-Operator L als Abschluß in $\bar{\Lambda}^p(M)$ des Operators $dd^* + d^*d$ auf $\Lambda^p(M)$. L ist selbstadjungiert, positiv und von unten durch Null beschränkt. Es gilt

$$\dim \text{Ker } L = b_p \quad .$$

In **Paragraph 2.2** betrachten wir Wittens deformierten Laplace-Operator. Wir konjugieren die äußere Differentiation d mit e^{-tf} (f sei eine Morse-Funktion, $t \in \mathbb{R}$) und definieren L_t analog zu L

$$d_t := e^{-tf} d e^{tf} \quad , \quad L_t := d_t d_t^* + d_t^* d_t \quad .$$

Für L_t gelten entsprechende Resultate wie für L , insbesondere

$$\dim \text{Ker } L_t = b_p \quad .$$

Unter Verwendung einer mittels Morse-Koordinaten konstruierten Metrik berechnen wir L_t zu

$$L_t = L + t^2 \cdot \|df\|^2 + t \cdot A \quad ,$$

wobei A ein beschränkter Operator nullter Ordnung ist. Die beiden letzten Terme interpretieren wir als Potential. Für großes t sind die lokalen Minima genau durch die kritischen Punkte von f gegeben. Es ist nun naheliegend, daß sich der $t \rightarrow \infty$ Limes von L_t als direkte Summe $\bigoplus_a K^{(a)}$ von harmonischen Oszillatoren $K^{(a)}$ ergibt, welche bei den kritischen Punkten von f lokalisiert sind.

In **Paragraph 2.3** zeigt sich, daß diese Vermutung richtig ist. Den $t \rightarrow \infty$ Limes nennen wir quasiklassischen Limes. Für großes t vereinfacht sich das Spektrum von L_t , es spaltet in einen tiefliegenden und einen hochliegenden Anteil auf. Die Eigenwerte in ersterem wachsen schwächer als t , jene in letzterem mindestens wie t .

In **Paragraph 2.4** werden wir die schwachen Morse-Ungleichungen beweisen. Wir analysieren hierzu den quasiklassischen Limes $\bigoplus_a K^{(a)}$ von L_t . Es stellt sich heraus, daß jeder Summand $K^{(a)}$ genau eine Eigenfunktion (-form) zum Eigenwert Null besitzt. Diese ist bei einem kritischen Punkt $x^{(a)}$ von f lokalisiert. Sie ist eine Differentialform vom Grad $\text{Ind}_f(x^{(a)})$. Es ergibt sich

$$\dim \text{Ker } \bigoplus_a K^{(a)} = c_p := \# \{x \in M \mid df(x) = 0, \text{Ind}_f(x) = p\} \quad .$$

Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte von L_t liefert $c_p \geq b_p$.

In **Paragraph 2.5** definieren wir den Begriff 'Supersymmetrische Quantenmechanik'. Die Bedeutung dieser Theorie für den Beweis der starken Morse-Ungleichungen liegt darin, daß für nichtverschwindende Eigenwerte von L_t die zugehörigen Eigenformen in Paaren (p gerade, p ungerade) oder physikalisch ausgedrückt (bosonisch, fermionisch) auftreten (p sei der Grad der Form).

In **Paragraph 2.6** werden die starken Morse-Ungleichungen bewiesen.

2.1 Der Laplace-Beltrami-Operator L

In diesem Paragraphen soll der Laplace-Beltrami Operator L definiert werden. Dies geschieht in Verallgemeinerung des bekannten Laplace-Operators $\sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial (x^i)^2$ auf dem \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt. Wir konstruieren zunächst ein L^2 -inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle^p$ auf den glatten p -Formen $\Lambda^p(M)$ und bilden dann die Vervollständigung $\bar{\Lambda}^p(M)$ bezüglich dieses inneren Produkts. Anschließend definieren wir den Operator $L: D(L) \subset \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M)$ als Abschluß des Operators $d^*d + dd^*: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$ im Hilbertraum $(\bar{\Lambda}^p(M), \langle \cdot, \cdot \rangle^p)$.

Am Ende zeigen wir ein Hauptresultat der Hodge-Theorie, nämlich

$$(1.1) \quad b_p := \dim H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) = \dim \text{Ker } L \quad .$$

Wir setzen ab jetzt voraus, daß unsere glatte, geschlossene Mannigfaltigkeit M^n zusätzlich orientierbar sei und wählen eine feste Orientierung von M^n . Eine **Orientierung von M^n** besteht aus einem Atlas $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, so daß die Jacobimatrizen der Übergangsabbildungen

$$(1.2) \quad \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

positive Determinante besitzen.

Weiter wählen wir eine Riemannsche Metrik g auf M . Eine solche existiert aufgrund der Kompaktheit von M (üblicher Beweis: Wähle endlichen Atlas $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ und eine untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$. $g_m(\cdot, \cdot) := \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(m) \cdot (\varphi_\alpha^{-1})^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine Metrik auf M , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne z.B. die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n , siehe z.B. [We, S. 13]).

DAS L^2 -INNERE PRODUKT AUF $\Lambda^p(M)$

Die Metrik g auf M liefert für jedes $m \in M$ ein inneres Produkt $g_m(\cdot, \cdot)$ auf $T_m M$, welches glatt von m abhängt; d.h. für $X, Y \in \mathfrak{X}(M) := \{\text{glatte Vektorfelder auf } M\}$ ist $g_m(X(m), Y(m)) \in \mathfrak{F}(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$. Mittels des folgenden Lemmas erhalten wir ein inneres Produkt auf $T_m^* M$.

Lemma 1.1 [O'N, Kap.3 Prop.10] *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist durch*

$$\begin{aligned} i : \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \Lambda^1(M) \\ V &\mapsto g(V, \cdot) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus definiert.

BEWEIS Injektivität Seien $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ und sei $i(V) = i(W)$, d.h. $g(V, X) = g(W, X)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\Rightarrow g(V - W, X) = 0 \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

$$\Rightarrow V - W = 0 \quad , \quad \text{wegen der Nichtdegeneriertheit von } g.$$

Surjektivität Sei $\theta \in \Lambda^1(M)$, nun ist die Existenz eines $V \in \mathfrak{X}(M)$ zu zeigen mit $\theta(\cdot) = g(V, \cdot)$. Sei $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ eine Karte von M . In U ergibt sich $\theta = \theta_i dx^i$, und wir definieren

$$(1.3) \quad V := g^{ij} \theta_j \partial_i \quad ,$$

wobei $((g^{ij}))$ die inverse Matrix von $((g_{ij})) = ((g(\partial_i, \partial_j)))$ ist. Es genügt zu zeigen $\theta(\partial_k) = g(V, \partial_k)$.

$$g(V, \partial_k) = g(g^{ij} \theta_j \partial_i, \partial_k) = g^{ij} \theta_j g_{ik} = \theta_j \delta_k^j = \theta_k = \theta(\partial_k) \quad .$$

V ist in U aufgrund der Injektivität von i eindeutig festgelegt. In einer Karte (\tilde{U}, ψ) erhalten wir analog ein $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(\tilde{U})$. Auf $U \cap \tilde{U}$ muß gelten: $V = \tilde{V}$. Die lokal konstruierten Vektorfelder sind also auf dem Überlapp zweier Karten identisch, sie definieren daher ein globales Vektorfeld. \square

Mittels der inversen Abbildung

$$(1.4) \quad i^{-1} : \Lambda^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

beziehungsweise

$$(1.5) \quad i^{-1}|_m : T_m^* M \rightarrow T_m M$$

können wir das innere Produkt g_m von $T_m M$ nach $T_m^* M$ zurückziehen:

$$(1.6) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_m^1 : T_m^* M \times T_m^* M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \omega^1, \omega^2 \rangle_m^1 := g_m(i^{-1}|_m \omega^1, i^{-1}|_m \omega^2) \quad , \quad \forall \omega^1, \omega^2 \in T_m^* M \quad .$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_m^1$ hängt insbesondere glatt vom Fußpunkt $m \in M$ ab (dies ergibt sich aus (1.3)).

Mit diesem inneren Produkt auf $T_m^* M$ definieren wir nun ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_m^p$ auf $\Lambda^p(T_m^* M)$, dem p -fachen antisymmetrischen Tensorprodukt von $T_m^* M$.

Sei $\{\omega^1(m), \dots, \omega^n(m)\}$ eine **ONB** (Orthonormalbasis) von $T_m^* M$, dann bildet

$$(1.7) \quad \{\omega^{i_1}(m) \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}(m) \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n\}$$

eine Basis von $\Lambda^p(T_m^* M)$. Wir deklarieren diese Basis nun als orthonormal und

erhalten so ein **inneres Produkt auf $\Lambda^p(T_m^*M)$**

$$(1.8) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_m^p : \Lambda^p(T_m^*M) \times \Lambda^p(T_m^*M) \rightarrow \mathbb{R} \quad .$$

Die Unabhängigkeit dieses inneren Produkts von der zu seiner Definition gewählten ONB von T_m^*M ergibt sich aus der folgenden Proposition, welche eine basisunabhängige Formel für $\langle \cdot, \cdot \rangle_m^p$ liefert.

Proposition 1.2 [CFKS, Se. 11.3] *Seien $\lambda^1, \dots, \lambda^p, \rho^1, \dots, \rho^p \in T_m^*M$, dann gilt*

$$\langle \lambda^1 \wedge \dots \wedge \lambda^p, \rho^1 \wedge \dots \wedge \rho^p \rangle_m^p = \det \left((\langle \lambda^i, \rho^j \rangle_m^1)_{i,j \in \{1, \dots, p\}} \right)$$

BEWEIS Sei $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ eine ONB von T_m^*M und seien $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ mit $i_r \neq i_s$ für $r \neq s$, dann ist

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \langle \lambda^1 \wedge \dots \wedge \lambda^p, \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p} \rangle_m^p &= \langle \lambda_{k_1}^1 \omega^{k_1} \wedge \dots \wedge \lambda_{k_p}^p \omega^{k_p}, \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p} \rangle_m^p \\ &= \lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_p}^p \langle \omega^{k_1} \wedge \dots \wedge \omega^{k_p}, \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p} \rangle_m^p \\ &= \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{i_1, \dots, i_p\}}} \lambda_{\pi(1)}^1 \dots \lambda_{\pi(p)}^p \cdot (-1)^{\text{sgn } \pi} \quad , \end{aligned}$$

wobei $\text{sgn } \pi$ gleich 0 ist für gerade Permutationen und gleich 1 für ungerade. Weiter gilt

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \det \left((\langle \lambda^r, \omega^{i_j} \rangle_m^1)_{r,j \in \{1, \dots, p\}} \right) &= \\ &= \sum_{\substack{\text{Perm. } \pi \text{ von} \\ \{i_1, \dots, i_p\}}} (-1)^{\text{sgn } \pi} \cdot \langle \lambda^1, \omega^{\pi(1)} \rangle_m^1 \dots \langle \lambda^p, \omega^{\pi(p)} \rangle_m^1 \quad , \text{ [BS, 2.4.4.2.2]} \\ &= \sum_{\substack{\text{Perm. } \pi \text{ von} \\ \{i_1, \dots, i_p\}}} (-1)^{\text{sgn } \pi} \cdot \lambda_{k_1}^1 \underbrace{\langle \omega^{k_1}, \omega^{\pi(1)} \rangle_m^1}_{= \delta^{k_1, \pi(1)}} \dots \lambda_{k_p}^p \underbrace{\langle \omega^{k_p}, \omega^{\pi(p)} \rangle_m^1}_{= \delta^{k_p, \pi(p)}} \\ &= \sum_{\substack{\text{Perm. } \pi \text{ von} \\ \{i_1, \dots, i_p\}}} (-1)^{\text{sgn } \pi} \cdot \lambda_{\pi(1)}^1 \dots \lambda_{\pi(p)}^p \quad . \end{aligned}$$

Es ist also für $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, p\}$

$$(1.11) \quad \langle \lambda^1 \wedge \dots \wedge \lambda^p, \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p} \rangle_m^p = \det \left((\langle \lambda^r, \omega^{i_j} \rangle_m^1)_{r,j \in \{1, \dots, p\}} \right) \quad .$$

Nun ist

$$\langle \lambda^1 \wedge \dots \wedge \lambda^p, \rho^1 \wedge \dots \wedge \rho^p \rangle_m^p =$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \lambda^1 \wedge \dots \wedge \lambda^p, \rho_{k_1}^1 \omega^{k_1} \wedge \dots \wedge \rho_{k_p}^p \omega^{k_p} \rangle_{\frac{1}{m}}^p \\
&= \rho_{k_1}^1 \dots \rho_{k_p}^p \cdot \det \left((\langle \lambda^r, \omega^{k_j} \rangle_{\frac{1}{m}})_{r,j \in \{1, \dots, p\}} \right) \quad , (1.11) \\
&= \rho_{k_1}^1 \dots \rho_{k_p}^p \cdot \begin{vmatrix} \langle \lambda^1, \omega^{k_1} \rangle_{\frac{1}{m}} & \dots & \langle \lambda^1, \omega^{k_p} \rangle_{\frac{1}{m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \lambda^p, \omega^{k_1} \rangle_{\frac{1}{m}} & \dots & \langle \lambda^p, \omega^{k_p} \rangle_{\frac{1}{m}} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle \lambda^1, \rho^1 \rangle_{\frac{1}{m}} & \dots & \langle \lambda^1, \rho^p \rangle_{\frac{1}{m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \lambda^p, \rho^1 \rangle_{\frac{1}{m}} & \dots & \langle \lambda^p, \rho^p \rangle_{\frac{1}{m}} \end{vmatrix} \quad , \text{Spaltenlin.} \\
&\quad \text{von } \det \\
&= \det \left((\langle \lambda^i, \rho^j \rangle_{\frac{1}{m}})_{i,j \in \{1, \dots, p\}} \right) \quad \square
\end{aligned}$$

Sei nun $m \in M$ und $U(m) \subset M$ eine hinreichend kleine Umgebung von m , dann existieren auf U orthonormale Vektorfelder e_1, \dots, e_n , d.h. $g_m(e_i(m), e_j(m)) = \delta_{ij}$ für jedes $m \in M$. $\{e_1, \dots, e_n\}$ heißt **Rahmen von TU** ("frame") und im Falle

$$(1.12) \quad [e_1(m), \dots, e_n(m)] = [T_m M]$$

orientierter Rahmen von TU . Hierbei bezeichnet [...] die Orientierung (der linearen Hülle) eines Objekts, $[T_m M]$ sei die vorher fixierte Orientierung von M , siehe (1.2).

Die Existenz eines Rahmens auf einer hinreichend kleinen Umgebung $U \subset M$, können wir auf zweierlei Weise einsehen: 1) Wähle lokale Koordinaten (x^1, \dots, x^n) auf U und wende das Gram-Schmidt Verfahren auf $\partial_1, \dots, \partial_n$ an und ordne nötigenfalls die Koordinaten neu, um die gewünschte Orientierung zu erhalten. 2) Wähle Normalkoordinaten (x^1, \dots, x^n) auf $U(m)$, d.h. $g_m(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij}$, und verschiebe die ONB $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ von $T_m M$ längs der von m ausgehenden Geodäten parallel, siehe [O'N, Ch. 2, frame fields].

Mittels des Isomorphismus aus Lemma 1.1 erhalten wir aus einem Rahmen $\{e_1, \dots, e_n\}$ von TU einen Rahmen

$$(1.13) \quad \{\omega^1, \dots, \omega^n\}$$

von T^*U .

Nun benötigen wir den Begriff eines **Volumenelements** auf M , siehe z.B. [O'N, Ch. 7, volume elements]. Dies ist eine glatte n -Form ω mit

$$(1.14) \quad \omega(e_1, \dots, e_n) = \pm 1 \quad ,$$

für jeden Rahmen $\{e_1, \dots, e_n\}$ auf M . Volumenelemente existieren lokal:

Lemma 1.3 [O'N, Ch. 7, Lemma 19] Sei $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ eine Karte von M , so daß auf U ein Rahmen von TU existiert, dann existiert auf U ein Volumenelement ω_φ mit $\omega_\varphi(\partial_1, \dots, \partial_n) = |\det(g_{ij})|^{1/2}$, d.h. $\omega_\varphi = |\det(g_{ij})|^{1/2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

BEWEIS Vektorfelder X_1, \dots, X_n auf U lassen sich schreiben als $X_j = X_j^i \partial_i$, wir definieren

$$(1.15) \quad \omega_\varphi(X_1, \dots, X_n) := \det(X_j^i) \cdot |\det(g_{ij})|^{1/2} \quad .$$

Aus den Eigenschaften von \det ergibt sich, daß hierdurch genau eine n -Form auf U definiert wird.

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ ein Rahmen von TU , dann ergibt sich

$$\delta_{ij} = g(e_i, e_j) = g(e_i^r \partial_r, e_j^s \partial_s) = e_i^r g_{rs} e_j^s \quad .$$

Wir nehmen von diesem Ausdruck die Determinante und erhalten

$$1 = (\det(e_j^i))^2 \cdot \det(g_{ij}) \quad .$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(e_1, \dots, e_n) &= \det(e_j^i) \cdot |\det(g_{ij})|^{1/2} \\ &= \pm |\det(g_{ij})|^{-1/2} \cdot |\det(g_{ij})|^{1/2} = \pm 1 \quad . \quad \square \end{aligned}$$

Die soeben in Karten definierten Volumenelemente stimmen auf dem Überlapp zweier Karten überein. Im Falle der Orientierbarkeit von M definieren sie global ein Volumenelement auf M :

Lemma 1.4 [O'N, Ch. 7, Lemma 20] (M^n, g) besitzt genau dann ein globales Volumenelement, falls M orientierbar ist.

BEWEIS Wir zeigen nur die Richtung "⇐", da wir "⇒" nicht benötigen. Sei also M orientierbar, d.h. M hat einen orientierten Atlas, so daß für Karten $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ und $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gilt

$$\det\left(\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)}\right) > 0 \quad .$$

Die lokalen Volumenelemente ω_φ und ω_ψ stimmen auf $U \cap V$ überein: Seien X_1, \dots, X_n Vektorfelder auf $U \cap V$, dann ist

$$\omega_\varphi(X_1, \dots, X_n) = \det(X_j^i) \cdot |\det(g_{ij})|^{1/2} \quad ,$$

wobei X_j^i die Komponenten von X_j bezüglich der durch $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ gegebenen Basis $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ des Tangentialraumes von M sind. Seien nun \tilde{X}_j^i die Komponenten von X_j bezüglich der durch $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ gegebenen Basis $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$, dann gilt (wegen der Unabhängigkeit von \det von der Wahl einer Basis)

$$\det(X_j^i) \cdot |\det(g_{ij})|^{1/2} = \det(\tilde{X}_j^i) \cdot |\det(\tilde{g}_{ij})|^{1/2} = \omega_\psi(X_1, \dots, X_n) \quad .$$

Da die lokalen Volumenelemente auf dem Kartenüberlapp übereinstimmen, definieren sie global ein Volumenelement ω . □

Nun definieren wir die **Integration einer Differentialform** über die orientierte, geschlossene Mannigfaltigkeit M^n . Wir orientieren M indem wir einen orientierten Atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ wählen, d.h. einen Atlas, so daß die Determinanten der Jacobi-Matrizen aller Übergangsabbildungen dasselbe Vorzeichen haben. Sei $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ **untergeordnete Zerlegung der Eins**, d.h. [O’N, Ch. 1, partition of unity]

- i) $\rho_\alpha \in \mathcal{F}(M)$,
- ii) $0 \leq \rho_\alpha \leq 1, \forall \alpha \in A$,
- iii) $\{supp \rho_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ist **lokal endlich**, d.h. jedes $m \in M$ besitzt eine Umgebung, die in nur endlich vielen Trägern der ρ_α enthalten ist ,
- iv) $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \equiv 1$,
- v) $supp \rho_\alpha \subset U_\alpha, \forall \alpha \in A$.

Sei $\beta \in \Lambda^n(\mathbf{M}) := C^\infty(\wedge^n T^*M)$, also eine glatte n -Form auf M , wir definieren

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad \int_{\mathbf{M}} \beta &:= \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \cdot \beta \\
 &= \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha \cdot \beta) \, d^n x \\
 &= \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(x) \cdot \underbrace{((\varphi_\alpha^{-1})^* \beta)(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)}_{\beta(\underbrace{D\varphi_\alpha^{-1} \partial/\partial x^1}_{\partial_1}, \dots, \underbrace{D\varphi_\alpha^{-1} \partial/\partial x^n}_{\partial_n})} \, d^n x \\
 &= \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(x) \cdot f \circ \varphi_\alpha^{-1}(x) \, d^n x \quad ,
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Darstellung von β in Koordinaten auf U_α

$\beta = f(x) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ verwendeten.

Lemma 1.4 [BT, Ch. I, Prop. 3.3] $\int_M \beta$ ist unabhängig vom orientierten Atlas $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ und der Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

BEWEIS Sei $\{(\psi_\gamma, V_\gamma)\}_{\gamma \in C}$ ein anderer orientierter Atlas von M und $\{\chi_\gamma\}_{\gamma \in C}$ eine $\{V_\gamma\}_{\gamma \in C}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, dann ist

$$\begin{aligned} \int_M \beta &= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \cdot \beta \stackrel{\sum_\gamma \chi_\gamma = 1}{=} \sum_{\alpha, \gamma} \int_{U_\alpha} \overbrace{\rho_\alpha \cdot \chi_\gamma}^{\text{supp.} \dots \subset U_\alpha \cap V_\gamma} \cdot \beta \\ &= \sum_{\alpha, \gamma} \int_{V_\gamma} \rho_\alpha \cdot \chi_\gamma \cdot \beta \stackrel{\sum_\alpha \rho_\alpha = 1}{=} \sum_\gamma \int_{V_\gamma} \chi_\gamma \cdot \beta = \int_M \beta \quad \square \end{aligned}$$

Nun können wir ein inneres Produkt auf $\Lambda^p(M)$, dem **Raum der glatten Differentialformen** auf der Mannigfaltigkeit M , definieren.

Lemma 1.6 Seien $\alpha, \beta \in \Lambda^p(M)$ und sei ω das Volumenelement auf M , dann ist durch

$$\langle \alpha, \beta \rangle^p := \int_M \langle \alpha(m), \beta(m) \rangle^p_m \omega$$

ein **inneres Produkt** auf dem Modul $\Lambda^p(M)$ über dem Ring $\mathfrak{F}(M)$ der glatten Funktionen auf M gegeben. Das heißt es gelten $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda^p(M)$

- i) *Linearität:* $\langle \alpha, b\beta + c\gamma \rangle^p = b \langle \alpha, \beta \rangle^p + c \langle \alpha, \gamma \rangle^p, \forall b, c \in \mathfrak{F}(M)$,
- ii) *Symmetrie:* $\langle \alpha, \beta \rangle^p = \langle \beta, \alpha \rangle^p$,
- iii) *Positive Definitheit:* $\langle \alpha, \alpha \rangle^p \geq 0$ und $\langle \alpha, \alpha \rangle^p = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

BEWEIS i) Linearität folgt aus der punktweisen Linearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle^p_m$, sowie der Linearität des Integrals.

ii) Symmetrie folgt aus der punktweisen Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle^p_m$.

iii) • Sei $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ eine orientierte Überdeckung von M mittels Normalkoordinaten und $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins, dann ist

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle^p &= \int_M \langle \alpha(m), \alpha(m) \rangle^p_m \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \cdot \langle \alpha(m), \alpha(m) \rangle^p_m \omega \\ &= \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \overbrace{\rho_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(x)}^{\geq 0} \cdot \overbrace{\omega|_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}(\partial_1, \dots, \partial_n)}^{\equiv 1} \cdot \overbrace{\langle \alpha|_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}, \alpha|_{\varphi_\alpha^{-1}(x)} \rangle^p_m}_{\geq 0} d^n x \geq 0, \end{aligned}$$

da der Integrand nicht negativ ist.

- Sei $\alpha = 0$, dann ist $\langle 0, 0 \rangle^p = \int_M 0 \cdot \omega = 0$.
- Sei umgekehrt $\int_M \langle \alpha(m), \alpha(m) \rangle_m^p \omega = 0$. Dieses Integral ergibt sich wie zuvor gezeigt als Summe von Integralen mit nicht negativen stetigen Integranden, es folgt daher $\langle \alpha(m), \alpha(m) \rangle_m^p = 0 \quad \forall m \in M$ und damit, wegen der Nichtdegeneriertheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle_m^p$, $\alpha = 0$. \square

Nun noch einige Bemerkungen zum **Hodge*-Operator**

Lemma 1.7 [CFKS, Prop. 11.9] *Sei ω die Volumenform auf der orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) , dann gilt: Für jedes $\beta \in \wedge^p(T_m^*M)$ existiert genau ein $*\beta \in \wedge^{n-p}(T_m^*M)$, so daß*

$$\langle \alpha, *\beta \rangle_m^{n-p} = \langle \beta \wedge \alpha, \omega \rangle_m^n, \quad \forall \alpha \in \wedge^{n-p}(T_m^*M) .$$

Die punktweise definierte Abbildung $*$: $\wedge^p(T_m^*M) \rightarrow \wedge^{n-p}(T_m^*M)$ kann als Abbildung von $\wedge^p(M) \rightarrow \wedge^{n-p}(M)$ aufgefaßt werden (selbe Bezeichnung $*$), indem wir zu ihrer Auswertung die punktweise definierten Abbildungen benutzen (diese hängen glatt von $m \in M$ ab). Es gelten $\forall \alpha, \beta \in \wedge^p(M) \quad \forall \gamma \in \wedge^{n-p}(M)$

- a) *Linearität:* $*(\alpha + \beta) = *\alpha + *\beta$, $*(f\alpha) = f(*\alpha)$, $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$,
- b) $\langle *\alpha(m), *\beta(m) \rangle_m^{n-p} = \langle \alpha(m), \beta(m) \rangle_m^p$,
- c) $\langle *\alpha, \gamma \rangle^{n-p} = (-1)^{p(n-p)} \langle \alpha, *\gamma \rangle^p$,
- d) $*(*\alpha) = (-1)^{p(n-p)} \alpha$,
- e) $\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle_m^p \omega$.

BEWEIS $\langle \beta \wedge \cdot, \omega \rangle_m^n: \wedge^{n-p}(T_m^*M) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ein lineares Funktional auf $(\wedge^{n-p}(T_m^*M), \langle \cdot, \cdot \rangle_m^{n-p})$. Nach dem Satz von Riesz existiert nun ein eindeutiges Element $*\beta \in \wedge^{n-p}(T_m^*M)$, so daß das obige lineare Funktional gleich $\langle *\beta, \cdot \rangle_m^{n-p}$ ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad \langle \alpha, *(f\beta + g\gamma) \rangle_m^{n-p} &= \langle (f\beta + g\gamma) \wedge \alpha, \omega \rangle_m^n \\ &= f \langle \beta \wedge \alpha, \omega \rangle_m^n + g \langle \gamma \wedge \alpha, \omega \rangle_m^n \\ &= f \langle \alpha, *\beta \rangle_m^{n-p} + g \langle \alpha, *\gamma \rangle_m^{n-p} \\ &= \langle \alpha, f*\beta + g*\gamma \rangle_m^{n-p} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad \langle *\alpha, \gamma \rangle^{n-p} &= \int_M \langle *\alpha(m), \gamma(m) \rangle_{\mathfrak{m}^{n-p}} \omega \\
&= \int_M \langle \alpha(m) \wedge \gamma(m), \omega(m) \rangle_{\mathfrak{m}^n} \omega \\
&= \int_M \langle (-1)^{p(n-p)} \gamma(m) \wedge \alpha(m), \omega(m) \rangle_{\mathfrak{m}^n} \omega \\
&= \int_M (-1)^{p(n-p)} \langle \alpha(m), *\gamma(m) \rangle_{\mathfrak{m}^{n-p}} \omega \\
&= (-1)^{p(n-p)} \langle \alpha, *\gamma \rangle^p \quad .
\end{aligned}$$

b) Sei $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ eine positiv orientierte ONB von T_m^*M , d.h. $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$. Berechnung von $*\beta = *(\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p})$: Sei $\alpha \in \wedge^{n-p}(T_m^*M)$, dann ist

$$\begin{aligned}
\langle (\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}) \wedge \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{n-p} \leq n} \alpha_{k_1 \dots k_{n-p}} \omega^{k_1} \wedge \dots \wedge \omega^{k_{n-p}}, \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n \rangle_{\mathfrak{m}^n} \\
= (-1)^\pi \alpha_{j_1 \dots j_{n-p}} \quad ,
\end{aligned}$$

(hierbei ist $j_1 < \dots < j_{n-p}$ und $\{j_1, \dots, j_{n-p}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_p\}$. π ist das Vorzeichen der Permutation, welche $(1, \dots, p)$ auf (i_1, \dots, i_p) und $(p+1, \dots, n)$ auf (j_1, \dots, j_{n-p}) abbildet.)

$$\stackrel{!}{=} \langle \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{n-p} \leq n} \alpha_{k_1 \dots k_{n-p}} \omega^{k_1} \wedge \dots \wedge \omega^{k_{n-p}}, *\beta \rangle_{\mathfrak{m}^{n-p}}$$

$$\Rightarrow \quad *\beta = (-1)^\pi \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_{n-p}} \quad .$$

D.h. $*$ bildet eine ONB von $\wedge^p(T_m^*M)$ auf eine ONB von $\wedge^{n-p}(T_m^*M)$ ab, d.h. $*$ ist eine **Isometrie**, d.h. das innere Produkt ist invariant unter $*$.

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad \langle **\alpha, \beta \rangle^p &\stackrel{\text{c)}}{=} (-1)^{p(n-p)} \langle *\alpha, *\beta \rangle^{n-p} \stackrel{\text{b)}}{=} (-1)^{p(n-p)} \langle \alpha, \beta \rangle^p \\
&\Rightarrow \quad **\alpha = (-1)^{p(n-p)} \alpha \quad .
\end{aligned}$$

e) Es ist $(\alpha \wedge *\beta)(m) \in \wedge^n(T_m^*M)$, wobei $\dim \wedge^n(T_m^*M) = 1$. Also existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha \wedge *\beta)(m) = c \cdot \omega$, wobei $\omega \in \wedge^n(T_m^*M)$ die Volumenform von M sei. Es ist

$$\begin{aligned}
c &= c \cdot \langle \omega(m), \omega(m) \rangle_{\mathfrak{m}^n} = \langle \alpha(m) \wedge *\beta(m), \omega(m) \rangle_{\mathfrak{m}^n} \stackrel{\text{Def. von } *}{=} \langle *\beta(m), *\alpha(m) \rangle_{\mathfrak{m}^{n-p}} \\
&\stackrel{\text{b)}}{=} \langle \beta(m), \alpha(m) \rangle_{\mathfrak{m}^p} = \langle \alpha(m), \beta(m) \rangle_{\mathfrak{m}^p} \quad .
\end{aligned}$$

Also gilt $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha(m), \beta(m) \rangle_{\mathfrak{m}^p} \omega$. □

Lemma 1.8 [CFKS, Thm. 11.10 a)] $d^*\alpha = (-1)^{n+np+1} *d*\alpha$, $\forall \alpha \in \wedge^p(M)$.

BEWEIS Sei $\alpha \in \wedge^p(M)$, $\beta \in \wedge^{p-1}(M)$, d.h. $*\alpha \in \wedge^{n-p}(M)$ und $\beta \wedge *\alpha \in \wedge^{n-1}(M)$, d.h. $d(\beta \wedge *\alpha) \in \wedge^n(M)$. Nun gilt mit dem Satz von Stokes

$$(1.18) \quad \int_M d(\beta \wedge *\alpha) = \int_{\partial M = \emptyset} \beta \wedge *\alpha = 0 \quad .$$

Hieraus folgt

$$(1.19) \quad \int_M d\beta \wedge *\alpha + (-1)^{p-1} \int_M \beta \wedge (d*\alpha) = 0 \quad .$$

Es ist

$$(1.20) \quad \int_M d\beta \wedge *\alpha \stackrel{\text{Lemma 1.7 e)}}{=} \int_M \langle d\beta, \alpha \rangle_m^p \omega = \langle d\beta, \alpha \rangle^p$$

und

$$(1.21) \quad \int_M \beta \wedge (d*\alpha) \stackrel{\text{Lemma 1.7 d)}}{=} \int_M \beta \wedge ((-1)^{(n-p+1)(n-n+p-1)} **d*\alpha)$$

$$\stackrel{\text{Lemma 1.7 e)}}{=} (-1)^{(p-1)(n-p+1)} \int_M \langle \beta, *d*\alpha \rangle_m^{p-1} \omega$$

$$= (-1)^{(p-1)(n-p+1)} \langle \beta, *d*\alpha \rangle^{p-1} .$$

Es ist

$$(p-1)(n-p+1) - n - np - p + 1 = pn - p^2 + p - n + p - 1 - n - np - p + 1$$

$$= - \underbrace{2n}_{\text{gerade}} - \underbrace{p(p-1)}_{\text{gerade}}$$

eine gerade Zahl, d.h. entweder sind $(p-1)(n-p+1)$ und $(n+np+p-1)$ beide gerade oder beide ungerade, d.h.

$$(*) \quad (-1)^{(p-1)(n-p+1)} = (-1)^{n+np+p-1} \quad .$$

Nun ist also

$$\langle d\beta, \alpha \rangle^p \stackrel{(1.20)}{=} (-1)^p \int_M \beta \wedge (d*\alpha) \stackrel{(*)}{=} (-1)^{p+n+np+p-1} \langle \beta, *d*\alpha \rangle^{p-1}$$

$$\stackrel{2p \text{ gerade}}{=} (-1)^{n+np+1} \langle \beta, *d*\alpha \rangle^{p-1} \quad .$$

□

Die Aussage des Lemma 1.8 werden wir bei der Frage der Abschließbarkeit von $d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$ benötigen.

DER HILBERTRAUM $\bar{\Lambda}^p(M)$

Der Raum $(\Lambda^p(M), \langle \cdot, \cdot \rangle^p)$ ist bezüglich des in Lemma 1.6 definierten L^2 -inneren Produkts (genauer: bezüglich der dadurch induzierten Norm) nicht vollständig. Wir können uns dies folgendermaßen veranschaulichen: Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $p = 0$, d.h. $\Lambda^0(M) = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$(1.22) \quad \langle f, g \rangle^0 := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot g(x) d^n x \quad .$$

Es ist wohlbekannt, daß die Vervollständigung von $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle^0$ (modulo Gleichheit bis auf Nullmengen) mit $L^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet wird. Was wir unter dem Verfahren der Vervollständigung verstehen, wollen wir nun etwas genauer beschreiben, siehe z.B. auch [RSI, Se. I.2].

Definition 1.9 (N, d) heißt **metrischer Raum** $:\Leftrightarrow N$ Menge und $d: N \times N \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildung mit

- i) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in N$,
- ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in N$,
- iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in N$.

Definition 1.10 Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen eines metrischen Raumes (N, d) heißt **Cauchyfolge** $:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : n, m \geq k \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Definition 1.11 Ein metrischer Raum in dem alle Cauchyfolgen konvergieren heißt **vollständig**.

Definition 1.12 Eine Teilmenge B eines metrischen Raumes (N, d) heißt **dicht** $:\Leftrightarrow$ jedes $x \in N$ ist Häufungspunkt von Elementen von B .

Theorem 1.13 [RSI, Thm. I.3] Sei (N, d) ein nicht vollständiger metrischer Raum, dann existiert ein vollständiger metrischer Raum \tilde{N} , so daß N isometrisch zu einer dichten Teilmenge von \tilde{N} ist.

BEWEIS Betrachte die Menge aller Cauchyfolgen in N . Zwei Cauchyfolgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ heißen **äquivalent**, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$. Sei \tilde{N} die Menge der Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen unter dieser Äquivalenzrelation.

- Seien $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in N , dann existiert

$$(1.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) =: c \in \mathbb{R}_0^+ .$$

Denn sei $c_n := d(x_n, y_n)$, dann genügt es wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} zu zeigen, daß $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und sei $k_x \in \mathbb{N}$, so daß $d(x_n, y_m) < \epsilon/2 \quad \forall n, m \geq k_x, k_y$ analog für $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $k := \max\{k_x, k_y\}$. Seien nun $n, m \geq k$, dann ist

$$(1.24) \quad \begin{aligned} |c_n - c_m| &= |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq |d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) - d(x_m, y_m)| \\ &\quad , \text{ Def. 1.9 iv)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) && , \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon && , \end{aligned}$$

d.h. $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

• Seien $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$ und $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in [\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$ ($[\cdot]$ bezeichnet die Äquivalenzklasse), dann ist

$$(1.25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d(u_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, v_n) \right) \quad , \text{Def. 1.9 iv}$$

$$= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + 0$$

$$(1.26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d(x_n, u_n) + d(u_n, v_n) + d(v_n, y_n) \right) \quad , \text{Def. 1.9 iv}$$

$$= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) + 0 \quad .$$

Aus (1.25) und (1.26) folgt die Unabhängigkeit von $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklassen $[\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$ und $[\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}]$.

• Wir definieren eine Metrik auf \tilde{N} durch

$$(1.27) \quad \tilde{d}([\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}], [\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad .$$

Die Existenz von (1.27), sowie die Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten wurden in den beiden vorigen Schritten gezeigt. (\tilde{N}, \tilde{d}) hat die Eigenschaften eines metrischen Raumes (Def. 1.9), aufgrund der Eigenschaften von d , sowie der Definition der Äquivalenzrelation auf der Menge der Cauchyfolgen.

• (\tilde{N}, \tilde{d}) ist vollständig: Sei $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \tilde{N} , d.h.

$$(1.28) \quad u_k = [\{v_s^{(k)}\}_{s \in \mathbb{N}}] \quad ,$$

wobei $\{v_s^{(k)}\}_{s \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in N ist. Mit

$$(1.29) \quad u := [\{v_s^{(s)}\}_{s \in \mathbb{N}}]$$

ergibt sich

$$(1.30) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u \quad .$$

Damit hat jede Cauchyfolge in \tilde{N} ein Grenzelement in \tilde{N} , was zu zeigen war. \square

DER ABSCHLUß VON $d^*d + dd^*$ UND DIE HODGE-ZERLEGUNG

Wir definieren zunächst einige Begriffe aus der Funktionalanalysis, insbesondere den des Abschlusses eines Operators. Abgeschlossene Operatoren haben den Vorteil, daß es zur Untersuchung ihrer Eigenschaften genügt, sie auf einem in ihrem Definitionsbereich dichten Teilraum zu studieren. Wie wir sehen werden, bedeutet

dies eine wesentliche Vereinfachung des Formalismus.

Von einem unbeschränkten Operator können wir im Allgemeinen nur erwarten, daß er auf einer dichten Teilmenge eines Hilbertraumes \mathfrak{H} definiert ist. Dies folgt aus dem Hellinger-Toeplitz Theorem, welches besagt, daß ein auf ganz \mathfrak{H} definierter Operator A mit $\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ notwendigerweise ein beschränkter Operator ist.

Definition und Satz 1.14 [RSI, Ch. VIII] *i) Ein Operator (auch lineare Transformation) T auf einem Hilbertraum $(\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist eine lineare Abbildung von einem linearen Unterraum von \mathfrak{H} (ihrem Definitionsbereich $D(T)$) nach \mathfrak{H} , d.h.*

$$T : \mathfrak{H} \supset D(T) \rightarrow \mathfrak{H} \quad .$$

ii) Der Graph der linearen Transformation T ist gegeben durch

$$\Gamma(T) := \{ (\varphi, T\varphi) \mid \varphi \in D(T) \} \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \quad .$$

T heißt **abgeschlossener Operator** $:\Leftrightarrow \Gamma(T)$ ist abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ (bezüglich der Graphennorm (1.36)).

*iii) T_1, T seien Operatoren auf \mathfrak{H} . Falls $\Gamma(T_1) \supset \Gamma(T)$, dann heißt T_1 **Erweiterung von T** . Wir benutzen hierfür die Notation $T_1 \supset T$.*

*iv) Ein Operator T heißt **abschließbar**, falls er eine abgeschlossene Erweiterung besitzt. Jeder abschließbare Operator besitzt eine kleinste abgeschlossene Erweiterung, wir nennen diese **Abschluß von T** (\bar{T}).*

v) Sei T ein dicht definierter linearer Operator auf dem Hilbertraum \mathfrak{H} und sei

$$D(T^*) := \{ \varphi \in \mathfrak{H} \mid \exists \eta \in \mathfrak{H} : \langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle, \forall \psi \in D(T) \} \quad .$$

Für jedes $\varphi \in D(T^*)$ definieren wir $T^*\varphi = \eta$. T^* heißt der zu T **adjungierte Operator**.

*vi) Ein auf dem Hilbertraum \mathfrak{H} dicht definierter Operator T heißt **symmetrisch**, falls $T \subset T^*$. Dies ist äquivalent zu*

$$\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, T\psi \rangle \quad , \quad \forall \varphi, \psi \in D(T) \quad .$$

Ein symmetrischer Operator ist immer abschließbar [RSI, Se. VIII.2].

*vii) T heißt **selbstadjungiert**, falls $T = T^*$ ($\Leftrightarrow T$ symmetrisch und $D(T) = D(T^*)$).*

*viii) Ein symmetrischer Operator T heißt **wesentlich selbstadjungiert**, falls \bar{T} selbstadjungiert ist. Ein wesentlich selbstadjungierter Operator T hat genau eine selbstadjungierte Erweiterung [RSI, Se. VIII.2].*

BLT-Theorem 1.15 [RSI, Thm. I.7] *Sei T ein beschränkter linearer Operator von*

einem normierten linearen Raum $(V_1, \|\cdot\|_1)$ in einen vollständigen normierten linearen Raum $(V_2, \|\cdot\|_2)$. Dann existiert eine eindeutige Erweiterung $\tilde{T} : (\tilde{V}_1, \|\tilde{\cdot}\|_1) \rightarrow (V_2, \|\cdot\|_2)$ von T . Hierbei bezeichnet $(\tilde{V}_1, \|\tilde{\cdot}\|_1)$ die Vervollständigung von V_1 (siehe Thm. 1.13). \tilde{T} ist ein beschränkter linearer Operator (mit derselben Schranke wie T).

Wir betrachten nun den Hilbertraum $(\bar{\Lambda}^p(M), \langle \cdot, \cdot \rangle^p)$ und wollen den **Operator der äußeren Differentiation**

$$(1.31) \quad d : \bar{\Lambda}^p(M) \supset D(d) = \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M) \subset \bar{\Lambda}^{p+1}(M)$$

abschliessen. Um die Abschließbarkeit von d zu zeigen, genügt es nach [RSI, Thm. VIII.1 b)] zu zeigen, daß $D(d^*)$ dicht in $\bar{\Lambda}^{p+1}(M)$ ist. Es ist $\Lambda^{p+1}(M)$ dicht in $\bar{\Lambda}^{p+1}(M)$, womit zu zeigen bleibt

$$\text{Proposition 1.16} \quad \Lambda^{p+1}(M) \subset D(d^*) \quad .$$

BEWEIS Es ist

$$D(d^*) := \{\alpha \in \bar{\Lambda}^{p+1}(M) \mid \exists \eta \in \bar{\Lambda}^p(M) : \langle d\beta, \alpha \rangle^{p+1} = \langle \beta, \eta \rangle^p, \forall \beta \in D(d)\} \quad .$$

Sei nun $\alpha \in \Lambda^{p+1}(M)$, dann gilt für $\beta \in \Lambda^p(M)$

$$(1.32) \quad \langle d\beta, \alpha \rangle^{p+1} \stackrel{\text{Lemma 1.8}}{=} \langle \beta, (-1)^{n+np+1} * d*\alpha \rangle^p = \langle \beta, \eta \rangle^p$$

mit $\eta := (-1)^{n+np+1} * d*\alpha \in \Lambda^p(M)$. Also ist gezeigt $\Lambda^{p+1}(M) \subset D(d^*)$. \square

Wir bilden nun den Operator-Abschluß von d

$$(1.33) \quad \bar{d} : D(\bar{d}) \subset \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^{p+1}(M) \quad .$$

Nach [RSI, Thm. VIII.1 c)] gilt

$$(1.34) \quad (\bar{d})^* = d^* : D(d^*) \subset \bar{\Lambda}^{p+1}(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M) \quad .$$

Der Abschluß eines Operators $T : D(T) \subset \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ auf $(\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist definiert als Abschluß von

$$(1.35) \quad \text{Graph } T := \{(\varphi, T\varphi) \mid \varphi \in D(T)\} \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$$

bezüglich der vom inneren Produkt auf $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$

$$(1.36) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}) \times (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{R} \\ ((\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2)) \mapsto \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle + \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$$

induzierten Norm auf $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$; diese heißt **Graphennorm**.

Nun genügt es einen abgeschlossenen Operator \bar{T} auf der dichten Teilmenge $D(T) \subset D(\bar{T})$ zu betrachten, denn es gilt

Proposition 1.17 *Sei $\alpha \in D(\bar{T})$, dann existiert eine Folge $\{\alpha_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ von Elementen von $D(T)$ mit $\alpha_\nu \rightarrow \alpha$ und $\bar{T}\alpha = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T\alpha_\nu$.*

BEWEIS Sei $\alpha \in D(\bar{T})$, d.h. es existiert Folge $\{\alpha_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ von Elementen von $D(T)$ mit

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \bar{T}\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_\nu \\ T\alpha_\nu \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\alpha - \alpha_\nu\|_{\mathfrak{H}} + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\bar{T}\alpha - T\alpha_\nu\|_{\mathfrak{H}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu = \alpha \quad \text{und} \quad \bar{T}\alpha = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T\alpha_\nu ,$$

also $\bar{T} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T\alpha_\nu$. □

Das heißt wir können jedes Bild $\bar{T}\alpha$ als Limes von Bildern $T\alpha_\nu$ des ursprünglichen Operators T darstellen. Zum Beispiel gilt in unserem Fall für jedes $\alpha \in D(\bar{d})$

$$(1.37) \quad \bar{d}\alpha = \lim_{\nu \rightarrow \infty} d\alpha_\nu ,$$

für eine geeignete Folge $\{\alpha_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Lambda^p(M) = D(d)$.

Proposition 1.18 *Der Operator $d^2 = 0: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+2}(M)$ hat die eindeutige Fortsetzung 0 auf $\bar{\Lambda}^p(M)$, ebenso der Operator $(d^*)^2 = 0$.*

BEWEIS $d^2 = 0$ ist beschränkt mit Schranke 0. Nach dem BLT-Theorem 1.15 existiert eine eindeutige Fortsetzung auf $\bar{\Lambda}^p(M)$ mit derselben Schranke 0, d.h. wir erhalten den Nulloperator auf $\bar{\Lambda}^p(M)$. Analoges gilt für $(d^*)^2$. □

Betrachte den Operator

$$(1.38) \quad \Delta := d^*d + dd^* : D(\Delta) := \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M) ,$$

dieser ist offenbar symmetrisch: Seien $\alpha, \beta \in D(\Delta)$, dann ist

$$(1.39) \quad \begin{aligned} \langle (d^*d + dd^*)\alpha, \beta \rangle^p &= \langle d^*d\alpha, \beta \rangle^p + \langle dd^*\alpha, \beta \rangle^p \\ &= \langle \alpha, d^*d\beta \rangle^p + \langle \alpha, dd^*\beta \rangle^p \\ &= \langle \alpha, (d^*d + dd^*)\beta \rangle^p . \end{aligned}$$

Nach Definition und Satz 1.14 vi) ist Δ damit abschließbar.

Definition 1.19 Der **Laplace-Beltrami Operator** $L: D(L) \subset \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M)$ ist definiert als Abschluß von $\Delta = d^*d + dd^*: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$ in $\bar{\Lambda}^p(M)$.

Theorem 1.20 [C][St] $\Delta = d^*d + dd^*: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$ ist wesentlich selbstadjungiert.

Proposition 1.21 Es gilt für alle $\alpha \in D(L) \subset \bar{\Lambda}^p(M)$ $\langle \alpha, L\alpha \rangle^p \geq 0$ (d.h. $\text{Spec}(L) \subset \mathbb{R}_0^+$).

BEWEIS Eigentlich genügt es nach Prop. 1.17 diese Aussage für $\alpha \in \Lambda^p(M) \stackrel{\text{dicht}}{\subset} D(L)$ zu zeigen:

$$(1.40) \quad \langle \alpha, L\alpha \rangle^p = \langle \alpha, (d^*d + dd^*)\alpha \rangle^p = \langle d\alpha, d\alpha \rangle^p + \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle^p \geq 0.$$

Wir wollen jedoch noch einmal die vollständige Argumentation wiedergeben: Sei $\alpha \in D(L) \subset \bar{\Lambda}^p(M)$ und sei $\{\alpha_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von $\Lambda^p(M)$ mit $\alpha_\nu \rightarrow \alpha$. Da $L = \overline{d^*d + dd^*}$, gilt nach Prop. 1.17

$$L \varprojlim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu = \varprojlim_{\nu \rightarrow \infty} (d^*d + dd^*)\alpha_\nu \quad .$$

Damit ergibt sich

$$(1.41) \quad \begin{aligned} \langle \alpha, L\alpha \rangle^p &= \langle \varprojlim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu, L \varprojlim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu \rangle^p \\ &= \langle \varprojlim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu, \varprojlim_{\nu \rightarrow \infty} (d^*d + dd^*)\alpha_\nu \rangle^p \\ &= \varprojlim_{\nu \rightarrow \infty} \langle \alpha_\nu, (d^*d + dd^*)\alpha_\nu \rangle^p \\ &= \varprojlim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\langle d\alpha_\nu, d\alpha_\nu \rangle^p}_{\geq 0} + \underbrace{\langle d^*\alpha_\nu, d^*\alpha_\nu \rangle^p}_{\geq 0} \right) \geq 0 \quad \square \end{aligned}$$

Definition 1.22 i) $\alpha \in D(L) \subset \bar{\Lambda}^p(M)$ heißt **harmonisch** $:\Leftrightarrow L\alpha = 0$. (Im Fall $\alpha \in \Lambda^p(M)$ ist dies äquivalent zu $d\alpha = 0$ und $d^*\alpha = 0$).

ii) $\bar{\Lambda}_{\mathbb{H}}^p(\mathbf{M}) := \text{Ker } L$

iii) $\bar{\Lambda}_{\mathbb{d}}^p(\mathbf{M}) := \text{Ran}(\bar{d}: \bar{\Lambda}^{p-1}(M) \supset D(\bar{d}) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M))$

iv) $\bar{\Lambda}_{\mathbb{d}^*}^p(\mathbf{M}) := \text{Ran}(\bar{d}^*: \bar{\Lambda}^{p+1}(M) \supset D(\bar{d}^*) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M))$

v) Die Räume $\Lambda_{\mathbb{H}}^p(\mathbf{M})$, $\Lambda_{\mathbb{d}}^p(\mathbf{M})$, $\Lambda_{\mathbb{d}^*}^p(\mathbf{M})$ seien definiert als jene Teilmengen der entsprechenden Räume mit Querstrich, welche aus glatten Formen bestehen.

Nun benötigen wir zwei wohlbekanntete Resultate

Theorem 1.23 (*Elliptische Regularität*) [GrHa, Ch.0 Se.6 p.93 global Sobolev lemma and p.94 regularity lemma]

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D(L^k) = \Lambda^p(M) \quad .$$

Theorem 1.24 [GrHa, Ch. 0 Se. 6 p. 94 lemma] $(L + Id)^{-1}$ ist ein kompakter Operator.

Definition 1.25 Seien X, Y Banachräume. Ein linearer Operator $T: X \rightarrow Y$ heißt **kompakt**, falls er beschränkte Mengen in X in präkompakte Mengen in Y abbildet. Eine Menge heißt **präkompakt**, falls ihr Abschluß kompakt ist.

Die Aussagen i) und ii) des folgenden Theorems werden auch als **Hodge-Zerlegung** bezeichnet.

Hodge-Theorem 1.26 [CFKS, Prop. 11.7]

- i) $\bar{\Lambda}^p(M) = \bar{\Lambda}^p_{\mathbb{H}}(M) \oplus \bar{\Lambda}^p_{\mathbb{d}}(M) \oplus \bar{\Lambda}^p_{\mathbb{d}^*}(M)$
- ii) $\Lambda^p(M) = \Lambda^p_{\mathbb{H}}(M) \oplus \Lambda^p_{\mathbb{d}}(M) \oplus \Lambda^p_{\mathbb{d}^*}(M)$
- iii) $\text{Ker}(d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)) = \Lambda^p_{\mathbb{H}}(M) \oplus \Lambda^p_{\mathbb{d}}(M)$
- iv) $\Lambda^p_{\mathbb{H}}(M) = \bar{\Lambda}^p_{\mathbb{H}}(M)$ ist endlich-dimensional.

Zum Beweis des Hodge-Theorems benötigen wir das

Hilbert-Schmidt-Theorem 1.27 [RSI, Thm. VI.16] Sei A ein selbstadjungierter kompakter Operator auf dem Hilbertraum \mathfrak{H} . Dann existiert eine vollständige ONB $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von \mathfrak{H} , so daß

$$A\phi_n = \lambda_n \phi_n \quad \text{und} \quad \lambda_n \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty \quad .$$

Proposition 1.28 Ein kompakter Operator $T: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ ist ein beschränkter Operator.

BEWEIS

$$\begin{aligned} \|T\|_{\text{Op}} &= \sup_{\|\varphi\|=1} \|T\varphi\|_{\mathfrak{H}} = \sup_{\varphi \in B_1(0) \subset \mathfrak{H}} \|T\varphi\|_{\mathfrak{H}} \\ &= \sup_{\psi \in T(B_1(0))} \|\psi\|_{\mathfrak{H}} \leq \sup_{\psi \in T(B_1(0))} \|\psi\|_{\mathfrak{H}} =: c < \infty \quad , \end{aligned}$$

da die stetige Funktion $\|\cdot\|$ auf der kompakten Menge $\overline{T(B_1(0))}$ ihr Maximum

annimmt. □

BEWEIS VON THEOREM 1.26

iv) Die Inklusion $\Lambda_{\mathbb{H}}^p(M) \subset \overline{\Lambda}_{\mathbb{H}}^p(M)$ gilt nach Definition von $\overline{\Lambda}_{\mathbb{H}}^p(M)$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, sei $\alpha \in \overline{\Lambda}_{\mathbb{H}}^p(M)$, d.h. $L\alpha = 0$. Damit gilt auch $L^k\alpha = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, anders ausgedrückt

$$\alpha \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(L^k) \quad ,$$

also $\alpha \in \Lambda^p(M)$ (elliptische Regularität, Thm. 1.23) und damit $\alpha \in \Lambda_{\mathbb{H}}^p(M)$. Die endliche Dimension von $\Lambda_{\mathbb{H}}^p(M) = \overline{\Lambda}_{\mathbb{H}}^p(M)$ ergibt sich aus der Kompaktheit von $(L + Id)^{-1}$ und wird im Verlauf des Beweises von i) gezeigt, siehe (1.55).

i) Wir zeigen zuerst, daß die direkte Summe eine orthogonale Summe und anschließend, daß sich jedes $\alpha \in \overline{\Lambda}^p(M)$ in drei Anteile zerlegen läßt, einer aus jedem der drei direkten Summanden. Um die paarweise Orthogonalität der drei direkten Summanden zu zeigen, genügt es glatte Formen zu betrachten, siehe Prop. 1.17.

• $\overline{\Lambda}_{\mathbb{H}}^p(M) \perp \overline{\Lambda}_{\mathbb{d}}^p(M)$: Sei $\alpha \in \Lambda^p(M)$ mit $L\alpha = 0$ und $\beta \in \Lambda_{\mathbb{d}}^p(M)$, also $\beta = d\gamma$ mit $\gamma \in \Lambda^{p-1}(M)$, dann ist

$$(1.42) \quad \langle \alpha, \beta \rangle^p = \langle \alpha, d\gamma \rangle^p \stackrel{\text{Def. 1.22 i)}}{=} \langle \overbrace{d^* \alpha}^{\equiv 0}, \gamma \rangle^{p-1} = 0 \quad .$$

• $\overline{\Lambda}_{\mathbb{H}}^p(M) \perp \overline{\Lambda}_{\mathbb{d}^*}^p(M)$: Sei $\alpha \in \Lambda^p(M)$ mit $L\alpha = 0$ und $\beta \in \Lambda_{\mathbb{d}^*}^p(M)$, also $\beta = d^*\gamma$ mit $\gamma \in \Lambda^{p+1}(M)$, dann ist

$$(1.43) \quad \langle \alpha, \beta \rangle^p = \langle \alpha, d^*\gamma \rangle^p \stackrel{\text{Def. 1.22 i)}}{=} \langle \overbrace{d\alpha}^{\equiv 0}, \gamma \rangle^{p+1} = 0 \quad .$$

• $\overline{\Lambda}_{\mathbb{d}}^p(M) \perp \overline{\Lambda}_{\mathbb{d}^*}^p(M)$: Sei $\alpha \in \Lambda_{\mathbb{d}}^p(M)$, also $\alpha = d\beta$ mit $\beta \in \Lambda^{p-1}(M)$, und sei $\gamma \in \Lambda_{\mathbb{d}^*}^p(M)$, also $\gamma = d^*\eta$ mit $\eta \in \Lambda^{p+1}(M)$, dann ist

$$(1.43) \quad \langle \alpha, \gamma \rangle^p = \langle d\beta, d^*\eta \rangle^p = \langle \overbrace{dd\beta}^{\equiv 0}, \eta \rangle^{p+1} = 0 \quad .$$

Nun zur Zerlegung von $\alpha \in \overline{\Lambda}^p(M)$ in drei Anteile: Die Kompaktheit von $(L + Id)^{-1}$ (Thm. 1.24) hat die Beschränktheit dieses Operators zur Folge (Prop. 1.28), d.h. der Operator $(L + Id)$ hat eine beschränkte Inverse $(L + Id)^{-1}$. Nach [RSI, Thm. VI.3 d)] hat $(L + Id)^*$ eine beschränkte Inverse und es gilt

$$(1.45) \quad ((L + Id)^*)^{-1} = ((L + Id)^{-1})^* \quad .$$

Hieraus folgt die Selbstadjungiertheit von $(L + Id)^{-1}$:

$$(1.46) \quad ((L + Id)^{-1})^* = ((L + Id)^*)^{-1} \quad , \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} &= (L^* + Id^*)^{-1} && , * \text{ linearer Op.} \\ &= (L + Id)^{-1} && , L, Id \text{ s.adj. .} \end{aligned}$$

Nun können wir das Hilbert-Schmidt Theorem 1.27 anwenden: Es existiert demnach eine vollständige ONB $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von $\bar{\Lambda}^p(M)$, so daß

$$(1.47) \quad (L + Id)^{-1} \phi_n = \lambda_n \phi_n \quad \text{und} \quad \lambda_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad .$$

Sei nun

$$(1.48) \quad P_n := \langle \phi_n, \cdot \rangle^p \phi_n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

dann gelten: P_n ist ein **Orthogonalprojektor** ($:\Leftrightarrow P_n^2 = P_n$ und $P_n^* = P_n$) und

$$(1.49) \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n = Id \quad .$$

Seien $\psi, \eta \in \bar{\Lambda}^p(M)$, dann ist

$$(1.50) \quad \begin{aligned} P_n^2 \psi &= P_n \langle \phi_n, \psi \rangle^p \phi_n = \langle \phi_n, \langle \phi_n, \psi \rangle^p \phi_n \rangle^p \phi_n \\ &= \langle \phi_n, \psi \rangle^p \underbrace{\langle \phi_n, \phi_n \rangle^p}_{=1} \phi_n = P_n \psi \end{aligned}$$

und

$$(1.51) \quad \begin{aligned} \langle P_n \psi, \eta \rangle^p &= \langle \langle \phi_n, \psi \rangle^p \phi_n, \eta \rangle^p && , (1.48) \\ &= \langle \phi_n, \psi \rangle^p \langle \phi_n, \eta \rangle^p && , \text{Lin. d. Sk.Prod.} \\ &= \langle \psi, \langle \phi_n, \eta \rangle^p \phi_n \rangle^p && , \text{Lin. d. Sk.Prod.} \\ &= \langle \psi, P_n \eta \rangle^p && , (1.48). \end{aligned}$$

Die Aussage (1.49) folgt aus der Vollständigkeit der ONB $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sei $\psi \in \bar{\Lambda}^p(M)$, dann gilt

$$(1.52) \quad \begin{aligned} (L + Id)^{-1} \psi &= (L + Id)^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n \right) \psi && , (1.49) \\ &= (L + Id)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, \psi \rangle^p \phi_n && , (1.48) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, \psi \rangle^p (L + Id)^{-1} \phi_n && , \text{lin. Op.} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, \psi \rangle^p \lambda_n \phi_n && , (1.47) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \psi && , (1.48) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \right) \psi && . \end{aligned}$$

Nun ist

$$(1.53) \quad (L + Id) \psi = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} P_n \right) \psi \quad ,$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}
 (1.54) \quad (L + Id)^{-1}(L + Id)\psi &= \psi \stackrel{(1.49)}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n \right) \psi = \left(\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \delta_{nk} P_n \right) \psi, \\
 &= \left(\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_k} P_n P_k \right) \psi, \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} P_k \right) \psi, \\
 &= (L + Id)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} P_k \right) \psi, \quad (1.52).
 \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (1.55) \quad L\psi &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} P_n \right) \psi - Id\psi, \quad (1.53) \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - 1 \right) P_n \right) \psi, \quad (1.49).
 \end{aligned}$$

Aus $\lambda_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ (1.47) schließen wir, daß $Ker L$ endlich-dimensional ist (denn es sind höchstens endlich viele Eigenwerte λ_n gleich 1), außerdem ist $Spec L$ diskret und nicht negativ (Prop. 1.21). Aus (1.55) erhalten wir eine Zerlegung von $\bar{\Lambda}^p(M)$ in eine orthogonale Summe

$$(1.56) \quad \bar{\Lambda}^p(M) = Ker L \oplus Ran L.$$

$Ran L$ ist abgeschlossen, dies folgt aus $Ran L = (Ker L)^\perp$ und der Tatsache, daß aus der Abgeschlossenheit von $Ker L$ (da endlich-dimensional) auch die Abgeschlossenheit von $(Ker L)^\perp$ folgt [RSI, Se. II.2].

Für $\alpha \in \bar{\Lambda}^p(M)$ gilt nun

$$\begin{aligned}
 (1.57) \quad \alpha &= \alpha_H + L\gamma, \quad \alpha_H \in Ker L, \gamma \in D(L) \\
 &= \alpha_H + d^*(d\gamma) + d(d^*\gamma), \quad \text{oBdA } \gamma \in \Lambda^{p-1}(M).
 \end{aligned}$$

Der letzte Schritt erfolgte unter Anwendung von Prop. 1.17. Damit ist i) gezeigt.

ii) Die Summe von glatten Differentialformen ist eine glatte Differentialform, womit " \supset " gezeigt wäre. Es bleibt also " \subset " zu zeigen: Sei $\alpha \in \Lambda^p(M)$, dann ist nach Gleichung (1.56)

$$(1.58) \quad \alpha = \alpha_H + L\gamma, \quad \alpha_H \in \bar{\Lambda}_H^p(M) = \Lambda_H^p(M), \gamma \in \bar{\Lambda}^p(M).$$

Die Glattheit von α und α_H impliziert die selbige von $L\gamma$. Nun ist

$$\begin{aligned}
 (1.59) \quad L(L\gamma) &= L(\alpha - \alpha_H) = L\alpha - L\alpha_H = L\alpha \\
 L^k\gamma &= L^{k-1}\alpha, \quad k \geq 2,
 \end{aligned}$$

d.h.

$$(1.60) \quad \gamma \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(L^k) \quad ,$$

also $\gamma \in \Lambda^p(M)$ (elliptische Regularität, Thm. 1.23). Damit ist gezeigt: Für $\alpha \in \Lambda^p(M)$ gilt

$$(1.61) \quad \begin{aligned} \alpha &= \alpha_H + L\gamma & , \quad \alpha_H \in \Lambda_H^p(M), \gamma \in \Lambda^p(M) \\ &= \alpha_H + d(d^*\gamma) + d^*(d\gamma) & , \quad \text{da } \gamma \in \Lambda^p(M) \text{ ,} \\ &\in \Lambda_H^p(M) \oplus \Lambda_d^p(M) \oplus \Lambda_{d^*}^p(M) & . \end{aligned}$$

iii) " \supset " Sowohl $\Lambda_H^p(M)$ als auch $\Lambda_d^p(M)$ sind in $\text{Ker}(d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M))$ enthalten, damit auch ihre orthogonale Summe.

" \subset " Offenbar ist

$$(1.62) \quad \text{Ker}(d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)) \subset \Lambda^p(M) \quad ,$$

andererseits aber

$$(1.63) \quad \Lambda_{d^*}^p(M) \cap \text{Ker}(d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)) = \{0\} \quad ,$$

denn sei $\gamma \in \Lambda_{d^*}^p(M) \cap \text{Ker}(d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M))$, d.h. $\gamma = d^*\alpha$ und $d\gamma = 0$. Damit ist

$$(1.64) \quad \begin{aligned} 0 &= \langle d\gamma, \alpha \rangle^{p+1} = \langle dd^*\alpha, \alpha \rangle^{p+1} \\ &= \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle^p = \langle \gamma, \gamma \rangle^p \quad , \end{aligned}$$

also $\gamma = 0$. Aus (1.62), (1.63) und ii) ergibt sich nun

$$(1.65) \quad \text{Ker}(d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)) \subset \Lambda_H^p(M) \oplus \Lambda_d^p(M) \quad . \quad \square$$

Die Aussage iv) $\Lambda_H^p(M) = \bar{\Lambda}_H^p(M)$ von Thm. 1.26 ist eine Regularitätsaussage: Alle Elemente im Eigenraum zum Eigenwert Null von L sind glatte Differentialformen. Der Kern von L wurde also durch die Vervollständigung bezüglich des L^2 -inneren Produkts nicht verändert. Solange wir uns nur für den Kern interessieren, können wir daher L entweder als selbstadjungierten Operator auf dem Hilbertraum $\bar{\Lambda}^p(M)$ auffassen oder als Differentialoperator auf dem Raum der glatten p -Differentialformen $\Lambda^p(M)$.

Theorem 1.29 [CFKS, Thm. 11.8] $b_p := \dim H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) = \dim \text{Ker } L$.

BEWEIS

$$H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) := \frac{\text{Ker}(d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M))}{\text{Ran}(d: \Lambda^{p-1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M))}$$

$$= \frac{\Lambda_{\mathbb{H}}^p(M) \oplus \Lambda_{\mathbb{d}}^p(M)}{\Lambda_{\mathbb{d}}^p(M)} \quad , \text{Thm. 1.26 iii)}$$

$$\simeq \Lambda_{\mathbb{H}}^p(M)$$

$$= \text{Ker } L \quad \square$$

2.2 Der deformierte Laplace-Operator L_t

Witten definierte 1982 in [Wi3] eine durch einen reellen Parameter variierte Hodge-Theorie:

Definition 2.1 Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine Morse-Funktion und seien

i) $d_t := e^{-tf} d e^{tf} : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)$

ii) $\Delta_t := d_t^* d_t + d_t d_t^* : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$

iii) $L_t := \bar{\Delta}_t : D(L_t) \subset \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M)$

iv) $\bar{\Lambda}_{\mathbb{H}_t}(\mathbf{M}) := \text{Ker } L_t$

v) $\bar{\Lambda}_{\mathbf{d}_t}(\mathbf{M}) := \text{Ran } (\bar{d}_t : D(\bar{d}_t) \subset \bar{\Lambda}^{p-1}(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M))$

vi) $\bar{\Lambda}_{\mathbf{d}_t^*}(\mathbf{M}) := \text{Ran } (d_t^* : D(d_t^*) \subset \bar{\Lambda}^{p+1}(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M))$

(beachte: d_t^* ist ein abgeschlossener Operator und $(\bar{d}_t)^* = d_t^*$ [RSI, Thm. VIII.1])

vii) Die Räume $\bar{\Lambda}_{\mathbb{H}_t}(\mathbf{M}), \bar{\Lambda}_{\mathbf{d}_t}(\mathbf{M}), \bar{\Lambda}_{\mathbf{d}_t^*}(\mathbf{M})$ seien definiert als jene Teilmengen der entsprechenden Räume mit Querstrich, welche aus glatten Formen bestehen.

Im vorigen Paragraphen 2.1 wurde gezeigt, daß die p -te Bettizahl b_p von M durch die Dimension des Kerns von L , wirkend auf den glatten p -Formen, gegeben ist. Witten bemerkte, daß für die durch t variierten Größen Resultate, analog zu denen des Paragraphs 2.1, gelten: Es gilt insbesondere eine Version des Hodge-Theorems 1.26 (Hodge-Zerlegung) aus dem wir

$$(2.1) \quad b_p = \dim \text{Ker } L_t$$

ableiten. Für große t vereinfacht sich das Spektrum von L_t . Der Limes $t \rightarrow \infty$ von L_t (der sogenannte **quasiklassische Limes**) wurde bereits früher studiert [CDS], er liefert obere Schranken für $\dim \text{Ker } L_t$ und damit für b_p . Diese oberen Schranken sind durch die Anzahl c_p der kritischen Punkte der Morse-Funktion f mit Morse-Index p gegeben. Dies ist jedoch Gegenstand der folgenden Paragraphen.

Zunächst wollen wir die Wohldefiniertheit der Begriffe in Definition 2.1 überprüfen. Wir berechnen die formal adjungierte Abbildung d_t^* und zeigen $\Lambda^{p+1}(M) \subset D(d_t^*)$; hieraus folgt die Dichtheit von $D(d_t^*)$ in $\bar{\Lambda}^{p+1}(M)$ und damit die Abschließbarkeit von d_t , siehe (1.31) und [RSI, Thm. VIII.1 b)].

Proposition 2.2 $d_t^* |_{\Lambda^{p+1}(M)} = e^{tf} d^* e^{-tf} : \Lambda^{p+1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$.

BEWEIS Seien $\alpha \in \Lambda^{p+1}(M), \beta \in D(d_t) = \Lambda^p(M)$

$$\begin{aligned}
 \langle d_t \beta, \alpha \rangle^{p+1} &= \langle e^{-tf} d e^{tf} \beta, \alpha \rangle^{p+1} && , \\
 &= \langle d e^{tf} \beta, e^{-tf} \alpha \rangle^{p+1} && , \mathfrak{F}(M)\text{-Lin.}, \text{ Lemma 1.6 i)} \\
 &= \langle e^{tf} \beta, d^* e^{-tf} \alpha \rangle^p && , \text{ Def. von } d^* \\
 &= \langle \beta, e^{tf} d^* e^{-tf} \alpha \rangle^p && , \mathfrak{F}(M)\text{-Lin.}, \text{ Lemma 1.6 i)} \\
 &= \langle \beta, d_t^* \alpha \rangle^p && , \text{ Def. von } d_t^* .
 \end{aligned}$$

Es ist $e^{tf} d^* e^{-tf} \alpha \in \Lambda^p(M)$, denn $e^{-tf} \alpha \in \Lambda^{p+1}(M)$ und d^* bildet nach Lemma 1.8 glatte $(p+1)$ -Formen in glatte p -Formen ab. \square

Es gilt weiter $\Delta_t|_{\Lambda^p(M)} = \Delta_t^*|_{\Lambda^p(M)}$, also ist $\Lambda^p(M) \subset D(\Delta_t^*)$, also $D(\Delta_t^*)$ dicht in $\bar{\Lambda}^p(M)$ und Δ_t somit abschließbar; L_t ist also wohldefiniert.

Unser Ziel ist es nun eine Formel für L_t zu finden, die die Abhängigkeit von L_t von den kritischen Punkten der Morse-Funktion f darstellt. Hierzu führen wir zwei Operatoren $(a^i)^*$ und a^i auf $\Lambda^p(M)$ ein, die in der Quantentheorie als **Fermionenerzeugungs-** bzw. **Fermionenvernichtungsoperator** bekannt sind.

Definition 2.3 Seien (x^1, \dots, x^n) lokale Koordinaten auf $U \subset M$, wir definieren

$$\begin{aligned}
 (a^i)^* : \Lambda^p(U) &\rightarrow \Lambda^{p+1}(U) \\
 \alpha &\mapsto (a^i)^* \alpha := dx^i \wedge \alpha \quad .
 \end{aligned}$$

Lemma 2.4 Der zu $(a^i)^*$ formal adjungierte Operator (bezüglich des L^2 -inneren Produkts $\langle \cdot, \cdot \rangle^\bullet$ auf $\bar{\Lambda}^\bullet(U)$)

$$a^i : \Lambda^{p+1}(U) \rightarrow \Lambda^p(U)$$

ergibt sich durch lineare Fortsetzung aus

$$a^i (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}}) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} g^{ijk} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} \quad .$$

Hierbei ist $g^{ij} = \langle dx^i, dx^j \rangle^1 = g(i^{-1}(dx^i), i^{-1}(dx^j))$ die induzierte Metrik auf T^*U , siehe Lemma 1.1.

BEWEIS Mit $\alpha \in \Lambda^p(U)$, d.h. $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ und $\beta = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} \in \Lambda^{p+1}(U)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \langle (a^i)^* \alpha, \beta \rangle^{p+1} &= \langle dx^i \wedge \alpha, \beta \rangle^{p+1} = \\
 &= \int_U \left\langle \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} \right\rangle_m^{p+1} \omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_U \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} \langle dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} \rangle_{\frac{p+1}{m}} \omega \\
 &\quad , \text{Linearität von } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{p+1}{m}} \\
 &= \int_U \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} \det \left(\langle dx^r, dx^s \rangle_{\frac{1}{m}} \right)_{\substack{r \in \{i_1, \dots, i_p\} \\ s \in \{j_1, \dots, j_{p+1}\}}} \omega \\
 &\quad , \text{Prop. 1.2} \\
 &= \int_U \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots \\ \dots < i_p \leq n}} \alpha_{i_1 \dots i_p} \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \langle dx^i, dx^{j_k} \rangle_{\frac{1}{m}} \cdot \det \left(\langle dx^r, dx^s \rangle_{\frac{1}{m}} \right)_{\substack{r \in \{i_1, \dots, i_p\} \\ s \in \{j_1, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_{p+1}\}}} \omega \\
 &\quad , \text{Entwicklung der Det. nach 1. Zeile (i)} \\
 &= \int_U \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots \\ \dots < i_p \leq n}} \alpha_{i_1 \dots i_p} \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} g^{i j_k} \langle dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} \rangle_{\frac{p}{m}} \omega \\
 &\quad , \text{Prop. 1.2} \\
 &= \langle \alpha, \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} g^{i j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}} \rangle^p \\
 &= \langle \alpha, a^i \beta \rangle^p \quad \square
 \end{aligned}$$

In der Formel für a^i ist in [CFKS, Formel (11.32)] ein Vorzeichenfehler zu finden. Dieser würde zu einem falschen Vorzeichen in Proposition 2.5 führen und statt Proposition 4.3 ergäbe sich $[(a^i)^*, a^i] = 1$, womit der Beweis der Morse-Ungleichungen zusammenbrechen würde.

Proposition 2.5 Sei $\alpha \in \Lambda^p(U)$, dann gilt

$$\{a^i, (a^j)^*\} \alpha = g^{ij} \cdot \alpha \quad ,$$

wobei $\{A, B\} := AB + BA$ den **Antikommutator** bezeichnet.

BEWEIS Es genügt die Aussage für ein Basiselement $\alpha = dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_p}$, $1 \leq l_1 < \dots < l_p \leq n$, zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 \{a^i, (a^j)^*\} \alpha &= a^i (a^j)^* \alpha + (a^j)^* a^i \alpha \\
 &= a^i dx^j \wedge dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} + (a^j)^* \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} g^{i l_k} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k} \wedge \dots \wedge dx^{l_p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= g^{jj} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} + \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^{k+1} g^{ik} dx^j \wedge dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_{k-1}} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} g^{ik} dx^j \wedge dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} \\
 &\quad \text{(die beiden ersten Terme hier kommen vom ersten Term der vorigen Gleichung)} \\
 &\stackrel{r \equiv k-1}{=} g^{jj} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} + \sum_{r=1}^p (-1)^{r+2} g^{ir} dx^j \wedge dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_r} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} g^{ik} dx^j \wedge dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} \\
 &= g^{jj} \alpha \quad \square
 \end{aligned}$$

Proposition 2.6 $(a^i)^*$ ist ein beschränkter Operator auf $\Lambda^p(U)$ mit

$$\|(a^i)^*\|_{\text{Op}} \leq G^{ii} \quad , \quad \text{wobei } G^{ii} := \sup_{m \in U} g^{ii}(m) > 0 .$$

BEWEIS Sei $\alpha \in \Lambda^p(U)$, dann ist

$$\begin{aligned}
 \|a^i \alpha\|^2 + \|(a^i)^* \alpha\|^2 &= \langle a^i \alpha, a^i \alpha \rangle^{p-1} + \langle (a^i)^* \alpha, (a^i)^* \alpha \rangle^{p+1} \\
 &= \langle \alpha, (a^i)^* a^i \alpha \rangle^p + \langle \alpha, a^i (a^i)^* \alpha \rangle^p \\
 &= \langle \alpha, \{(a^i)^*, a^i\} \alpha \rangle^p \\
 &= \int_U \langle \alpha, \{(a^i)^*, a^i\} \alpha \rangle_{\mathfrak{m}}^p \omega \\
 &= \int_U \langle \alpha, g^{ii} \alpha \rangle_{\mathfrak{m}}^p \omega \quad , \quad \text{Prop. 2.5} \\
 &= \int_U g^{ii}(m) \cdot \langle \alpha, \alpha \rangle_{\mathfrak{m}}^p \omega \\
 &\leq G^{ii} \int_U \langle \alpha, \alpha \rangle_{\mathfrak{m}}^p \omega = G^{ii} \cdot \|\alpha\|^2 \quad .
 \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir insbesondere

$$(2.2) \quad \frac{\|(a^i)^* \alpha\|^2}{\|\alpha\|^2} \leq G^{ii} \quad ,$$

woraus folgt

$$(2.3) \quad \|(a^i)^*\|_{\text{Op}}^2 := \sup_{\alpha \neq 0} \frac{\|(a^i)^* \alpha\|^2}{\|\alpha\|^2} \leq G^{ii} \quad . \quad \square$$

Proposition 2.7 $a^i: \Lambda^{p+1}(U) \rightarrow \Lambda^p(U)$ ist ein beschränkter Operator mit

$$\|a^i\|_{\text{Op}} \leq G^{ii} \quad , \quad G^{ii} \text{ wie in Prop. 2.6 .}$$

BEWEIS Der Beweis von Proposition 2.6 liefert bereits die Behauptung, es gilt nämlich eine zu (2.2) analoge Ungleichung für a^i . Wir können die Behauptung jedoch auch mittels der Theorie der beschränkten linearen Operatoren einsehen: Sei \mathfrak{H} ein Hilbertraum und $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ bezeichne die **beschränkten linearen Operatoren von \mathfrak{H} nach \mathfrak{H}** . $(\mathcal{L}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_{\text{Op}})$ ist ein Banachraum. Sei $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, dann ist die Abbildung

$$(2.4) \quad \begin{aligned} * : \mathcal{L}(\mathfrak{H}) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \\ T &\mapsto T^* \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus [RSI, Thm. VI.3 a)], d.h.

$$(2.5) \quad \|T\|_{\text{Op}} = \|T^*\|_{\text{Op}} \quad .$$

Benütze nun die Aussage von Proposition 2.6. □

Bemerkung 2.8 i) Nach dem BLT-Theorem 1.15 existieren eindeutige Fortsetzungen von a^i bzw. $(a^i)^*$ (selbe Bezeichnung) auf den gesamten Hilbertraum $\bar{\Lambda}^p(U)$

$$\begin{aligned} a^i &: \bar{\Lambda}^{p+1}(U) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(U) \\ \text{und} \\ (a^i)^* &: \bar{\Lambda}^p(U) \rightarrow \bar{\Lambda}^{p+1}(U) \quad . \end{aligned}$$

ii) a bzw. a^* sind gerade die innere bzw. äußere Multiplikation mit $a \in \Lambda^1(M)$ in der Algebra der Differentialformen auf M [Ch, p. 277]

$$\begin{aligned} a &: \Lambda^{p+1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M) \\ &\quad \beta \mapsto i_a \beta \\ a^* &: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M) \\ &\quad \beta \mapsto a \wedge \beta . \end{aligned}$$

Lemma 2.9 *Es gilt*

$$L_t = L + t^2 \|df\|^2 + tA \quad ,$$

wobei A ein Operator nullter Ordnung ist und L den in Definition 1.19 eingeführten Operator bezeichnet. Falls die Metrik in $U \subset M$ flach ist, so ergibt sich in lokalen orthonormalen Koordinaten (x^1, \dots, x^n)

$$A = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} [(a^i)^*, a^j] \quad .$$

BEWEIS Wir betrachten oBdA glatte Formen und zeigen $\Delta_t = \Delta + t^2 \|df\|^2 + tA$, siehe Proposition 1.17. Der Abschluß des Operators Δ_t liefert dann obiges Resultat. Sei $\alpha \in \Lambda^p(M)$, dann ist

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{d}_t \alpha &\stackrel{\text{Def. 2.1 i)}}{=} e^{-tf} d(e^{tf} \alpha) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} e^{-tf} (de^{tf}) \alpha + e^{-tf} e^{tf} d\alpha \\ &= d\alpha + e^{-tf} e^{tf} t df \wedge \alpha = \mathbf{d}\alpha + t df \wedge \alpha \quad , \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad df = \sum_{i=1}^n f_i dx^i = \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* \quad , \text{ wobei } f_i := \frac{\partial f}{\partial x^i} .$$

Es ist also

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{d}_t \cdot &= d \cdot + t df \wedge \cdot \quad , \text{ bzw.} \\ &= \mathbf{d} \cdot + t \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* \cdot \quad , \end{aligned}$$

und damit

$$(2.9) \quad \mathbf{d}_t^* = \mathbf{d}^* \cdot + t \sum_{i=1}^n f_i a^i \cdot = d^* \cdot + t i_{df} \cdot \quad .$$

Weiter ist

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \Delta_t &:= \{d_t, d_t^*\} \\ &= \left(d + t \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* \right) \left(d^* + t \sum_{j=1}^n f_j a^j \right) + \left(d^* + t \sum_{j=1}^n f_j a^j \right) \left(d + t \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* \right) \\ &\quad , (2.8), (2.9) \\ &= d^* d + d d^* + t^2 \left(\sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* \right) \left(\sum_{j=1}^n f_j a^j \right) + t^2 \left(\sum_{j=1}^n f_j a^j \right) \left(\sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* \right) \\ &\quad + \left(d t \sum_{i=1}^n f_i a^i \right) + \left(t \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* d^* \right) + \left(d^* t \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* \right) + \left(t \sum_{i=1}^n f_i a^i d \right) \\ &\quad , d^2 = 0 = (d^*)^2 \\ &= \Delta + t^2 \sum_{i,j=1}^n f_i f_j \{(a^i)^*, a^j\} + tA \\ &= \Delta + t^2 \sum_{i,j=1}^n f_i f_j g^{ij} + tA \quad , \text{ Prop. 2.5} \\ &= \Delta + t^2 \|df\|^2 + tA \end{aligned}$$

mit

$$(2.11) \quad \mathbf{A} := \left\{ d , \sum_{i=1}^n f_i a^i \right\} + \left\{ d^* , \sum_{i=1}^n f_i (a^i)^* \right\} =: \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^*$$

und

$$\|df\|^2 = \langle df, df \rangle^1 = \langle f_i dx^i, f_j dx^j \rangle^1 = f_i f_j g^{ij} \quad .$$

∂_i sei der Operator, der nach der lokalen Koordinate x^i ableitet:

$$(2.12) \quad \partial_i \left(\sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots \\ \dots < j_p \leq n}} u_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots \\ \dots < j_p \leq n}} \frac{\partial u_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^i} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \quad .$$

Damit ergibt sich aus (2.7)

$$(2.13) \quad d = \sum_{i=1}^n (a^i)^* \partial_i \quad ,$$

für $f \in \mathcal{F}(M)$ erhalten wir

$$df = \left(\sum_{i=1}^n (a^i)^* \partial_i \right) f = \sum_{i=1}^n (a^i)^* \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad .$$

Es ist

$$(2.14) \quad \begin{aligned} A_1 &= \left\{ \sum_{i=1}^n (a^i)^* \partial_i, \sum_{j=1}^n f_j a^j \right\} && , (2.11), (2.13) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\{ (a^i)^* \partial_i, f_j a^j \right\} && , \text{Lin. von } \{ \cdot, \cdot \} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\underline{(a^i)^* f_j a^j \partial_i} + f_j a^j (a^i)^* \partial_i + (a^i)^* \partial_i f_j a^j - \underline{(a^i)^* f_j a^j \partial_i} \right) \\ &&& , \text{Null addieren} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\{ (a^i)^*, f_j a^j \} \partial_i + (a^i)^* [\partial_i, f_j a^j] \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (g^{ij} f_j \partial_i + A_2) && , \text{Prop. 2.5} \end{aligned}$$

mit

$$(2.15) \quad A_2 := \sum_{i,j=1}^n (a^i)^* [\partial_i, f_j a^j] \quad .$$

Sei der Einfachheit halber $\alpha = h \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$, dann ist

$$(2.16) \quad \begin{aligned} A_2 \alpha &= \sum_{i,j=1}^n (a^i)^* (\partial_i f_j a^j - f_j a^j \partial_i) \alpha && , (2.15) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (a^i)^* (f_{ji} a^j + f_j \partial_i a^j - f_j a^j \partial_i) \alpha && , \text{Produktregel} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left((a^i)^* f_{ji} a^j \alpha + (a^i)^* f_j \partial_i \left(h \cdot \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} g^{jk} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (a^i)^* f_j h_i \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} g^{ijk} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right) \\
 = & \sum_{i,j=1}^n \left((a^i)^* f_{ji} a^j \alpha + (a^i)^* f_j h_i \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} g^{ijk} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right) \right. \\
 & \left. + (a^i)^* f_j h \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \frac{\partial g^{ijk}}{\partial x^i} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right) \right) \\
 & \left. - (a^i)^* f_j h_i \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} g^{ijk} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right) \right) \\
 = & \sum_{i,j=1}^n \left(f_{ij} (a^i)^* a^j \alpha + h f_j (a^i)^* \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \frac{\partial g^{ijk}}{\partial x^i} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \right) \right),
 \end{aligned}$$

d.h. $A_2: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$ ist ein Operator nullter Ordnung (die Koeffizientenfunktion wird nicht differenziert), welcher erste Ableitungen von f und g , sowie zweite Ableitungen von f beinhaltet.

$$(2.17) \quad A = A_1 + A_1^* \quad , \quad (2.11)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} f_j \partial_i + A_2 + \left(\sum_{i,j=1}^n g^{ij} f_j \partial_i + A_2 \right)^* \quad , \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
 = & \sum_{i,j=1}^n g^{ij} f_j \partial_i + A_2 + \sum_{i,j=1}^n \underbrace{(\partial_i)^*}_{= -\partial_i} \overbrace{(f_j)^*}^{= f_j} \overbrace{(g^{ij})^*}^{= g^{ij}} + A_2^* \\
 & \text{part. Integr.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & - \sum_{i,j=1}^n \underbrace{[\partial_i, g^{ij} f_j]}_{= \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} f_j + g^{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x^i}} + A_2 + A_2^* \quad ,
 \end{aligned}$$

d.h. $A: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$ ist ein Operator nullter Ordnung.

• Sei $m \in M^n$ und $U(m)$ sei eine Koordinatenumgebung von m in der die Metrik g flach ist, d.h. der Krümmungstensor R ist an jedem Punkt $x \in U(m)$ Null. Dies ist gleichbedeutend damit, daß alle Christoffelsymbole in $U(m)$ verschwinden. In den lokalen Koordinaten (x^1, \dots, x^n) haben wir also die n^3 Gleichungen [O'N, Ch. 3, Prop. 13]

$$0 \stackrel{!}{=} a_{mij} := g_{km} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

in den n^3 Unbekannten $\partial g_{jm}/\partial x^i$. Dieses lineare Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung $\partial g_{jm}/\partial x^i = 0$, d.h. $g_{jm} = \text{const}$.

Wir wählen nun in einer Normalumgebung $\tilde{U} \subset U(m)$ von m **Normalkoordinaten** (x^1, \dots, x^n) , d.h. es gilt

$$g_{ij}(m) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ij}^k(m) = 0 \quad .$$

Aus dem obigen ergibt sich nun

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ij}^k(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in \tilde{U} \quad .$$

- Alternative: Nehme an es existiert eine Umgebung $U(m)$ von $m \in M^n$, in der die Metrik g gerade gleich der zurückgezogenen euklidischen Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ des \mathbb{R}^n ist, d.h.

$$g = \varphi^* \langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{mit} \quad \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Diffeomorphismus} \quad .$$

Damit ist

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = (\varphi^* \langle \cdot, \cdot \rangle)(\partial_i, \partial_j) = \langle \varphi_* \partial_i, \varphi_* \partial_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad .$$

Sei also $g_{ij} = \delta_{ij}$, d.h. $g^{ij} = \delta^{ij}$, und sei wieder der Einfachheit halber $\alpha = h \cdot dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_p}$, dann ist

$$\begin{aligned} (2.18) \quad & [\partial_i, a^j] h \cdot dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} = \\ & = \partial_i \left(h \cdot \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} g^{i l_k} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^{l_k}} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} \right) - a^j (h_i \cdot dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_p}) \\ & = h_i \cdot \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \delta^{i l_k} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^{l_k}} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} \\ & \quad + h_i \cdot \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \underbrace{\frac{\partial \delta^{i l_k}}{\partial x^i}}_{=0} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^{l_k}} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} \\ & \quad - h_i \cdot \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} g^{i l_k} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^{l_k}} \wedge \dots \wedge dx^{l_p} \\ & = 0 \quad , \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$(2.19) \quad [\partial_i, a^j] = 0 \quad .$$

Damit und mit

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad [\partial_i, f_j a^j] &= \partial_i f_j a^j - f_j a^j \partial_i \\
 &= f_{ji} a^j + f_j \partial_i a^j - f_j a^j \partial_i \\
 &= f_{ji} a^j + f_j [\partial_i, a^j] \\
 &= f_{ji} a^j
 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$(2.21) \quad A_1 = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i + \overbrace{\sum_{i,j=1}^n (a^i)^* [\partial_i, f_j a^j]}^{A_2} \quad , (2.14)$$

$$= \sum_{i=1}^n f_i \partial_i + \sum_{i,j=1}^n (a^i)^* f_{ji} a^j \quad , (2.20)$$

$$(2.22) \quad A_2^* = \left(\sum_{i,j=1}^n (a^i)^* f_{ji} a^j \right)^* \quad , (2.15), (2.20)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (a^i)^* f_{ji}^* (a^i)^{**} = \sum_{i,j=1}^n (a^i)^* f_{ji} a^i$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (a^i)^* f_{ij} a^j \quad , i, j \text{ vertauschen}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (a^i)^* f_{ji} a^j = A_2 \quad , f_{ij} = f_{ji} .$$

Wir erhalten nun den Operator A in der gewünschten Form

$$(2.23) \quad A = A_1 + A_1^* \quad , (2.11)$$

$$= - \sum_{i,j=1}^n [\partial_i, \delta^{ij} f_j] + 2A_2 \quad , (2.17), (2.22)$$

$$= - \sum_{i=1}^n [\partial_i, f_i] + 2 \sum_{i,j=1}^n f_{ji} (a^i)^* a^j \quad , (2.21)$$

$$= - \sum_{i=1}^n (f_{ii} + f_i \partial_i - f_i \partial_i) + 2 \sum_{i,j=1}^n f_{ji} (a^i)^* a^j \quad , \text{Produktregel}$$

$$= - \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} f_{ij} + 2 \sum_{i,j=1}^n f_{ji} (a^i)^* a^j$$

$$= \sum_{i,j=1}^n f_{ij} (- a^j (a^i)^* - (a^i)^* a^j + 2 (a^i)^* a^j) \quad , \text{Prop. 2.5}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n f_{ij} [(a^i)^*, a^j] \quad \square$$

Unser Ziel ist es nun für den Operator L_t ein Analogon zum Hodge-Theorem 1.26 (Hodge-Zerlegung) zu beweisen. Wir gehen dabei wie folgt vor:

- Das Kato-Rellich Theorem 2.12 liefert die Selbstadjungiertheit von L_t , d.h. $\text{Spec } L_t \subset \mathbb{R}$.
- L_t ist semi-positiv, d.h. $\text{Spec } L_t \subset \mathbb{R}_0^+$. Also ist $-1 \in \rho(L_t)$, woraus folgt, daß $(L_t + Id)^{-1}$ ein beschränkter Operator ist.
- $(L_t + Id)^{-1}$ ist ein kompakter Operator.
- elliptische Regularität: $\bigcap_{k=1}^{\infty} D((L_t)^k) = \Lambda^p(M)$.
- Die beiden letzten Resultate liefern ein Hodge-Theorem für L_t ; der Beweis ist analog zu dem des Hodge-Theorems 1.26 für L .

Definition 2.10 Seien A und B dicht definierte Operatoren auf einem Hilbertraum \mathfrak{H} . Falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind

- i) $D(B) \supset D(A)$,
- ii) $\exists a, b \in \mathbb{R} \forall \varphi \in D(A) : \|B\varphi\| \leq a \cdot \|A\varphi\| + b \cdot \|\varphi\|$,

dann heißt B **A-beschränkt**. Das Infimum solcher a , welche ii) erfüllen, heißt **relative Schranke von B bezüglich A**. Falls die relative Schranke Null ist, so heißt B **infinitesimal klein bezüglich A** (Schreibweise: $B \ll A$).

Definition 2.11 Sei T ein abgeschlossener Operator. Eine Teilmenge $D \subset D(T)$ heißt **Kern von T** (nicht zu verwechseln mit $\text{Ker } T$), falls $\overline{T|_D} = T$.

Kato-Rellich-Theorem 2.12 [RSII, Thm. X.12] T sei selbstadjungiert, B sei symmetrisch und T -beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$. Dann ist $T + B$ selbstadjungiert auf $D(T)$ und wesentlich selbstadjungiert auf jedem Kern von T . Falls T von unten durch c beschränkt ist, so ist $T + B$ von unten beschränkt durch

$$c - \max \left\{ \frac{b}{1-a}, a |M| + b \right\} ,$$

wobei a und b durch Definition 2.10 ii) gegeben sind.

In unserem Fall ist $T = L$ und $B = t^2 \|df\|^2 + tA$.

Proposition 2.13 Der Operator

$$\begin{aligned} S_1 : \Lambda^p(M) &\rightarrow \Lambda^p(M) \\ \alpha &\mapsto t^2 \|df\|^2 \cdot \alpha \end{aligned}$$

ist beschränkt mit $\|S_1\|_{\text{Op}} \leq \max_{m \in M} t^2 \cdot \|df(m)\|^2$.

BEWEIS

$$\begin{aligned}
 \|S_1\|_{\text{Op}} &= \sup_{\|\alpha\|=1} \|S_1\alpha\| = \sup_{\|\alpha\|=1} (\langle S_1\alpha, S_1\alpha \rangle^{\text{p}})^{1/2} \\
 &= \sup_{\|\alpha\|=1} \left(\int_M \langle t^2 \|df(m)\|^2 \alpha(m), t^2 \|df(m)\|^2 \alpha(m) \rangle_{\text{p}}^{\omega} \right)^{1/2} \\
 &= \sup_{\|\alpha\|=1} \left(\int_M t^4 \|df(m)\|^4 \langle \alpha(m), \alpha(m) \rangle_{\text{p}}^{\omega} \right)^{1/2} \\
 &\leq \sup_{\|\alpha\|=1} \left(\left(\max_{m \in M} t^4 \|df(m)\|^4 \right) \int_M \langle \alpha(m), \alpha(m) \rangle_{\text{p}}^{\omega} \right)^{1/2} \\
 &= \max_{m \in M} t^2 \cdot \|df(m)\|^2 \cdot \sup_{\|\alpha\|=1} \|\alpha\| \\
 &= \max_{m \in M} t^2 \cdot \|df(m)\|^2 < \infty \quad , \text{ da } M \text{ kompakt} . \quad \square
 \end{aligned}$$

Proposition 2.14 *Der Operator*

$$\begin{aligned}
 S_2 : \Lambda^{\text{p}}(M) &\rightarrow \Lambda^{\text{p}}(M) \\
 \alpha &\mapsto tA\alpha \quad ,
 \end{aligned}$$

wobei A der Operator aus in Lemma 2.9 ist, ist beschränkt.

BEWEIS Wegen der Kompaktheit von M genügt es die Beschränktheit von tA in lokalen Koordinaten zu zeigen. Im Fall einer flachen Metrik ergab sich für tA in lokalen Koordinaten der folgende Ausdruck (Lemma 2.9)

$$A = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} [(a^i)^*, a^j] \quad .$$

Für eine beliebige Metrik sind lediglich die zweiten Ableitungen von f durch kovariante Ableitungen zu ersetzen [CFKS, Se. 11.4]. Der so erhaltene Ausdruck für A ist invariant unter Koordinatenwechseln [CFKS, Se. 12.4] und definiert daher A global. A ist als Summe von Produkten beschränkter Operatoren, selbst wieder ein beschränkter Operator (die beschränkten Operatoren bilden eine Algebra). Die Beschränktheit von $(a^i)^*$ und a^j hatten wir in den Propositionen 2.6 und 2.7 gezeigt. Der Multiplikationsoperator mit den zweiten Ableitungen von f ist ebenfalls beschränkt, da M kompakt und f glatt ist. \square

Die Propositionen 2.13 und 2.14 zusammen ergeben nun die

Proposition 2.15 $B := t^2 \|df\|^2 + tA: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M)$ ist ein beschränkter Operator.

B besitzt daher (BLT-Theorem 1.15) eine eindeutige Fortsetzung

$$\tilde{B} : \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M)$$

(wir benutzen im folgenden dieselbe Bezeichnung B für den fortgesetzten Operator).

Bemerkung 2.16 Die Voraussetzung i) in Definition 2.10 ist also erfüllt. Außerdem gilt mit $a = 0, b = \|B\|_{\text{Op}}$

$$\|B\varphi\| \leq b \cdot \|\varphi\| \quad , \quad \forall \varphi \in D(L) \quad ,$$

d.h. B ist L -beschränkt. Wegen $a = 0$ ist B sogar infinitesimal klein bezüglich L ($B \ll L$).

Proposition 2.17 B ist symmetrisch.

BEWEIS Seien $\alpha, \beta \in \Lambda^p(M)$, dann ist

$$\begin{aligned} \langle B\alpha, \beta \rangle^p &= \int_M \left(\langle t^2 \|df(m)\|^2 \alpha(m), \beta(m) \rangle_m^p + \langle t(A_1 + A_1^*)\alpha(m), \beta(m) \rangle_m^p \right) \omega \\ &\quad , \text{ siehe (2.11)} \\ &= \int_M \left(\langle \alpha(m), t^2 \|df(m)\|^2 \beta(m) \rangle_m^p + \langle \alpha(m), t(A_1^* + A_1)\beta(m) \rangle_m^p \right) \omega \\ &\quad , \langle \cdot, \cdot \rangle_m^p \text{ lin.} \\ &= \langle \alpha, B\beta \rangle^p \quad \square \end{aligned}$$

Aus Bemerkung 2.16, Proposition 2.17, sowie der Selbstadjungiertheit von L (Thm. 1.20) erhalten wir mittels des Kato-Rellich-Theorems 2.12

Lemma 2.18 L_t ist selbstadjungiert und $D(L_t) = D(L) \subset \bar{\Lambda}^p(M)$.

Es ist also insbesondere $\text{Spec } L_t \subset \mathbb{R}$.

Definition 2.19 T sei ein abgeschlossener Operator auf einem Hilbertraum \mathfrak{H} . $\lambda \in \mathbb{C}$ ist in der **Resolventenmenge** $\rho(T)$, falls $\lambda \text{Id} - T$ eine Bijektion von $D(T)$ auf \mathfrak{H} mit beschränkter Inverser ist. Falls $\lambda \in \rho(T)$, so heißt

$$R_\lambda(T) := (\lambda Id - T)^{-1}$$

Resolvente von T an der Stelle λ . $\lambda \in \mathbb{C}$ ist im Spektrum $Spec T$, falls $\lambda \notin \rho(T)$.

Proposition 2.20 $Spec L_t \subset \mathbb{R}_0^+$.

BEWEIS Es genügt L_t auf $\Lambda^p(M)$ zu betrachten (Prop. 1.17). Sei $\alpha \in \Lambda^p(M)$

$$\begin{aligned} \langle \alpha, L_t \alpha \rangle^p &= \langle \alpha, (d_t^* d_t + d_t d_t^*) \alpha \rangle^p \\ &= \langle d_t \alpha, d_t \alpha \rangle^p + \langle d_t^* \alpha, d_t^* \alpha \rangle^p \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Für $\lambda_t \in \mathbb{R}$ und $\alpha_t \in D(L_t)$ mit $\|\alpha_t\| = 1$ und $L_t \alpha_t = \lambda_t \alpha_t$ gilt also

$$0 \leq \langle \alpha_t, L_t \alpha_t \rangle^p = \langle \alpha_t, \lambda_t \alpha_t \rangle^p = \lambda_t \|\alpha_t\|^2 = \lambda_t \quad . \quad \square$$

Proposition 2.21 $(L_t + Id)^{-1}$ ist beschränkt.

BEWEIS Aus Proposition 2.20 folgt $-1 \notin Spec L_t$, also ist $-1 \in \rho(L_t)$, d.h. $(-Id - L_t) = -(L_t + Id)$ besitzt eine beschränkte Inverse $-(L_t + Id)^{-1}$, damit ist auch $(L_t + Id)^{-1}$ beschränkt. \square

Proposition 2.22 $(L + Id)^{-1} - (L_t + Id)^{-1} = (L + Id)^{-1} (L_t - L) (L_t + Id)^{-1}$.

BEWEIS
$$\begin{aligned} (L + Id)^{-1} - (L_t + Id)^{-1} &= (L + Id)^{-1} (Id - (L + Id)(L_t + Id)^{-1}) \\ &= (L + Id)^{-1} (Id (L_t + Id) - (L + Id)) (L_t + Id)^{-1} \\ &= (L + Id)^{-1} (L_t - L) (L_t + Id)^{-1} \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 2.23 $(L_t + Id)^{-1}$ ist ein beschränkter Operator.

BEWEIS Nach Proposition 2.22 gilt

$$\underbrace{(L + Id)^{-1}}_{\substack{\text{kompakt} \\ \text{Thm. 1.24}}} - (L_t + Id)^{-1} = \underbrace{(L + Id)^{-1}}_{\substack{\text{kompakt} \\ \text{Thm. 1.24}}} \underbrace{B}_{\substack{\text{beschränkt} \\ \text{Prop. 2.15}}} \underbrace{(L_t + Id)^{-1}}_{\substack{\text{beschränkt} \\ \text{Prop. 2.21}}} \quad .$$

Die rechte Seite ist ein kompakter Operator, da die Komposition eines kompakten Operators mit einem beschränkten Operator wieder ein kompakter Operator ist [RSI, Thm. VI.12 c)]. D.h. die Menge der kompakten Operatoren $Com(\mathfrak{H})$ ist ein Ideal in $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Nun ist $Com(\mathfrak{H})$ als abgeschlossener linearer Teilraum des Banachraumes $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ [RSI,

Thm.VI.12] selbst ein Banachraum. Also ist

$$(L_t + Id)^{-1} = (L + Id)^{-1} - (L + Id)^{-1}B(L_t + Id)^{-1}$$

als Summe zweier kompakter Operatoren selbst ein kompakter Operator. \square

Theorem 2.24 (elliptische Regularität)

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} D((L_t)^k) = \Lambda^p(M) \quad .$$

BEWEIS " \supset " Für $\alpha \in \Lambda^p(M)$ ist $L_t \alpha = (d_t^* d_t + d_t d_t^*) \alpha \in \Lambda^p(M)$, d.h. L_t bildet glatte Formen in glatte Formen ab, d.h.

$$\Lambda^p(M) \subset D((L_t)^k) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

" \subset " Es genügt zu zeigen (Thm. 1.23)

$$D_t := \bigcap_{k=1}^{\infty} D((L_t)^k) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(L^k) =: D \quad .$$

Sei also $\alpha \in D_t$, d.h. $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $\alpha \in D((L_t)^k) = D((L + B)^k) = D(L^k + \dots)$. D.h. $\alpha \in D(L^k) \forall k \in \mathbb{N}$. Beachte $D(L_t) = D(L)$ nach Lemma 2.18. \square

Theorem 2.25 (Hodge-Zerlegung)

- i) $\bar{\Lambda}^p(M) = \bar{\Lambda}_{\mathbb{H}_t}^p(M) \oplus \bar{\Lambda}_{\mathbb{d}_t}^p(M) \oplus \bar{\Lambda}_{\mathbb{d}_t^*}^p(M)$
- ii) $\Lambda^p(M) = \Lambda_{\mathbb{H}_t}^p(M) \oplus \Lambda_{\mathbb{d}_t}^p(M) \oplus \Lambda_{\mathbb{d}_t^*}^p(M)$
- iii) $\text{Ker}(d_t: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M)) = \Lambda_{\mathbb{H}_t}^p(M) \oplus \Lambda_{\mathbb{d}_t}^p(M)$
- iv) $\Lambda_{\mathbb{H}_t}^p(M) = \bar{\Lambda}_{\mathbb{H}_t}^p(M)$ ist endlich-dimensional.

Der Beweis geht analog zum Beweis des Hodge-Theorems 1.26, wir müssen lediglich Theorem 1.24 über die Kompaktheit von $(L + Id)^{-1}$ durch Theorem 2.23, sowie die elliptische Regularität (Thm. 1.23) durch Theorem 2.24 ersetzen.

Proposition 2.26

- i) $\text{Ker} d_t = e^{-tJ} \text{Ker} d$
- ii) $\text{Ran} d_t = e^{-tJ} \text{Ran} d$

BEWEIS i) " \supset " Sei $\alpha \in \text{Ker} d$, dann ist

$$d_t(e^{-tf}\alpha) = e^{-tf}de^{tf}e^{-tf}\alpha = e^{-tf}d\alpha = e^{-tf} \cdot 0 = 0 \quad .$$

" \subset " Sei $\beta \in \text{Ker } d_t$, d.h. $0 = d_t\beta = e^{-tf}de^{tf}\beta$. Also ist $e^{tf}\beta \in \text{Ker } d$, also $\beta \in e^{-tf} \cdot \text{Ker } d$.

ii) " \supset " Sei $\alpha \in \text{Rand}$, d.h. es existiert ein β mit $d\beta = \alpha$, dann ist

$$d_t(e^{-tf}\beta) = e^{-tf}de^{tf}e^{-tf}\beta = e^{-tf}d\beta = e^{-tf}\alpha \quad .$$

" \subset " Sei $\beta \in \text{Rand}_t$, d.h. es existiert ein α mit $\beta = d_t\alpha = e^{-tf}de^{tf}\alpha$. Es ist $de^{tf}\alpha \in \text{Rand}$ und damit $\beta \in e^{-tf} \cdot \text{Rand}$. \square

Theorem 2.27 $b_p = \dim \text{Ker } L_t$, $p \in \{0, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} \text{BEWEIS} \quad \text{Ker } L_t &= \bar{\Lambda}_{\mathbb{H}_t}^p(M) && , \text{ Def. 2.1 vii)} \\ &= \Lambda_{\mathbb{H}_t}^p(M) && , \text{ Thm. 2.25 vi)} \\ &\simeq \frac{\text{Ker}(d_t: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M))}{\text{Ran}(d_t: \Lambda^{p-1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M))} && , \text{ Thm. 2.25 iii)} \\ &= \frac{e^{-tf} \cdot \text{Ker}(d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M))}{e^{-tf} \cdot \text{Ran}(d: \Lambda^{p-1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M))} && , \text{ Prop. 2.26} \\ &\simeq \frac{\text{Ker}(d: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M))}{\text{Ran}(d: \Lambda^{p-1}(M) \rightarrow \Lambda^p(M))} \\ &=: H_{\text{DR}}^p(M; \mathbb{R}) && , (1.2.5). \end{aligned}$$

\square

2.3 Der quasiklassische Limes

Wir interessieren uns für das asymptotische Verhalten des Spektrums von Schrödingeroperatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten selbstadjungierte Operatoren der Form

$$(3.1) \quad H(t) = -\tilde{\Delta} + t^2 h + t g \quad ,$$

definiert als Abschluß des entsprechenden Differentialoperators auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($\tilde{\Delta} := \sum_{k=1}^n \partial^2 / \partial (x^k)^2$). Es seien $h, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, g sei beschränkt, $h \geq 0$ und $h > \text{const} > 0$ außerhalb eines Kompaktums. Weiterhin soll h bei nur endlich vielen Punkten $\{y_{(r)}\}_{r=1}^N$ verschwinden und die Hesse-Matrix von h

$$(3.2) \quad H_{ij}^{(r)} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j}(y_{(r)})$$

soll für jedes r positiv definit sein.

Wir wollen nun die Eigenwerte von $H(t)$ für große t abschätzen. In diesem Fall ist der Term $t^2 h$ im Potential $V(t) = t^2 \cdot h + t \cdot g$ dominierend. In der Nähe einer Nullstelle $y_{(r)}$ von h ähnelt das Potential $V(t)$ dem eines harmonischen Oszillators, die Eigenfunktionen zu kleinen Eigenwerten von $H(t)$ (insbesondere dem Eigenwert 0) sind außerdem bei den Nullstellen von h lokalisiert, da sonst die Eigenwertgleichung nicht erfüllt sein kann (der Term $t^2 h(x)$ ist sehr groß für $x \notin U_\epsilon(y_{(r)})$). Wir erwarten daher, daß das Spektrum von $H(t)$ für großes t aussieht wie das Spektrum der direkten Summe von Operatoren der Form

$$(3.3) \quad H^{(r)}(t) = -\tilde{\Delta} + t^2 \frac{1}{2} H_{ij}^{(r)} (x - y_{(r)})^i (x - y_{(r)})^j + t g(y_{(r)}) \quad , \quad r \in \{1, \dots, N\} .$$

Wir haben hierbei die Taylorentwicklung 2. Ordnung für h eingesetzt (der Ursprung des Koordinatensystems sei bei $y_{(r)}$ gewählt):

$$(3.4) \quad h(x) = \underbrace{h(y_{(r)})}_{=0} + \underbrace{h'(y_{(r)})}_{=0} (x - y_{(r)}) + \frac{1}{2} (x - y_{(r)})^t h''(y_{(r)}) (x - y_{(r)}) + O(|x - y_{(r)}|^3) \quad .$$

Seien nun $T(b)$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $D(t)$ mit $t > 0$ der **Translations-** bzw. **Dilatationsoperator** auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sie sind definiert durch

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (T(b)f)(x) &:= f(x - b) \quad , \\ (D(t)f)(x) &:= t^{n/2} \cdot f(tx) \quad . \end{aligned}$$

Proposition 3.1 $T(b)$ und $D(t)$ sind unitäre Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

BEWEIS

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \langle T(b)f, T(b)g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (T(b)f)(x) (T(b)g)(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-b) \cdot g(x-b) dx \quad , \quad y := x-b \Rightarrow dy = dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(y) dy = \langle f, g \rangle \quad . \\
\bullet \quad \langle D(t)f, D(t)g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{n/2} f(tx) \cdot t^{n/2} g(tx) dx \quad , \quad y := tx \Rightarrow \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = t^n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(y) dy = \langle f, g \rangle \quad . \quad \square
\end{aligned}$$

Mit

$$(3.6) \quad K^{(r)} := -\tilde{\Delta} + \frac{1}{2} H_{ij}^{(r)} x^i x^j + g(y_{(r)}) \quad ,$$

wobei das Koordinatensystem seinen Ursprung bei $y_{(r)}$ habe, gilt

Proposition 3.2 $H^{(r)}(t)$ ist unitär äquivalent zu $tK^{(r)}$, d.h.

$$D(t^{1/2}) T(t^{1/2} y_{(r)}) tK^{(r)} T(-t^{1/2} y_{(r)}) D(t^{-1/2}) = H^{(r)}(t) \quad .$$

$$\text{BEWEIS } (D(t^{1/2}) f)(x) = t^{-n/4} f(t^{1/2}x)$$

$$(T(-t^{1/2} y_{(r)}) D(t^{1/2}) f)(x) = t^{-n/4} f(t^{1/2}x + y_{(r)})$$

$$\begin{aligned}
(tK^{(r)} T(-t^{1/2} y_{(r)}) D(t^{1/2}) f)(x) &= \\
&= t \cdot t^{-n/4} \left(-\tilde{\Delta} + \frac{1}{2} H_{ij}^{(r)} x^i x^j + g(y_{(r)}) \right) (f(t^{1/2}x + y_{(r)})) \\
&= t \cdot t^{-n/4} \left(-t^{-1} \cdot (\tilde{\Delta} f)(t^{1/2}x + y_{(r)}) + \left(\frac{1}{2} H_{ij}^{(r)} x^i x^j + g(y_{(r)}) \right) \cdot f(t^{1/2}x + y_{(r)}) \right)
\end{aligned}$$

$$(T(t^{1/2} y_{(r)}) tK^{(r)} T(-t^{1/2} y_{(r)}) D(t^{1/2}) f)(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= t \cdot t^{-n/4} \left(-t^{-1} \cdot (\tilde{\Delta} f)(t^{1/2}x) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} H_{ij}^{(r)} (x - t^{1/2} y_{(r)})^i (x - t^{1/2} y_{(r)})^j f(t^{1/2}x) + g(y_{(r)}) f(t^{1/2}x) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D(t^{1/2}) T(t^{1/2}y_{(r)}) tK^{(r)} T(-t^{1/2}y_{(r)}) D(t^{-1/2}) f)(x) &= \\
= t^{n/4} \cdot t \cdot t^{-n/4} \left(-t^{-1} \cdot (\tilde{\Delta} f)(x) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} H_{ij}^{(r)} (t^{1/2}x - t^{1/2}y_{(r)})^i (t^{1/2}x - t^{1/2}y_{(r)})^j f(x) + g(y_{(r)}) f(x) \right) \\
= -(\tilde{\Delta} f)(x) + t^2 \frac{1}{2} H_{ij}^{(r)} (x - y_{(r)})^i (x - y_{(r)})^j f(x) + g(y_{(r)}) f(x) \\
= (H^{(r)}(t)f)(x) \quad \square
\end{aligned}$$

Also sind insbesondere die Spektren von $H^{(r)}(t)$ und $tK^{(r)}$ gleich: Sei \mathfrak{H} ein Hilbertraum und seien $U, T, S \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ mit $T = U^{-1}SU$ und $U^* = U^{-1}$, dann gilt

$$(3.7) \quad \text{Spec} T = \text{Spec} S \quad .$$

Denn sei $t \in \text{Spec} S$, d.h. $\exists \xi \in \mathfrak{H}$ mit $S\xi = t\xi$, dann ist

$$T(U^{-1}\xi) = U^{-1}S U U^{-1}\xi = U^{-1}S\xi = U^{-1}t\xi = t(U^{-1}\xi) \quad ,$$

d.h. $t \in \text{Spec} T$. Die Relation $\text{Spec} T \subset \text{Spec} S$ wird analog gezeigt.

Die Eigenwerte von $K^{(r)}$ sind leicht zu berechnen, da $K^{(r)}$ bis auf die Konstante $g(y_{(r)})$ ein harmonischer Oszillator ist. Seien $\{(\omega_i^{(r)})^2\}_{i=1}^n$ die Eigenwerte der positiv definiten symmetrischen Matrix $\frac{1}{2}H_{ij}^{(r)}$, die $\omega_i^{(r)}$ seien positiv gewählt. Die Eigenwerte von $K^{(r)}$ ergeben sich nun durch Summation der Eigenwerte $\omega_i^{(r)}(2n_i + 1)$, $n_i \in \mathbb{N}_0$, der eindimensionalen harmonischen Oszillatoren $-\frac{d^2}{dx^2} + (\omega_i^{(r)})^2 x^2$, welche noch um die Konstante $g(y_{(r)})$ zu verschieben sind. Es ergibt sich

$$(3.8) \quad \sigma(K^{(r)}) = \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^{(r)}(2n_i + 1) \right) + g(y_{(r)}) \mid n_1, \dots, n_n \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad .$$

Die Eigenwerte des Operators

$$(3.9) \quad \bigoplus_{r=1}^N K^{(r)} \quad \text{in} \quad \bigoplus_{r=1}^N L^2(\mathbb{R}^n)$$

ergeben sich zu

$$(3.10) \quad \sigma\left(\bigoplus_{r=1}^N K^{(r)}\right) = \bigcup_{r=1}^N \sigma(K^{(r)}) \quad .$$

Theorem 3.3 [CFKS, Thm. 11.1] *Seien $H(t)$ und $\bigoplus_{r=1}^N K^{(r)}$ wie zuvor. $E_m(t)$ bezeichne den m -ten Eigenwert von $H(t)$, e_m den m -ten Eigenwert von $\bigoplus_{r=1}^N K^{(r)}$, jeweils gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit. Für festes m und große t*

gilt: $H(t)$ besitzt mindestens m Eigenwerte und es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_m(t)}{t} = e_m \quad .$$

Aufgrund dieses Theorems ist unsere Vermutung bestätigt, daß das Spektrum von $H(t)$ für große t aussieht wie das Spektrum der direkten Summe der Operatoren $H^{(r)}(t)$.

Bemerkung 3.4 Voriges Theorem findet sich auch in [Si] und wurde zuvor in [CDS] für den eindimensionalen Fall bewiesen. Wie in [CFKS, Abschn. 11.5] bemerkt, gilt es auch im Fall des deformierten Laplace-Beltrami-Operators L_t auf $D(L_t) \subset \bar{\Lambda}^p(M)$. Hierbei geht insbesondere die Kompaktheit von M ein. Ein Beweis für diesen allgemeinen Fall findet sich in [Ch, App. Se. 3].

2.4 Beweis der schwachen Morse-Ungleichungen

Wir wollen nun die schwachen Morse-Ungleichungen

$$(4.1) \quad b_p \leq c_p \quad , \quad p = 0, \dots, n$$

beweisen. Hierzu konstruieren wir zunächst eine spezielle Riemannsche Metrik auf M , bezüglich der unser Operator

$$(4.2) \quad L_t = L + t^2 \|df\|^2 + tA \quad , \quad (\text{Lemma 2.9}) \quad ,$$

lokal bei den kritischen Punkten von f eine einfache Gestalt annimmt. Da wir uns für den tiefliegenden Teil des Spektrums von L_t interessieren, genügt es L_t lokal bei den kritischen Punkten von f zu betrachten (die Eigenfunktionen zu kleinen Eigenwerten sind für großes t nur dort lokalisiert). Um nun die Bettizahlen

$$(4.3) \quad b_p = \dim \text{Ker } L_t |_{\Lambda^p(M)} \quad , \quad p = 0, \dots, n \quad , \quad (\text{Theorem 2.27}) \quad ,$$

nach oben abzuschätzen, verwenden wir das Theorem 3.3 über den quasiklassischen Limes von L_t .

Nun also zur Konstruktion der speziellen Riemannschen Metrik auf M . Seien $\{y_{(r)}\}_{r=1}^N$ die kritischen Punkte der Morse-Funktion f . Aufgrund des Morse-Lemmas 1.2.1 existieren in der Umgebung eines kritischen Punktes $y_{(r)}$ mit $\text{Ind}_f(y_{(r)}) = k$ Koordinaten x^1, \dots, x^n , so daß gilt

$$(4.4) \quad f(x^1, \dots, x^n) = \text{const} - \sum_{i=1}^k (x^i)^2 + \sum_{i=k+1}^n (x^i)^2 \quad .$$

Indem wir nun dx^1, \dots, dx^n als orthonormal deklarieren, erhalten wir die euklidische Metrik $g^{ij} = \delta^{ij}$ lokal um $y_{(r)}$. Da die kritischen Punkte isoliert sind, können wir, mittels einer Zerlegung der Eins, obige lokalen Metriken bei den kritischen Punkten, sowie beliebige Riemannsche Metriken auf den restlichen Bereichen von M zu einer Riemannschen Metrik auf ganz M zusammensetzen.

Proposition 4.1 *Sei $(\varphi = (x^1, \dots, x^n), U)$ eine Karte von M und sei $g^{ij} = \delta^{ij}$ die euklidische Metrik auf U , dann gilt für $\alpha = v \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \in \Lambda^p(U)$ mit $\text{supp } v \subset U$*

$$L\alpha = - \tilde{\Delta} \alpha := - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial (x^k)^2} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \quad .$$

BEWEIS Im Beweis von Lemma 2.9 hatten wir gezeigt

$$(4.5) \quad d = \sum_{i=1}^n (a^i)^* \partial_i \quad , \quad \text{vgl. (2.13)} \quad .$$

Die Fermionenerzeuger bzw. -vernichter $(a^i)^*$ bzw. a^i wurden in Definition 2.3 bzw. Lemma 2.4 eingeführt, der Operator ∂_i in (2.12). Es ist

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad d^* &= \left(\sum_{i=1}^n (a^i)^* \partial_i \right)^* \\
 &= \sum_{i=1}^n (\partial_i)^* a^i && , (AB)^* = B^* A^* \\
 &= \sum_{i=1}^n -\partial_i a^i && , \partial_i^* = -\partial_i \text{ (part. Integ.)} \\
 &= -\sum_{i=1}^n a^i \partial_i && , [\partial_i, a^j] = 0 \text{ für } g^{ij} = \delta^{ij} \\
 &&& \text{siehe (2.19) .}
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$(4.7) \quad L = d^*d + dd^*$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\sum_{i=1}^n a^i \partial_i \right) \left(\sum_{j=1}^n (a^j)^* \partial_j \right) + \left(\sum_{j=1}^n (a^j)^* \partial_j \right) \left(-\sum_{i=1}^n a^i \partial_i \right) \\
 &= -\sum_{i,j=1}^n a^i \partial_i (a^j)^* \partial_j - \sum_{i,j=1}^n (a^j)^* \partial_j a^i \partial_i \\
 &= -\sum_{i,j=1}^n a^i (a^j)^* \partial_i \partial_j - \sum_{i,j=1}^n (a^j)^* a^i \partial_j \partial_i && , [\partial_i, (a^j)^*] = 0 \text{ \& (2.19)} \\
 &= -\sum_{i,j=1}^n \{a^i, (a^j)^*\} \partial_i \partial_j \\
 &= -\sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \partial_i \partial_j \\
 &= -\sum_{i=1}^n \partial_i^2 \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 4.2 *Der Operator L_t eingeschränkt auf $\Lambda^p(M)$ hat bezüglich obiger spezieller Metrik lokal bei einem kritischen Punkt $y_{(r)}$ von f mit $\text{Ind}_f(y_{(r)}) = k$ die Gestalt*

$$L_t = -\tilde{\Delta} + 4t^2 x^2 - 2t \sum_{i=1}^k [(a^i)^*, a^i] + 2t \sum_{i=k+1}^n [(a^i)^*, a^i] \quad , \quad x^2 := \sum_{i=1}^n (x^i)^2 .$$

BEWEIS Nach Lemma 2.9 gilt $L_t = L + t^2 \cdot \|df\|^2 + t \cdot A$. Mit $g^{ij} = \delta^{ij}$ ergibt sich (unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention und $f_i(x) := \partial_i f(x)$)

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad \|df(x)\|^2 &= \langle f_i(x) dx^i, f_j(x) dx^j \rangle = f_i(x) f_j(x) \langle dx^i, dx^j \rangle \\
 &= f_i(x) f_j(x) g^{ij}(x) = f_i(x) f_j(x) \delta^{ij} = \sum_{i=1}^n f_i(x)^2
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(4.4)}{=} \sum_{i=1}^n 4 (x^i)^2 = 4 x^2$$

$$\begin{aligned} (4.9) \quad A(x) &= f_{ij}(x) [(a^i)^*, a^j] \\ &= f_{ii}(x) [(a^i)^*, a^i] \quad , (4.4) \Rightarrow f_{ij}(x) = 0 \text{ für } i \neq j \\ &= -2 \sum_{i=1}^k [(a^i)^*, a^i] + 2 \sum_{i=k+1}^n [(a^i)^*, a^i] \quad . \end{aligned}$$

Sei $\alpha = u \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \in \Lambda^p(U)$, dann ist

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= (d^*d + dd^*) (u \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) \\ &= - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial (x^k)^2} \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \quad , \text{ Prop.4.1} \\ &=: - \tilde{\Delta} \alpha \quad \square \end{aligned}$$

In Paragraph 2.3 hatten wir den selbstadjungierten Operator

$$(4.10) \quad H(t) = - \tilde{\Delta} + t^2 h + t g$$

betrachtet. In unserem Fall sind nun

$$\begin{aligned} (4.11) \quad h(x) &= \|df(x)\|^2 = 4 x^2 \quad , (4.8) \\ g(x) &= A(x) \quad , \text{ s. Lemma 2.9} \\ &= -2 \sum_{i=1}^k [(a^i)^*, a^i] + 2 \sum_{i=k+1}^n [(a^i)^*, a^i] \quad , (4.9) \quad . \end{aligned}$$

h erfüllt insbesondere die in Paragraph 2.3 geforderten Eigenschaften. Es ist

$$\begin{aligned} (4.12) \quad K^{(r)} &= - \tilde{\Delta} + \frac{1}{2} H_{ij}^{(r)} x^i x^j + g(y_{(r)}) \quad , H_{ij}^{(r)} := \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= - \tilde{\Delta} + \frac{1}{2} \cdot 8 \delta_{ij} x^i x^j + A^{(r)} \\ &= - \tilde{\Delta} + 4 x^2 + A^{(r)} \quad . \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Spektrum von $K^{(r)}$ berechnen. Hieraus ergibt sich dann das Spektrum von $\oplus_r K^{(r)}$, welches die asymptotischen Eigenwerte von L_t darstellt.

Der Operator $- \tilde{\Delta} + 4 x^2$ wirkt auf alle p -Formen $u \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$ gleich,

unabhängig vom Basiselement $(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) \in \Lambda^p(U)$. Er ist also ein skalarer Operator. Angewendet auf die Koeffizientenfunktion $u \in C^\infty(U)$ stellt er einen n -dimensionalen harmonischen Oszillator mit den Eigenwerten

$$(4.13) \quad \left\{ \sum_{i=1}^n 2(n_i + 1) \mid n_1, \dots, n_n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

dar. Für jeden dieser Eigenwerte gibt es also $\binom{n}{p}$ unabhängige Eigenfunktionen (Eigenformen)

$$(4.14) \quad \psi \cdot (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) \quad , \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n \quad ,$$

wobei $\psi \in C^\infty(U)$ die Eigenfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist. Als nächstes ist nun die Wirkung von $A^{(r)}$ auf eine p -Form zu berechnen.

Proposition 4.3

$$[(a^i)^*, a^i] (u \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) = \begin{cases} u \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} & , i \in \{j_1, \dots, j_p\} , \\ -u \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} & , \text{sonst} . \end{cases}$$

BEWEIS **1. Fall** $i \in \{j_1, \dots, j_p\}$ ('^' bedeutet das Weglassen des so gekennzeichneten Terms)

$$a^i (a^i)^* dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = a^i dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = a^i \mathbf{0} = 0$$

$$\begin{aligned} (a^i)^* a^i dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} &= (a^i)^* \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \delta^{ik} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \\ &= (-1)^{k+1} \delta^{ii} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \\ &= (-1)^2 dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \quad , (k-1)\text{-faches Vertauschen} , \end{aligned}$$

d.h. $[(a^i)^*, a^i] = 1$.

2. Fall $i \notin \{j_1, \dots, j_p\}$

$$\begin{aligned} (a^i)^* a^i dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} &= (a^i)^* \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \delta^{ik} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \underbrace{\delta^{ik}}_{=0} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^i (a^i)^* dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} &= a^i dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \\ &= (-1)^{1+1} g^{ii} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^{k+1} g^{ij_{k-1}} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^p (-1)^{l+2} \underbrace{\delta^{j_l}}_{=0} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \\
 &= dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} ,
 \end{aligned}$$

damit ist $[(a^i)^*, a^i] = -1$. □

Sei nun $k := \text{Ind}_f(y_{(r)})$ und

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad &I := \{j_1, \dots, j_p\} \quad , \quad J := \{1, \dots, n\} \setminus I \quad , \\
 &K := \{1, \dots, k\} \quad , \quad L := \{k+1, \dots, n\} \quad , \\
 &\lambda_{(r)}(j_1, \dots, j_p) := \#(J \cap K) - \#(I \cap K) - \#(J \cap L) + \#(I \cap L) \quad .
 \end{aligned}$$

Proposition 4.4 $\frac{1}{2} A^{(r)} (\psi \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) = \lambda_{(r)}(j_1, \dots, j_p) \cdot (\psi \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p})$

BEWEIS

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} A^{(r)} (\psi \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) \\
 &= -\psi \sum_{i=1}^k [(a^i)^*, a^i] (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) + \psi \sum_{i=k+1}^n [(a^i)^*, a^i] (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) \\
 &= \left[(-\psi) (\#(I \cap K) - \#(J \cap K)) + \psi (\#(I \cap L) - \#(J \cap L)) \right] (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) \\
 &= \left(\#(J \cap K) - \#(I \cap K) - \#(J \cap L) + \#(I \cap L) \right) \psi \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \\
 &= \lambda_{(r)}(j_1, \dots, j_p) \cdot (\psi \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}) \quad \square
 \end{aligned}$$

Damit gilt

Lemma 4.5 $\sigma(K^{(r)}) = \left\{ \sum_{i=1}^n 2(n_i + 1) + 2 \cdot \lambda_{(r)}(j_1, \dots, j_p) \mid n_1, \dots, n_n \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

Wir interessieren uns für den Eigenwert 0 von $K^{(r)}$, insbesondere für dessen Vielfachheit. Zunächst überlegen wir uns, daß gilt

Proposition 4.6 i) $\lambda_{(r)}(j_1, \dots, j_p) \geq -n$,

ii) $\lambda_{(r)}(j_1, \dots, j_p) = -n \Leftrightarrow \text{Ind}_f(y_{(r)}) = p$ und $I := \{j_1, \dots, j_p\} = K$.

BEWEIS i) $\lambda_{(r)}(j_1, \dots, j_p) \geq -\#(I \cap K) - \#(J \cap L) \geq -k - (n - k) = -n$.

ii) '⇐' Sei $k = p$ und $I := \{j_1, \dots, j_p\} = K$, also ist $J = L$ und damit

$$\lambda_{(r)}(j_1, \dots, j_p) = 0 - k - (n - k) + 0 = -n \quad .$$

'⇒' Sei $\lambda_{(r)}(j_1, \dots, j_p) = -n$, d.h. $J \cap K = \emptyset$ und $I \cap L = \emptyset$, zu zeigen ist zunächst $I = K$

$$\begin{aligned} I \cap K &= (I \cap K) \cup (J \cap K) && , J \cap K = \emptyset \\ &= (I \cup J) \cap K \\ &= (K \cup L) \cap K && , I \cup J = K \cup L = \{1, \dots, n\} \\ &= K \cup (L \cap K) \\ &= K \end{aligned}$$

⇒ $K \subset I$.

$$\begin{aligned} J \cap L &= (I \cap L) \cup (J \cap L) && , I \cap L = \emptyset \\ &= (I \cup J) \cap L \\ &= (K \cup L) \cap L && , I \cup J = K \cup L = \{1, \dots, n\} \\ &= (K \cap L) \cup L \\ &= L \end{aligned}$$

⇒ $L \subset J$ ⇒ $J^c \subset L^c$ ⇒ $I \subset K$, da $J^c = I$, $L^c = K$.

Also ist gezeigt $\{j_1, \dots, j_p\} =: I = K := \{1, \dots, k\}$, also gilt $p = k := \text{Ind}_f(y_{(r)})$. □

Mit der Zusatzannahme $n_1, \dots, n_n = 0$ erhalten wir im Fall von Proposition 4.6 ii) den Eigenwert

$$(4.16) \quad \sum_{i=1}^n 2 + 2 \cdot (-n) = 2n - 2n = 0 \quad .$$

In jedem anderen Fall ergibt sich ein Eigenwert größer Null. Also gelten

i) **Lemma 4.7** $\dim \text{Ker } K^{(r)} |_{\Lambda^p(M)} = \begin{cases} 1 & , p = \text{Ind}_f(y_{(r)}) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

ii) $\dim \text{Ker } \bigoplus_r K^{(r)} |_{\Lambda^p(M)} = c_p \quad .$

Nun wenden wir das Theorem 3.3 über den quasiklassischen Limes von L_t an. Dieses gilt nach [Ch, App. Se. 3] auch für unseren Fall des Operators L_t definiert auf $D(L_t) \subset \bar{\Lambda}^p(M)$, dem Abschluß der p -Formen auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit M bezüglich des L^2 -inneren Produkts aus Lemma 1.6.

Seien also e_n^p die Eigenwerte von $\bigoplus_r K^{(r)}|_{\Lambda^p(M)}$ und $E_n^p(t)$ jene von $L_t|_{D(L_t) \subset \bar{\Lambda}^p(M)}$, jeweils gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit und geordnet nach aufsteigendem Wert. Dann ist

$$(4.17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_n^p(t)}{t} = e_n^p \quad .$$

Hieraus folgt, daß für große t nicht mehr $E_n^p(t)$ gleich Null sein können, als e_n^p gleich Null sind, damit gilt

Theorem 4.8 (schwache Morse-Ungleichungen) $c_p \geq b_p$, $p = 0, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \text{BEWEIS} \quad b_p &= \dim \text{Ker } L_t|_{\Lambda^p(M)} && , \text{ Theorem 2.27} \\ &= \# \{E_n^p(t) = 0\} && , \text{ Def. von } E_n^p(t) \\ &\leq \# \{e_n^p = 0\} && , \text{ aus (4.17)} \\ &= \dim \text{Ker}(\bigoplus_r K^{(r)}|_{\Lambda^p(M)}) && , \text{ Def. von } e_n^p \\ &= c_p && , \text{ Lemma 4.7 ii)} \end{aligned}$$

□

Es ist $e_{c_p+1}^p$ der erste Eigenwert von $\bigoplus_r K^{(r)}|_{\Lambda^p(M)}$ ungleich Null. Für großes t wächst daher $E_n^p(t)$ wie t für $n \geq c_p + 1$. Von den restlichen Eigenwerten $\{E_1^p(t), \dots, E_{c_p}^p(t)\}$ wissen wir, daß die ersten b_p Null sind. Wir nennen

$$(4.18) \quad \{E_{b_p+1}^p(t), \dots, E_{c_p}^p(t)\}$$

die **tiefliegenden Eigenwerte**.

2.5 Supersymmetrie

Definition 5.1 [CFKS, Abschn. 6.3] Sei \mathfrak{H} ein Hilbertraum und H, Q seien selbstadjungierte Operatoren auf \mathfrak{H} . P sei ein selbstadjungierter beschränkter Operator auf \mathfrak{H} . Wir sagen das System (H, Q, P) besitze **Supersymmetrie**, falls gilt

- i) $H = Q^2 \geq 0$,
- ii) $P^2 = Id$,
- iii) $\{Q, P\} := QP + PQ = 0$.

(In Paragraph 1.3 hatten wir P mit $(-1)^{N_F}$ bezeichnet.) Aus $P^2 = Id$ und der Selbstadjungiertheit von P folgt

$$(5.1) \quad \text{Spec } P = \{+1, -1\} \quad .$$

Die zugehörigen Eigenräume bezeichnen wir mit

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathfrak{H}_f &:= \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid P\varphi = -\varphi\} \quad , \\ \mathfrak{H}_b &:= \{\varphi \in \mathfrak{H} \mid P\varphi = \varphi\} \quad , \end{aligned}$$

wir erhalten die Zerlegung

$$(5.3) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_f \oplus \mathfrak{H}_b \quad , \quad P = \begin{bmatrix} -Id_f & 0 \\ 0 & Id_b \end{bmatrix} \quad .$$

Die Elemente von \mathfrak{H}_f nennen wir **fermionische Zustände**, jene von \mathfrak{H}_b **bosonische Zustände**. Wir bezeichnen im folgenden Id_f und Id_b der Einfachheit halber mit 1. Aus

$$0 = \{Q, P\} = QP + PQ = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2A & 0 \\ 0 & 2D \end{bmatrix}$$

folgt $A = 0$ und $D = 0$, d.h.

$$(5.4) \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Q^* = \begin{bmatrix} 0 & C^* \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

die Selbstadjungiertheit von Q liefert dann $C = B^*$, d.h.

$$(5.5) \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Es gelten offenbar

$$(5.6) \quad \begin{aligned} B &: \mathfrak{H}_b \rightarrow \mathfrak{H}_f \quad , \\ B^* &: \mathfrak{H}_f \rightarrow \mathfrak{H}_b \quad , \\ Q &: \mathfrak{H}_b \rightarrow \mathfrak{H}_f \quad , \\ Q &: \mathfrak{H}_f \rightarrow \mathfrak{H}_b \quad , \end{aligned}$$

d.h. Q macht aus fermionischen Zuständen bosonische und umgekehrt. Aus i) und (5.5) erhalten wir

$$(5.7) \quad H = Q^2 = \begin{bmatrix} BB^* & 0 \\ 0 & B^*B \end{bmatrix} \quad ,$$

wir sehen, daß \mathfrak{H}_f und \mathfrak{H}_b invariant unter H sind, sowie daß gilt

$$(5.8) \quad [P, H] = 0 \quad .$$

Die (zunächst formal definierte) Größe

$$(5.9) \quad \text{Ind}_{sup}(H) := \dim \text{Ker}(H |_{\mathfrak{H}_b}) - \dim \text{Ker}(H |_{\mathfrak{H}_f})$$

heißt **supersymmetrischer Index von H** .

Das nächste Theorem besagt, daß zu nichtverschwindenden Eigenwerten von H dieselbe Anzahl von bosonischen und fermionischen Eigenfunktionen existiert.

Theorem 5.2 [CFKS, Thm. 6.3] *Das System (H, P, Q) besitze Supersymmetrie, dann gilt für jede beschränkte offene Menge $\Omega \subset (0, \infty)$*

$$\dim (E_\Omega(H)\mathfrak{H}_b) = \dim (E_\Omega(H)\mathfrak{H}_f) \quad ,$$

wobei $E_\Omega(H)$ den **Spektralprojektor von H auf Ω** bezeichnet.

BEWEIS Mit P^\pm seien die Spektralprojektoren von P auf \mathfrak{H}_b bzw. \mathfrak{H}_f bezeichnet, d.h.

$$(5.10) \quad P^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad P = P^+ - P^- \quad , \quad Id = P^+ + P^- .$$

Weiter seien

$$(5.11) \quad E_\Omega^\pm(H) := E_\Omega(H)P^\pm \quad .$$

Die Vertauschbarkeit von P und H (5.8) ist per definitionem [RSI, Se. VIII.5] äquivalent zur Vertauschbarkeit aller Spektralprojektoren von P und H , insbesondere gilt also

$$(5.12) \quad [E_\Omega(H), P^+] = 0 \quad \text{und} \quad [E_\Omega(H), P^-] = 0 \quad .$$

Hieraus folgt durch Addition

$$[E_\Omega(H), P] = 0 \quad .$$

Da $\Omega \subset (0, \infty)$ als beschränkt vorausgesetzt wurde, ist $\hat{H} := H|_{E_\Omega(H)\mathfrak{K}}$ ein beschränkter Operator und, wegen $Q^2 = H$, ist auch $\hat{Q} := Q|_{E_\Omega(H)\mathfrak{K}}$ beschränkt. Aus $\hat{Q}^2 = \hat{H}$ ergibt sich

$$(5.13) \quad [\hat{Q}, \hat{H}] = 0 \quad .$$

Nun liefert [RSI, Thm. VII.2 g) spectral theorem - functional calculus form] die Existenz eines *-Homomorphismus $\hat{\phi}: \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(E_\Omega(H)\mathfrak{K})$, $f \mapsto \hat{\phi}(f)$, wobei $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die beschränkten Borelfunktionen auf \mathbb{R} und $\mathcal{L}(E_\Omega(H)\mathfrak{K})$ die beschränkten linearen Operatoren auf $E_\Omega(H)\mathfrak{K}$ bezeichnet. Weiter gilt $\hat{\phi}(f) = \hat{H}$ und

$$(5.14) \quad [\hat{Q}, \hat{H}] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{Q}, \hat{\phi}(f)] = 0 \quad .$$

Sei $f(x) = \chi_\Omega(x)$, dann ist $\hat{\phi}(f) = \hat{\phi}(\chi_\Omega) = E_\Omega(\hat{H})$, also

$$(5.15) \quad [\hat{Q}, E_\Omega(\hat{H})] = 0 \quad ,$$

das heißt

$$(5.16) \quad [Q, E_\Omega(H)]|_{E_\Omega(H)\mathfrak{K}} = 0 \quad .$$

Weiterhin benötigen wir die Resultate

$$(5.17) \quad \begin{aligned} QP^+ &= \begin{bmatrix} 0 & B^* \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B^* \\ B & 0 \end{bmatrix} = P^-Q \quad , \\ QP^- &= \begin{bmatrix} 0 & B^* \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B^* \\ B & 0 \end{bmatrix} = P^+Q \quad . \end{aligned}$$

Nun gilt auf $E_\Omega(H)\mathfrak{K}$

$$(5.18) \quad \begin{aligned} QE_\Omega^\pm(H) &= QE_\Omega(H)P^\pm & , (5.11) \\ &= QP^\pm E_\Omega(H) & , (5.12) \\ &= P^\mp QE_\Omega(H) & , (5.17) \\ &= P^\mp E_\Omega(H)Q & , (5.16) \\ &= E_\Omega(H)P^\mp Q & , (5.12) \\ &= E_\Omega^\mp(H)Q & , (5.11) . \end{aligned}$$

Wegen $0 \notin \Omega$ ist Q invertierbar auf $E_\Omega(H)\mathfrak{K}$ und aus (5.18) ergibt sich auf $E_\Omega(H)\mathfrak{K}$

$$(5.19) \quad E_{\Omega}^{\pm}(H) = Q^{-1} E_{\Omega}^{\mp}(H) Q \quad ,$$

woraus folgt

$$(5.20) \quad \dim \operatorname{Ran} E_{\Omega}^{\pm}(H) = \dim \operatorname{Ran} E_{\Omega}^{\mp}(H) \quad .$$

Nun ist

$$(5.21) \quad \dim \operatorname{Ran} E_{\Omega}^{+}(H) = \dim (E_{\Omega}(H) P^{+} \mathfrak{H}) = \dim (E_{\Omega}(H) \mathfrak{H}_b)$$

und analog

$$(5.22) \quad \dim \operatorname{Ran} E_{\Omega}^{-}(H) = \dim (E_{\Omega}(H) \mathfrak{H}_f) \quad .$$

Also gilt

$$(5.23) \quad \dim (E_{\Omega}(H) \mathfrak{H}_b) = \dim (E_{\Omega}(H) \mathfrak{H}_f) \quad . \quad \square$$

Beispiel 5.3 Sei M^n wie zuvor eine glatte geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n , weiter seien

$$(5.24) \quad \mathfrak{H} := \bigoplus_{p=0}^n \bar{\Delta}^p(M) \quad , \text{ siehe Paragraph 2.1} \quad ,$$

$$(5.25) \quad L := \overline{d^*d + dd^*} : D(L) \subset \bar{\Delta}^p(M) \rightarrow \bar{\Delta}^p(M) \quad , \text{ siehe Def. 1.19} \quad .$$

Nach Thm. 1.20 ist L selbstadjungiert

$$(5.26) \quad \begin{aligned} L &= L^{*(1.38)} (\bar{\Delta})^* && , \\ &= \overline{(d^*d + dd^*)^*} && , \\ &= (d^*d + dd^*)^* && ,^2 \\ &= d^{**}d^* + d^*d^{**} && , \\ &= \bar{d}d^* + d^*\bar{d} && ,^3 \\ &= (\bar{d} + d^*)^2 && , \text{ Prop. 1.18} \\ &=: Q^2 : D(L) \subset \bar{\Delta}^p(M) \rightarrow \mathfrak{H} && . \end{aligned}$$

Es ist

$$(5.27) \quad \begin{aligned} Q &= \bar{d} + d^* && , \text{ per def. (5.26)} \\ &= d^{**} + (\bar{d})^* && , [\text{RSI, Thm. VIII.1 b), c)] \\ &= (d^* + \bar{d})^* && , \text{ * linearer Operator} \\ &= Q^* && . \end{aligned}$$

² Δ abschließbar $\Rightarrow (\bar{\Delta})^* = \Delta^*$ [RSI, Thm. VIII.1 c)]

³ d abschließbar $\Rightarrow \bar{d} = d^{**}$ [RSI, Thm. VIII.1 b)]

Nach Theorem 1.20 ist $L = L^*$ und nach Proposition 1.21 ist $L \geq 0$, damit ist also i) in Definition 5.1 erfüllt. Mit

$$(5.28) \quad P := (-1)^p \cdot Id : \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M)$$

gilt

$$(5.29) \quad P^2 = (-1)^{2p} \cdot Id = Id : \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M) \quad ,$$

also $Spec P = \{\pm 1\}$, d.h. P ist beschränkt und somit ist ii) in Definition 5.1 erfüllt. Die Aussage iii) sehen wir wie folgt ein: Sei oBdA $\psi \in \Lambda^p(M)$ (siehe Prop. 1.17), dann gilt

$$(5.30) \quad \begin{aligned} \{Q, P\}\psi &= QP\psi + PQ\psi & , \\ &= (-1)^p Q\psi + P(Q\psi) & , (5.28) \\ &= (-1)^p Q\psi + P(d^*\psi + d\psi) & , \psi \in \Lambda^p(M) \\ &= (-1)^p Q\psi + P(\psi_1 + \psi_2) & , \psi_1 := d^*\psi \in \Lambda^{p-1}(M) \\ & & , \psi_2 := d\psi \in \Lambda^{p+1}(M) \\ &= (-1)^p Q\psi + (-1)^{p-1}\psi_1 + (-1)^{p+1}\psi_2 \\ &= (-1)^p Q\psi + (-1)^{p+1}(\psi_1 + \psi_2) & , (-1)^{p-1} = (-1)^{p+1} \\ &= (-1)^p Q\psi + (-1)^{p+1}Q\psi = 0 & , \text{ QED .} \end{aligned}$$

Es wurde also gezeigt

Proposition 5.4 *Das System (L, P, Q) besitzt Supersymmetrie.*

Beispiel 5.5 Seien M^n , \mathfrak{K} und P wie in Beispiel 5.1, weiter sei

$$(5.31) \quad L_t := \overline{d_t d_t^* + d_t^* d_t} : D(L) \subset \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \bar{\Lambda}^p(M) \quad .$$

Wie zuvor ergeben sich

$$(5.32) \quad L_t = Q_t^2 \geq 0 \quad \text{mit} \quad Q_t = \overline{d_t + d_t^*} = \bar{d}_t + d_t^* : D(L) \subset \bar{\Lambda}^p(M) \rightarrow \mathfrak{K}$$

$$(5.33) \quad P^2 = Id \quad \text{und} \quad \{Q_t, P\} = 0 \quad ,$$

L_t und Q_t sind selbstadjungiert, P ist selbstadjungiert und beschränkt. Damit gilt die

Proposition 5.6 *Das System (L_t, P, Q_t) besitzt Supersymmetrie.*

Wir benutzen nun dieselbe Notation wie in Paragraph 2.4. Sei $c_p \neq b_p$ für mindestens ein p aus $\{0, \dots, n\}$; sonst wären die starken Morse-Ungleichungen trivialerweise erfüllt. Sei

$$(5.34) \quad E \in \{ E_{b_{p+1}}^p(t), \dots, E_c^p(t) \} \quad ,$$

d.h. E ist ein tiefliegender Eigenwert von L_t (und insbesondere $E \neq 0$). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^+$ ein Intervall um E , das keine weiteren Eigenwerte von L_t enthalte. (Es sei daran erinnert, daß $Spec L_t \subset [0, \infty)$ diskret ist. Für L sehen wir dies anhand der Darstellung von L mittels Spektralprojektoren (1.55), für L_t gilt eine analoge Formel). Theorem 5.2 besagt

$$(5.35) \quad \dim (E_\Omega(L_t) \underset{p \text{ ungerade}}{\oplus} \bar{\Lambda}^p(M)) = \dim (E_\Omega(L_t) \underset{p \text{ gerade}}{\oplus} \bar{\Lambda}^p(M)) \quad .$$

Es ist

$$(5.36) \quad \dim (E_\Omega(L_t) \underset{p \text{ ungerade}}{\oplus} \bar{\Lambda}^p(M)) = \dim (\begin{array}{l} \text{Eigenraum von } L_t \text{ zum Eigenwert } E, \\ \text{eingeschränkt auf die ungeraden Anteile} \end{array})$$

$$= \sum_{p \text{ ungerade}} \dim Ker ((L_t - E \cdot Id) |_{D(L_t) \subset \bar{\Lambda}^p(M)})$$

und analog für p gerade.

Gleichung (5.35) liefert also für jeden tiefliegenden Eigenwert E

$$(5.37) \quad \sum_{p \text{ ungerade}} \dim Ker((L_t - E \cdot Id) |_{D(L_t) \subset \bar{\Lambda}^p(M)}) = \sum_{p \text{ gerade}} \dim Ker((L_t - E \cdot Id) |_{D(L_t) \subset \bar{\Lambda}^p(M)}) .$$

In Worten heißt das: Die tiefliegenden Eigenwerte von L_t treten in Paaren (p gerade, p ungerade) auf, d.h. zu jedem tiefliegenden Eigenwert $E_k^p(t)$ mit p gerade gehört ein $E_{k'}^{p'}(t)$ mit p' ungerade und es ist

$$(5.38) \quad E_k^p(t) = E_{k'}^{p'}(t) \quad .$$

Die tiefliegenden Eigenwerte von L_t sind also in (**Super-**) **Multipletts** gleichen Betrags angeordnet, wobei die einzelnen Multipletts eine gerade Anzahl von tiefliegenden Eigenwerten enthalten.

2.6 Beweis der starken Morse-Ungleichungen

Die Anzahl der geraden tiefliegenden Eigenwerte (in (4.18) definiert) ist gegeben durch

$$(6.1) \quad \sum_{p \text{ ger}} (c_p - b_p) \quad ,$$

die der ungeraden durch

$$(6.2) \quad \sum_{p \text{ unger}} (c_p - b_p) \quad .$$

Aufgrund der Paarungen (p gerade, p ungerade) der tiefliegenden Eigenwerte (siehe (5.38)) gilt

$$(6.3) \quad \sum_{p \text{ ger}} (c_p - b_p) = \sum_{p \text{ unger}} (c_p - b_p) \quad .$$

Hieraus folgern wir

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \sum_{p=0}^n (-1)^p c_p &= \sum_{p=0}^n (-1)^p c_p - \sum_{p \text{ ger}} (c_p - b_p) + \sum_{p \text{ unger}} (c_p - b_p) \quad , (6.3) \\ &= \sum_{p \text{ ger}} c_p - \sum_{p \text{ unger}} c_p - \sum_{p \text{ ger}} c_p + \sum_{p \text{ ger}} b_p + \sum_{p \text{ unger}} c_p - \sum_{p \text{ unger}} b_p \\ &= \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p \quad . \end{aligned}$$

Dies beweist das Theorem 1.2.2 ii).

Sei $\Xi_t^p \subset \bar{\Lambda}^p(M)$ der $(c_p - b_p)$ -dimensionale **Eigenraum** der tiefliegenden Eigenwerte $\{E_{b_{p+1}}^p(t), \dots, E_{c_p}^p(t)\}$. Wie in (5.32) sei $Q_t := \bar{d}_t + d_t^*$ mit $D(Q_t) = D(L) \subset \bigoplus_{p=0}^n \bar{\Lambda}^p(M)$.

Proposition 6.1 $Q_t^2 = L_t \Rightarrow Q_t$ erhält die Eigenräume von L_t .

BEWEIS Sei ξ Eigenvektor von L_t zum Eigenwert λ , d.h. $L_t \xi = \lambda \xi$, dann ist zu zeigen: $Q_t \xi$ ist Eigenvektor von L_t zum selben Eigenwert λ

$$L_t(Q_t \xi)(Q_t Q_t) Q_t \xi = Q_t L_t \xi = Q_t(\lambda \xi) = \lambda(Q_t \xi) \quad . \quad \square$$

Da die Eigenwerte $E_\nu^p(t)$ von L_t mit $\nu > c_p$ nach (4.17) stärker in t anwachsen als die tiefliegenden Eigenwerte, gilt

$$E_\nu^p(t) > E_\mu^p(t) \quad , \quad \forall \nu, \mu \text{ mit } \nu > c_p, b_{p+1} \leq \mu \leq c_p, t \gg 1 \quad .$$

Damit gilt

$$(6.5) \quad Q_t : \Xi_t^p \rightarrow \Xi_t^{p-1} \oplus \Xi_t^{p+1} \quad .$$

Proposition 6.2 $\text{Ker } Q_t = \text{Ker } L_t$.

BEWEIS ' \subset ' Sei $\xi \in \text{Ker } Q_t$, dann ist $L_t \xi = Q_t Q_t \xi = 0$.

' \supset ' Sei $\xi \in \text{Ker } L_t$, dann gilt (oBdA nehmen wir an $\xi \in D(L_t) \cap \bar{\Lambda}^p(M)$)

$$0 = \langle \xi, L_t \xi \rangle^p = \langle \xi, Q_t Q_t \xi \rangle^p = \langle Q_t^* \xi, Q_t \xi \rangle^p = \langle Q_t \xi, Q_t \xi \rangle^p \quad ,$$

woraus mit der Selbstadjungiertheit von Q_t , sowie der Nichtdegeneriertheit des inneren Produkts folgt $\xi \in \text{Ker } Q_t$. \square

Es folgt aus $\dim \text{Ker}(L_t |_{\Lambda^p(M)}) = b_p$ (Thm. 2.27), daß gilt $\text{Ker}(L_t |_{\Xi_t^p}) = \{0\}$, also folgt mit Proposition 6.2: Q_t ist auf $\bigoplus_{p=0}^n \Xi_t^p$ injektiv. Folgende Abbildungen sind also ebenfalls injektiv

$$(6.6) \quad Q_t : \begin{array}{c} 2j-1 \\ \oplus \\ l=1 \\ \text{ung} \end{array} \Xi_t^l \rightarrow \begin{array}{c} 2j \\ \oplus \\ l=0 \\ \text{ger} \end{array} \Xi_t^l \quad , \quad j \in \mathbb{N} \quad ,$$

$$Q_t : \begin{array}{c} 2j \\ \oplus \\ l=0 \\ \text{ger} \end{array} \Xi_t^l \rightarrow \begin{array}{c} 2j+1 \\ \oplus \\ l=1 \\ \text{ung} \end{array} \Xi_t^l \quad , \quad j \in \mathbb{N} \quad ,$$

hieraus folgern wir, daß die Dimensionen der beiden Räume auf der rechten Seite nicht kleiner sind, als jene des entsprechenden Raumes der linken Seite. Es ergeben sich also

$$(6.7) \quad \begin{aligned} (c_1 - b_1) + \dots + (c_{2j-1} - b_{2j-1}) &\leq (c_0 - b_0) + \dots + (c_{2j} - b_{2j}) \quad , \\ (c_0 - b_0) + \dots + (c_{2j} - b_{2j}) &\leq (c_1 - b_1) + \dots + (c_{2j+1} - b_{2j+1}) \quad . \end{aligned}$$

Anders geschrieben

$$(6.8) \quad \begin{aligned} b_0 - b_1 + b_2 - \dots - b_{2j-1} + b_{2j} &\leq c_0 - c_1 + \dots - c_{2j-1} + c_{2j} \quad , \\ -b_0 + b_1 - b_2 + \dots - b_{2j} + b_{2j+1} &\leq -c_0 + c_1 - \dots - c_{2j} + c_{2j+1} \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind äquivalent zu

$$(6.9) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} b_k \leq \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} c_k \quad , \quad 0 \leq m \leq n \quad ,$$

was zu zeigen war.

Bemerkung 6.3 Der supersymmetrische Index von L_t (5.9) ergibt sich hier zu

$$\begin{aligned}
(6.10) \quad \text{Ind}_{sup}(L_t) &= \dim \text{Ker}(L_t |_{\bigoplus_{\text{p ger}} \bar{\Lambda}^p(M)}) - \dim \text{Ker}(L_t |_{\bigoplus_{\text{p ung}} \bar{\Lambda}^p(M)}) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k \\
&= \chi(M) \quad .
\end{aligned}$$

$\chi(M)$ ist die **Eulercharakteristik** der Mannigfaltigkeit M . Sie hängt von der Topologie von M ab. Wir sehen also, daß $\text{Ind}_{sup}(L_t)$ gar nicht von L_t abhängt, insbesondere nicht von der zur Konstruktion von L_t verwendeten Morse-Funktion f , sondern lediglich von der Topologie von M . (Weiter läßt sich zeigen, daß $\text{Ind}_{sup}(L_t)$ gleich dem Index von d bzw. d_t ist, siehe (1.3.13)).

Kapitel 3

Der Morse-Witten Komplex

Sei (M^n, g) eine n -dimensionale, glatte, kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine Morse-Funktion. Die Lösungen des Anfangswertproblems der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(0.1) \quad \dot{\gamma}(t) = -\nabla f(\gamma(t)) \quad , \quad \gamma(0) = p \quad ,$$

definieren durch $\phi_t p := \gamma(t)$ eine einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen $\phi_t: M \rightarrow M$, genannt der **negative Gradientenfluß**.

Definition und Satz 0.1

i) **Crit** $f := \{x \in M \mid df(x) = 0\}$

Crit $_k f := \{x \in \text{Crit } f \mid \text{Ind}_f(x) = k\}$

$c_k := \#\text{Crit}_k f$

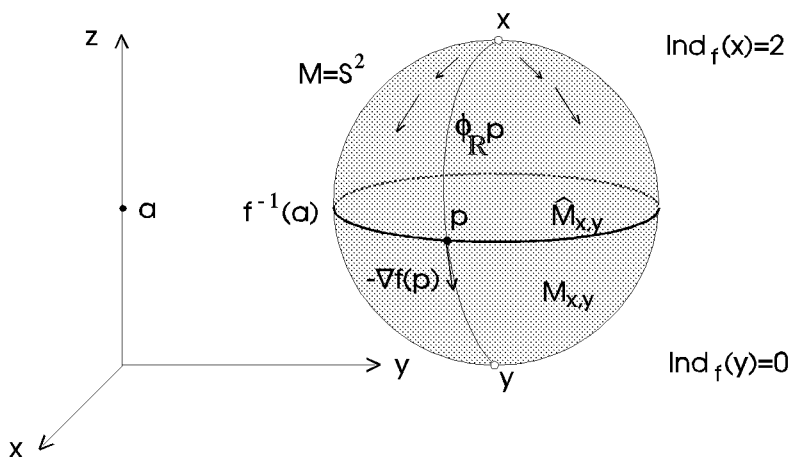
ii) Sei $x \in \text{Crit } f$, dann heißt $\mathbf{W}^s(x) := \{p \in M \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi_t p = x\}$ **stabile** bzw. **instabile Mannigfaltigkeit von x** (im Fall eines Gradientenflusses ist $\mathbf{W}^{u(s)}(x)$ eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $\text{Ind}_f(x)$ bzw. $n - \text{Ind}_f(x)$ [We, Lemma 1.3.9]).

iii) Seien V^a, W^b Untermannigfaltigkeiten von M^n . Wir sagen V und W schneiden sich **transversal**, falls $\forall p \in V \cap W$ gilt $T_p V + T_p W = T_p M$. In diesem Fall ist $V \cap W$ eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $a + b - n$ [H, Ch. 3].

Wir sagen das Tupel (f, g) erfüllt die **Morse-Smale Bedingung**, falls für den negativen Gradientenfluß bezüglich (f, g) gilt: $\mathbf{W}^u(x)$ und $\mathbf{W}^s(y)$ schneiden sich transversal $\forall x, y \in \text{Crit } f$.

- iv) Seien $x, y \in \text{Crit } f$ und $W^u(x)$ und $W^s(y)$ schneiden sich transversal, dann heißt $\mathcal{M}(x, y) := W^u(x) \cap W^s(y)$ die **x mit y verbindende Mannigfaltigkeit**. Sie ist nach iii) eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y)$.
- v) Sei $f(y) < a < f(x)$ ein **regulärer Wert** von f (d.h. $\forall p \in f^{-1}(a)$ gilt $df(p) \neq 0$), dann heißt $\hat{\mathcal{M}}(x, y) := \mathcal{M}(x, y) \cap f^{-1}(a)$ **Orbitraum von x und y** . Dieser ist eine Untermannigfaltigkeit von M der Dimension $\dim \mathcal{M}(x, y) - 1$ [We, Gl. (2.1.28)]. Im Fall von $\dim \hat{\mathcal{M}}(x, y) = 0$ heißen die Elemente von $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ **isolierte Orbits von x nach y** .

Beispiel 0.2 Wir wollen die eben definierten Begriffe für $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ veranschaulichen. g sei die vom \mathbb{R}^3 auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ induzierte Metrik, $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $(x, y, z) \mapsto z$



Figur 0.1

DER MORSE-WITTEN KETTENKOMPLEX

Wir nehmen im folgenden an, daß (f, g) die Morse-Smale Bedingung erfüllt. Die Gruppen

$$(0.2) \quad C_k(f, g) := \bigoplus_{x \in \text{Crit}_k f} \mathbb{Z}_2 \langle x \rangle, \quad k \in \{0, \dots, n\}, \quad C_k(f, g) := 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n\},$$

heißen **k -te Kettengruppen**. Sie sind per definitionem von den Elementen von $\text{Crit}_k f$ frei abelsch erzeugt, $\langle x \rangle$ bezeichnet einen Erzeuger. Beachte: Die $C_k(f, g)$ sind endlich erzeugt, denn aus der Kompaktheit von M und der Stetigkeit von f folgt $\#\text{Crit } f < \infty$ [We, Prop. 1.2.5]. Da wir zunächst nur Koeffizienten in \mathbb{Z}_2 zulassen,

können wir die Forderung der Orientierbarkeit von M an dieser Stelle streichen.

Seien nun $x, y \in \text{Crit } f$ mit $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) = 1$, also ist $\dim \hat{\mathcal{M}}(x, y) = 0$ und wir definieren

$$(0.3) \quad n_2(x, y) := \# \hat{\mathcal{M}}(x, y) \pmod{2} \quad .$$

Weiter definieren wir einen Gruppenhomomorphismus durch Fortsetzung von

$$(0.4) \quad \begin{aligned} \partial_{\mathbf{k}} : C_{\mathbf{k}}(f, g) &\rightarrow C_{\mathbf{k}-1}(f, g) \\ \langle x \rangle &\mapsto \sum_{y \in \text{Crit}_{\mathbf{k}-1} f} n_2(x, y) \langle y \rangle \\ \partial_{\mathbf{k}} &:= 0 \quad , \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z} \setminus \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

(d.h. $\partial_{\mathbf{k}}$ zählt die x mit y verbindenden Orbits modulo 2). Die Endlichkeit der Summe hatten wir bereits gezeigt, es bleibt die Endlichkeit von $\# \hat{\mathcal{M}}(x, y)$ in (0.3) zu zeigen, denn sonst ist $n_2(x, y)$ nicht wohldefiniert. Dies geschieht in Paragraph 3.1.

Der Gruppenhomomorphismus $\partial_{\mathbf{k}}$ heißt **Randoperator**, falls $\partial_{\mathbf{k}-1} \circ \partial_{\mathbf{k}} = 0 \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}$. Dies zeigen wir in Paragraph 3.1. $(C_{\mathbf{k}}(f, g), \partial_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}}$ bildet also einen algebraischen Kettenkomplex und wir können seine zugehörigen Homologiegruppen $\mathbf{HM}_{\mathbf{k}}(f, g, \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ definieren als $\text{Ker } \partial_{\mathbf{k}} / \text{Im } \partial_{\mathbf{k}+1}$.

In Paragraph 3.2 zeigen wir die Unabhängigkeit dieser Homologiegruppen von f und g . Dies geschieht mittels einem kanonischen Kettenhomomorphismus $\psi^{\beta\alpha} : C_{\mathbf{k}}(f^\alpha, g^\alpha) \rightarrow C_{\mathbf{k}}(f^\beta, g^\beta)$, der auf Homologieniveau einen Isomorphismus darstellt, d.h. $\mathbf{HM}_{\mathbf{k}}(f^\alpha, g^\alpha, M; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbf{HM}_{\mathbf{k}}(f^\beta, g^\beta, M; \mathbb{Z}_2)$, $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}$. Es genügt daher die Bezeichnung $\mathbf{HM}_{\mathbf{k}}(M; \mathbb{Z}_2)$ für die **Morse-Homologie von M mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_2** . Zur Konstruktion von $\psi^{\beta\alpha}$ betrachten wir einen speziellen Morse-Witten Komplex $(C_{\mathbf{k}}(F, G, \Sigma), \Delta_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}}$ für die Mannigfaltigkeit $M \times S^1$ ($S \simeq [-1, 1] / \{\pm 1\}$). Die Morse-Funktion F , sowie die Metrik G auf $M \times S^1$ definieren wir mittels Homotopien zwischen f^α und f^β bzw. g^α und g^β . Die Einschränkung von F und G auf $M \times 0$ bzw. $M \times 1$ liefert die ursprünglichen Morse-Witten Komplexe $(C_{\mathbf{k}}(f^\alpha, g^\alpha, \sigma^\alpha), \partial_{\mathbf{k}}^\alpha)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}}$ bzw. $(C_{\mathbf{k}}(f^\beta, g^\beta, \sigma^\beta), \partial_{\mathbf{k}}^\beta)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}}$. $\psi^{\beta\alpha} \langle x \rangle$ zählt nun die $\langle (x, 0) \rangle$ mit $\langle (y, 1) \rangle$ verbindenden Orbits bezüglich des negativen Gradientenflusses von F auf $M \times S^1$. Um die Unabhängigkeit des induzierten Homomorphismus $\psi_*^{\beta\alpha}$ von der Wahl der zu seiner Konstruktion gewählten Homotopien zu zeigen, benutzen wir 2-Parameter Homotopien und betrachten einen Morse-Witten Komplex auf $M \times S^1 \times S^1$. Es folgt das Resultat, daß $\psi_*^{\beta\alpha}$ ein Isomorphismus ist.

In Paragraph 3.3 skizzieren wir einen Beweis der Isomorphie von $\mathbf{HM}_{\mathbf{k}}(M; \mathbb{Z}_2)$ und $H_{\mathbf{k}}^{\text{sing}}(M; \mathbb{Z}_2)$, der singulären Homologie von M . Die Idee ist eine zu einer glatten

Triangulierung von M assoziierte Morse-Funktion zu konstruieren und den simplizialen Randoperator zu imitieren.

Bemerkung 0.3 Wir können die Kettengruppen auch mit Koeffizienten in \mathbb{Z} definieren (falls M orientierbar ist): Sei M fest orientiert und $x \in \text{Crit } f$, dann bezeichnen wir mit $\langle x \rangle$ den Erzeuger x zusammen mit einer beliebig aber fest gewählten Orientierung von $E_x^u := T_x W^u(x)$. (Da $W^u(x)$ kontrahierbar ist, ist $TW^u(x)$ ein triviales Vektorbündel und $\langle x \rangle$ induziert daher eine Orientierung von $TW^u(x)$. $\langle x \rangle$ induziert auch eine Orientierung von $T_x W^s(x)$, denn es ist $T_x M = T_x W^u(x) \oplus T_x W^s(x)$, und damit von $TW^s(x)$). σ bezeichne eine Wahl der Orientierung von $E_y^u \forall y \in \text{Crit } f$.

Seien $x, y \in \text{Crit } f$ mit $\text{Ind}_f(x) > \text{Ind}_f(y)$, dann ist $\mathcal{M}(x, y)$ in natürlicher Weise orientiert, denn wir haben die kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln

$$(0.5) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow T\mathcal{M}(x, y) \xrightarrow{i} T_{\mathcal{M}(x, y)} W^u(x) \oplus T_{\mathcal{M}(x, y)} W^s(y) \xrightarrow{j} T_{\mathcal{M}(x, y)} M \rightarrow 0 \\ i : (p, \xi) \mapsto ((p, \xi), (p, -\xi)) \end{aligned}$$

$$j : ((p, \xi), (p, \eta)) \mapsto (p, \xi + \eta)$$

(bis auf $T\mathcal{M}(x, y)$ sind alle vorkommenden Vektorbündel orientiert, also wird nach [Hi, Ch. 4, Lemma 4.1] eine Orientierung von $T\mathcal{M}(x, y)$ induziert). Wir können dies auch folgendermaßen ausdrücken: Aus der Transversalitätsbedingung

$$(0.6) \quad \dim T_p W^u(x) + \dim T_p W^s(y) = \dim T_p M + \dim T_p \mathcal{M}(x, y)$$

ergibt sich ein Isomorphismus

$$(0.7) \quad T_p W^u(x) / T_p \mathcal{M}(x, y) \simeq T_p M / T_p W^s(y)$$

und die Orientierung von $T_p \mathcal{M}(x, y)$ ist jene Orientierung, die obigen Isomorphismus orientierungserhaltend macht. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{M}(x, y)$ sind kontrahierbar und daher ist jede Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}(x, y)$ durch die Orientierung von $T_p \mathcal{M}(x, y)$ orientiert, wobei p ein Element dieser Zusammenhangskomponente sei.

Im Fall $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) = 1$ ist jede Zusammenhangskomponente u_i von $\mathcal{M}(x, y)$ eine 1-dimensionale kontrahierbare Untermannigfaltigkeit von M ; durch den negativen Gradientenfluß wird eine weitere Orientierung auf ihr induziert. Jede Zusammenhangskomponente $u_i \in \mathcal{M}(x, y)$ korrespondiert zu genau einem Element $\hat{u}_i \in \hat{\mathcal{M}}(x, y)$. Wir ordnen nun jedem Orbit $\hat{u}_i \in \hat{\mathcal{M}}(x, y)$ ein **charakteristisches Vorzeichen** $n_{u_i} \in \{\pm 1\}$ durch folgende Bedingung zu: Sei $p \in u_i$, dann gelte

$$[-n_{u_i} \cdot \nabla f(p) \cdot \mathbb{R}] = [T_p \mathcal{M}(x, y)] \quad ,$$

wobei $[\cdot]$ die Orientierung der Vektorräume bezeichne. Die Orientierung der linken Seite ist also durch den negativen Gradientenfluß und das charakteristische Vorzeichen bestimmt, jene der rechten Seite durch (0.7), also letztendlich durch die Wahl σ .

Nun definieren wir

$$(0.8) \quad \mathbf{n}(x, y) := \sum_{\hat{u} \in \mathcal{A}(x, y)} n_{\hat{u}} \in \mathbb{Z} \quad .$$

In den Kettengruppen lassen wir nun Koeffizienten in \mathbb{Z} zu und bezeichnen sie mit $C_{\mathbf{k}}(f, g, \sigma)$. In der Definition von $\partial_{\mathbf{k}}$ (0.4) ersetzen wir $n_2(x, y)$ durch $n(x, y)$.

Bemerkung 0.4 Aus dem in Paragraph 3.3 skizzierten Isomorphismus $HM_{\ast}(M; \mathbb{Z}) \simeq H_{\ast}^{\text{sing}}(M; \mathbb{Z})$ ergeben sich sofort die schwachen Morse-Ungleichungen:

$$(0.9) \quad \begin{aligned} c_{\mathbf{k}} &= \#\{\text{Erzeuger von } C_{\mathbf{k}}(f, g, \sigma)\} \\ &\geq \#\{\text{Erzeuger von } HM_{\mathbf{k}}(M; \mathbb{Z})\} \\ &= \#\{\text{Erzeuger von } HM_{\mathbf{k}}^{\text{sing}}(M; \mathbb{Z})\} \\ &= b_{\mathbf{k}} \quad . \end{aligned}$$

Die starken Morse-Ungleichungen erhalten wir aus Theorem 1.2.4, denn obiger Isomorphismus besagt $b_{\mathbf{k}}(\partial \bullet) = b_{\mathbf{k}}$.

3.1 Der kanonische Randoperator

In diesem Paragraphen geht es darum zu zeigen, daß der zuvor in (0.4) definierte Gruppenhomomorphismus $\partial_k: C_k(f, g, \sigma) \rightarrow C_{k-1}(f, g, \sigma)$ ein Randoperator ist, d.h. daß gilt

Theorem 1.1 [*Mi, Fl1, Sa, Po, Sch, We*] $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Der detaillierte Beweis dieses Theorems ist Inhalt von [We], er orientiert sich am folgenden von A. Floer im Zusammenhang mit der Floer-Homologie aufgestellten Programm [Fl2]

- Transversalität
- Kompaktheit
- Glueing (Verkleben von Orbits).

Bemerkung 1.2 Die Floer-Homologie ist eine unendlich dimensionale Verallgemeinerung der hier betrachteten Morse-Homologie. Die Rolle von M wird vom Schleifenraum ΛM (∞ -dimensional, M ist hier eine symplektische Mannigfaltigkeit mit symplektischer Form ω und $\pi_2(M) = 0$), jene von f vom symplektischen Wirkungsfunktional A_H übernommen

$$A_H: \Lambda M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma \mapsto \int_{D^2} u^* \omega + \int_0^1 H_t(\gamma(t)) dt \quad ,$$

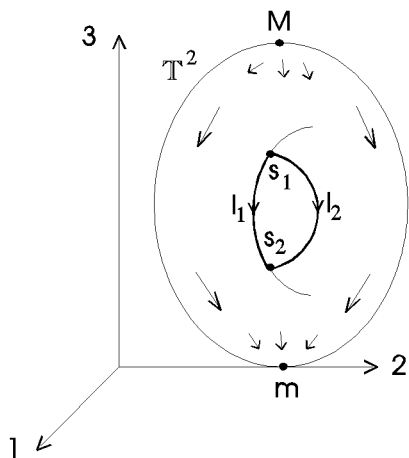
wobei H_t eine Zeit-1-periodische Hamiltonfunktion auf M ist und $u: D^2 \rightarrow M$ eine Fortsetzung von $\gamma: S^1 \rightarrow M$ auf D^2 darstellt. Hierbei wird vorausgesetzt, daß ΛM aus kontrahierbaren Schleifen bestehe. Im Falle der Zeitunabhängigkeit von H_t , sowie einer Nichtdegeneriertheitsbedingung wird $H_t = H$ zu einer Morse-Funktion auf M . Dieser Spezialfall führt auf den Morse-Witten Komplex.

Vor kurzem erweckte die Floer-Theorie das Interesse von theoretischen Physikern, die sich mit String-Theorie beschäftigen, siehe z.B. [Va].

TRANSVERSALITÄT

Die Morse-Smale Bedingung, die für die Wohldefiniertheit von ∂_k notwendig ist, wird im Allgemeinen nicht erfüllt sein:

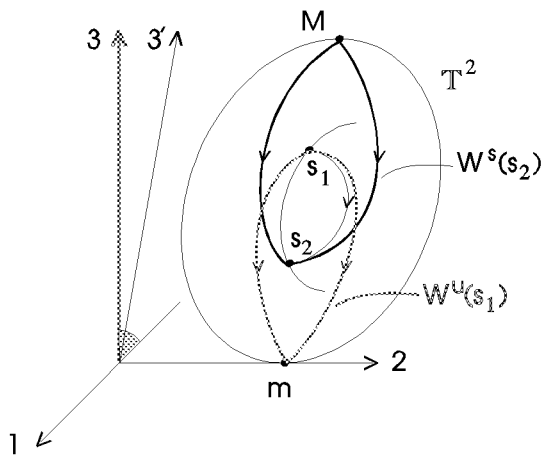
Beispiel 1.3 Wir betrachten noch einmal den Fall des senkrecht in den \mathbb{R}^3 eingebetteten 2-Torus \mathbb{T}^2 mit der durch diese Einbettung induzierten Metrik g , siehe Beispiel 1.2.5. Die Morse-Funktion sei die Höhenfunktion $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto z$. Sie hat vier kritische Punkte M, s_1, s_2, m mit Indizes $2, 1, 1, 0$.



Figur 1.1

Offenbar ist $W^u(s_1) \cap W^s(s_2) = l_1 \cup l_2$, d.h. wir haben zwei s_1 und s_2 verbindende Orbits. Da $W^u(s_1)$ und $W^s(s_2)$ 1-dimensional sind, kann ihr Schnitt nicht transversal sein, d.h. die Morse-Smale Bedingung ist nicht erfüllt.

Durch eine beliebig kleine Störung der Situation in Figur 1.1 können wir jedoch Transversalität erreichen: Wir kippen den Torus ein wenig wie in Figur 1.2 dargestellt.



Figur 1.2

Es gibt nun keine s_1 und s_2 verbindenden Orbits mehr, d.h. die Morse-Smale Bedingung ist nun erfüllt.

Wir können im Allgemeinen durch kleine Störungen einer nichttransversalen Situation eine transversale Situation erreichen. Dies ist die Aussage des folgenden Theorems von Smale, welches sich aus den beiden bekannten Theoremen A und B in [Sm] ergibt.

Theorem 1.4 (Smale) *Die Menge der Vektorfelder, die der Morse-Smale Bedingung genügen, liegen C^1 -dicht in $\mathbf{Grad}^\infty(\mathbf{M})$ der Menge der glatten Gradientenvektorfelder.*

Jede Störung von (f, g) zu (\tilde{f}, \tilde{g}) , so daß $\nabla_{\tilde{g}}\tilde{f}$ C^1 -nahe bei $\nabla_g f$ liegt und der Morse-Smale Bedingung genügt, führt aufgrund der natürlichen Isomorphismen aus Paragraph 3.2 zu isomorphen Morse-Homologiegruppen. Wir gehen daher im folgenden oBdA davon aus, daß die Morse-Smale Bedingung für (f, g) erfüllt sei.

KOMPAKTHEIT

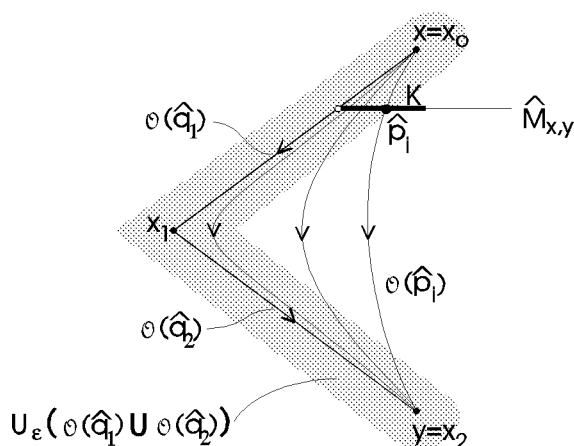
Wir untersuchen nun die Orbiträume $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ auf Kompaktheit. Dies führt im Fall der Indexdifferenz 1 auf $\#\hat{\mathcal{M}}(x, y) < \infty$ und damit zur Wohldefiniertheit von $n_2(x, y)$ (0.3) bzw. $n(x, y)$ (0.8). Jedes Element $\hat{u} \in \hat{\mathcal{M}}(x, y)$ repräsentiert genau einen Orbit von x nach y , weiter sei

$$\begin{aligned} \mathcal{O} : \hat{\mathcal{M}}(x, y) &\rightarrow M \\ \hat{u} &\mapsto u := \mathcal{O}(\hat{u}) := \phi \hat{u} . \end{aligned}$$

Definition 1.5 $K \subset \hat{\mathcal{M}}(x, y)$ heißt **kompakt bis auf $(l-1)$ -fach gebrochene Orbits**, falls für jede Folge $\{\hat{p}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset K$ gilt: **Entweder** besitzt $\{\hat{p}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine (in K) konvergente Teilfolge, **oder** es existieren kritische Punkte $x = x_0, \dots, x_l = y$, $2 \leq l \leq \text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y)$ und x_{j-1} mit x_j verbindende Orbits $\hat{q}_j \in \hat{\mathcal{M}}(x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \dots, l$, so daß $\hat{p}_i \rightarrow (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l)$ für $i \rightarrow \infty$. Die Morse-Smale Bedingung liefert $\text{Ind}_f(x_0) > \dots > \text{Ind}_f(x_l)$, insbesondere also $l \in \text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y)$. Die vorige Konvergenz ist folgendermaßen definiert

$$\forall \epsilon > 0 \exists I \in \mathbb{N} \forall i > I : \mathcal{O}(\hat{p}_i) \subset U_\epsilon(\overline{\cup_{j=1}^l \mathcal{O}(\hat{q}_j)}) .$$

Im Fall der Indextdifferenz 2 können wir uns die Situation so veranschaulichen

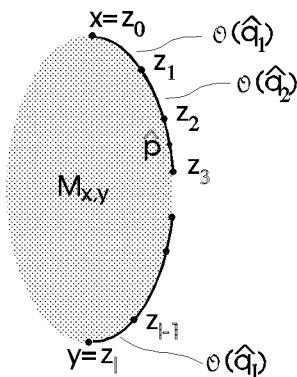


Figur 1.3

Theorem 1.6 [We, Thm. 2.2.1] $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ ist kompakt bis auf gebrochene Orbits der Ordnung l , $l \in \{1, \dots, \text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y)\}$ geeignet.

Korollar 1.7 Im Fall $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) = 1$ gilt $\#\hat{\mathcal{M}}(x, y) < \infty$.

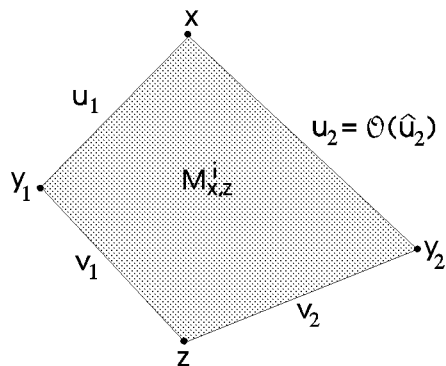
BEWEISIDEE Einerseits folgt die Aussage aus Theorem 1.6, Definition 1.5 (es trifft der 'Entweder'-Fall zu) und der Kompaktheit von M . Andererseits können wir sie auch so motivieren (das ist auch die Beweisidee für Theorem 1.6): Es ist $\dim \hat{\mathcal{M}}(x, y) = 0$, also ist $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ eine diskrete Punktmenge. Angenommen $\#\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ ist unendlich, dann besitzt $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ aufgrund der Kompaktheit von M einen Häufungspunkt \hat{p} . Es bleibt zu zeigen $\hat{p} \in \hat{\mathcal{M}}(x, y)$ und wir haben einen Widerspruch zur Diskrettheit der Elemente von $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ (denn $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ ist ja eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M). Im Fall eines Gradientenflusses verbindet der Orbit durch \hat{p} $\mathcal{O}(\hat{p}) =: p$ zwei kritische Punkte von f , welche im Abschluß von $\hat{\mathcal{M}}(x, y)$ liegen. Wie in [We, Abschn. 2.2] detailliert ausgeführt, folgern wir die Existenz von weiteren kritischen Punkten z_0, \dots, z_l und verbindenden Orbits $\hat{q}_j \in \hat{\mathcal{M}}(x_j, x_{j-1})$, $j = 1, \dots, l$. Es muß gelten $z_0 = x, \dots, z_l = y$ und aus $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) = 1$ folgt nun $l = 1$, d.h. $\hat{p} \in \hat{\mathcal{M}}(x, y)$.



Figur 1.4 □

GLUEING (VERKLEBEN VON ORBITS)

Wir betrachten im folgenden den Fall $Ind_f(x) - Ind_f(z) = 2$, d.h. $\mathcal{M}(x, z)$ besteht aus 2-dimensionalen und $\hat{\mathcal{M}}(x, z)$ aus 1-dimensionalen Zusammenhangskomponenten. Letztere, $\hat{\mathcal{M}}^i(x, z)$ genannt, sind aufgrund der Klassifikation von 1-dimensionalen unberandeten glatten Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu $(0, 1)$ oder S^1 . Im Fall $\hat{\mathcal{M}}^i(x, z) \simeq (0, 1)$ wissen wir aufgrund von Theorem 1.6, daß die beiden Enden 1-fach gebrochenen Orbits (u_1, v_1) und (u_2, v_2) entsprechen.



Figur 1.5

Das folgende Theorem wurde detailliert in [We, Abschn. 2.3] bewiesen. Der Beweis ist recht technisch, für das Folgende nicht von Bedeutung und soll deshalb hier nicht wiederholt werden.

Theorem 1.8 (Verkleben von Orbits) Sei $Ind_f(x) - Ind_f(z) = 2$ und $y \in Crit f$ so daß $\hat{\mathcal{M}}(x, y) \neq \emptyset$ und $\hat{\mathcal{M}}(y, z) \neq \emptyset$, dann existiert $\rho \in \mathbb{R}^+$ und eine Einbettung

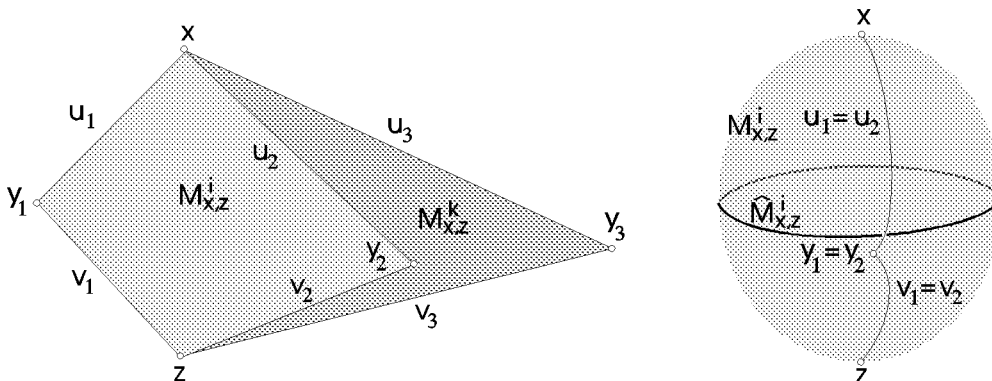
$$\cdot \hat{\#} \cdot \cdot : \hat{\mathcal{M}}(x, y) \times (0, \rho) \times \hat{\mathcal{M}}(y, z) \rightarrow \hat{\mathcal{M}}(x, z) \quad .$$

Für festes $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{\mathcal{M}}(x, y) \times \hat{\mathcal{M}}(y, z)$ gibt es genau eine Zusammenhangskomponente $\hat{\mathcal{M}}^i(x, z)$ mit $\hat{u} \hat{\#}_s \hat{v} \in \hat{\mathcal{M}}^i(x, z)$, $s \in (0, \rho)$, und

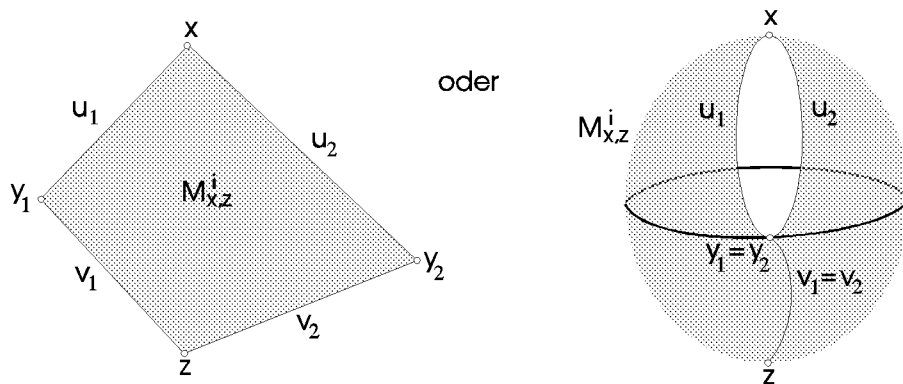
$$\hat{u} \hat{\#}_s \hat{v} \rightarrow (\hat{u}, \hat{v}) \quad \text{für } s \rightarrow \infty$$

im Sinne von Definition 1.5. Es gibt **keine** andere Zusammenhangskomponente $\hat{\mathcal{M}}^j(x, z)$, die eine gegen (\hat{u}, \hat{v}) konvergente Folge beinhaltet.

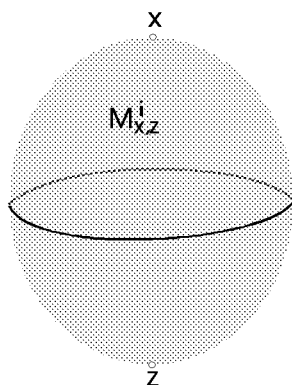
Mit Theorem 1.6 und Theorem 1.8 können wir die Zusammenhangskomponenten $\mathcal{M}^i(x, z)$ im Fall $Ind_f(x) - Ind_f(z) = 2$ wie folgt klassifizieren:



Figur 1.6 Ausgeschlossen aufgrund von Theorem 1.8



Figur 1.7 Möglich und $\hat{\mathcal{M}}^i(x, z) \simeq (0, 1)$



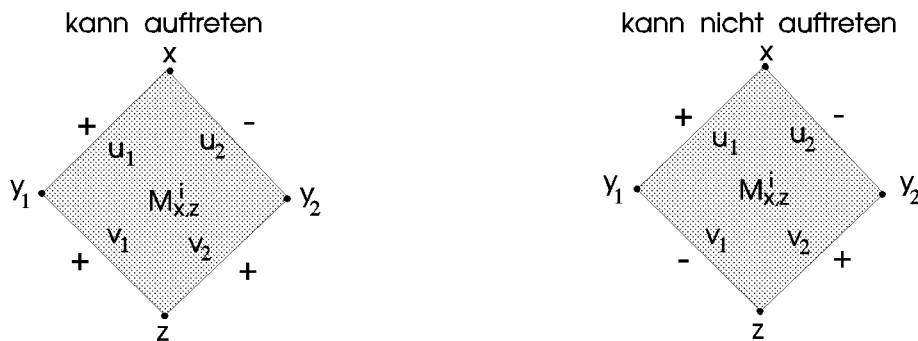
Figur 1.8 Möglich, aber uninteressant, da $\hat{\mathcal{M}}^i(x, z) \simeq S^1$

Bemerkung 1.9 Aus Theorem 1.8 folgt, daß die Menge der 1-fach gebrochenen Orbits zwischen x und z $\hat{\mathcal{O}}^1(x, z)$ in bijektiver Beziehung zu den Enden der zu $(0, 1)$ diffeomorphen Zusammenhangskomponenten von $\hat{\mathcal{M}}(x, z)$ steht. Elemente $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \hat{\mathcal{O}}^1(x, z)$, die je einem Ende ein und derselben Zusammenhangskomponente $\hat{\mathcal{M}}^i(x, z) \simeq (0, 1)$ entsprechen, nennen wir **cobordant**. Theorem 1.8 besagt $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$, siehe Figur 1.6 rechts.

Bemerkung 1.10 Es läßt sich zeigen, daß für cobordante Elemente $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \hat{\mathcal{O}}^1(x, z)$ gilt

$$n_{u_1} \cdot n_{v_1} = -n_{u_2} \cdot n_{v_2} \quad .$$

Der Beweis findet sich z.B. in [Po2, Prop. 2.4.1].



Figur 1.9 Die charakteristischen Vorzeichen '±' der isolierten Orbits

BEWEIS VON THEOREM 1.1

Sei $\langle x \rangle$ ein Erzeuger von $C_k(f, g, \sigma)$, dann ist

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1} \circ \partial_k \langle x \rangle &= \partial_{k-1} \left(\sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}f} n(x, y) \langle y \rangle \right) && , \text{Def. } \partial_k \\
&= \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}f} n(x, y) \partial_{k-1} \langle y \rangle && , \mathbb{Z}\text{-Lin.} \\
&= \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}f} n(x, y) \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} n(y, z) \langle z \rangle && , \text{Def. } \partial_{k-1} \\
&= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}f} n(x, y) \cdot n(y, z) \langle z \rangle && , \text{endl. Summen} \\
&= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}f} \left(\sum_{\hat{u} \in \mathcal{M}(x, y)} \sum_{\hat{v} \in \mathcal{M}(y, z)} n_{\hat{u}} \cdot n_{\hat{v}} \right) \langle z \rangle && , \text{Def. } n(\cdot, \cdot) \\
&= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} \underbrace{\left(\sum_{(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{O}^1(x, z)} n_{\hat{u}} \cdot n_{\hat{v}} \right)}_{= 0, \text{ da sich je 2 Summanden zu Null addieren (Bem. 1.10)}} \langle z \rangle && , \text{Bem. 1.9} \\
&= 0 && \square
\end{aligned}$$

3.2 Der kanonische Kettenhomomorphismus

In diesem Paragraphen soll ein **kanonischer Kettenhomomorphismus** $\psi^{\beta\alpha}$ vom Grad 0 zwischen zwei Morse-Witten Komplexen über M konstruiert werden, d.h. ein die Graduierung erhaltender Homomorphismus zwischen freien abelschen Gruppen

$$(2.1) \quad \psi^{\beta\alpha} : C.(f^\alpha, g^\alpha, \sigma^\alpha) \rightarrow C.(f^\beta, g^\beta, \sigma^\beta)$$

mit

$$(2.2) \quad \partial^\beta \circ \psi^{\beta\alpha} = \psi^{\beta\alpha} \circ \partial^\alpha \quad .$$

Letztere Eigenschaft stellt sicher, daß $\psi^{\beta\alpha}$ Zyklen in Zyklen und Ränder in Ränder abbildet. Die Abbildung ist daher auf Homologieniveau wohldefiniert

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \psi_*^{\beta\alpha} : HM_*(f^\alpha, g^\alpha, \sigma^\alpha, M; \mathbb{Z}) &\rightarrow HM_*(f^\beta, g^\beta, \sigma^\beta, M; \mathbb{Z}) \\ [\alpha] &\mapsto [\psi^{\beta\alpha}\alpha] \quad . \end{aligned}$$

Es wird sich herausstellen, daß $\psi_*^{\beta\alpha}$ ein Isomorphismus ist. Daher können Homologiegruppen zu verschiedenen Wahlen von (f, g, σ) identifiziert werden. Zur Konstruktion von $\psi^{\beta\alpha}$ benutzen wir die Resultate des vorhergehenden Paragraphen. Genauer gesagt betrachten wir Morse-Witten Komplexe über $M \times S^1$ bzw. $M \times S^1 \times S^1$ mit geeignet definierten Morse-Funktionen und Metriken. Dieser Zugang findet sich in [Po1, Se. 7] [Po2, Se. 2.6]. Wir notieren die Graduierung im folgenden auf Kettenniveau mit einem Subindex '·' und auf Homologieniveau mit '*'.

Wir definieren zunächst den Morse-Witten Komplex in etwas allgemeinerer Form. Eine offene Menge U in einer Mannigfaltigkeit N heißt **isolierende Umgebung** für einen Fluß φ , falls der Abschluß der Vereinigung aller in U enthaltenen Orbits in U enthalten ist, d.h.

$$(2.4) \quad S(U) := \overline{\{p \in U \mid \varphi_t p \in U, \forall t \in \mathbb{R}\}} \subset U \quad .$$

$S(U)$ heißt **isolierte invariante Menge**.

Falls U so eine Umgebung für den Fluß von $-\nabla f$ ist, definieren wir den Morse-Witten Komplex $C.(U, f, g, \sigma)$ bezüglich U als die Untergruppe von $C.(f, g, \sigma)$, die frei abelsch von den Elementen von $\text{Crit } f \cap U$ erzeugt wird. Der Randoperator $\partial_k(U)$ ist definiert wie zuvor, außer daß wir nur jene verbindenden Orbits zählen, welche in U enthalten sind. $\partial_{k-1}(U) \circ \partial_k(U) = 0$ ergibt sich aus der Tatsache, daß $\forall x, z \in \text{Crit } f \cap U$ gilt: $\mathcal{M}(x, z) \cap U$ ist offen und abgeschlossen in $\mathcal{M}(x, z)$.

Um nun einen Kettenhomomorphismus zwischen $C.(f^\alpha, g^\alpha, \sigma^\alpha)$ und

$C \cdot (f^\beta, g^\beta, \sigma^\beta)$ zu konstruieren, wählen wir ein $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ und eine Homotopie f_s zwischen f^α und f^β (sei im folgenden $\alpha = 0$ und $\beta = 1$)

$$(2.5) \quad f_s := \begin{cases} f^0 & , s < \epsilon \\ f^1 & , s > 1 - \epsilon \end{cases} \quad , s \in \mathbb{R} ,$$

sowie eine analoge Homotopie g_s zwischen g^0 und g^1 . S^1 sei parametrisiert durch $s \mapsto e^{i\pi s}$, $s \in \mathbb{R}$, d.h. wir identifizieren S^1 mit $[-1, 1]/\{\pm 1\}$. \hat{g} bezeichne die durch diese Parametrisierung auf S^1 induzierte Metrik. Für hinreichend großes $K > 0$ erhalten wir folgende **Morse-Funktion auf $M \times S^1$** (hierbei geht ein, daß die Homotopien nahe bei 0 bzw. ± 1 konstant sind)

$$(2.6) \quad \mathbf{F}(p, s) := f_{|s|}(p) + \frac{K}{\pi} \cos(\pi s) \quad , s \in [-1, 1] , p \in M .$$

mit

$$(2.7) \quad \text{Crit } F = \{(x, i) \mid x \in \text{Crit } f^i, i = 0, 1\} \quad , \quad \text{Ind}_F(x, i) = \text{Ind}_{f^i}(x) + 1 - i .$$

Eine Metrik auf $M \times S^1$ sei definiert durch

$$(2.8) \quad G_{(p,s)} := g_{|s|} \oplus \hat{g} \quad .$$

Für $|s - i| < \epsilon$ ergibt sich

$$(2.9) \quad -\nabla_G F(p, s) = (-\nabla_{g^i} f^i(p), K \cdot \sin \pi s) \quad ,$$

d.h. die Untermannigfaltigkeiten $M_i := M \times \{i\}$, $i = 0, 1$, sind invariant unter dem negativen Gradientenfluß von F auf $M \times S^1$, und der auf M_i eingeschränkte negative Gradientenfluß erfüllt die Morse-Smale Bedingung. Sei $s_0 \neq 0, 1$ und $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): \mathbb{R} \rightarrow M \times S^1$ eine Lösung von $\dot{\gamma}(t) = -\nabla_G F(\gamma(t))$ mit $\gamma(0) = (p_0, s_0)$, dann folgt aus $\dot{\gamma}_2(t) = K \sin \pi t$ zunächst $\gamma_2(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$ und $\gamma_2(t) \rightarrow \pm 1$ für $t \rightarrow +\infty$ (je nachdem ob s_0 aus $(0, 1)$ oder aus $(-1, 0)$ ist). Es gibt also insbesondere keine verbindenden Orbits von M_1 nach M_0 und jene, welche zwei kritische Punkte in M_0 (M_1) verbinden, sind enthalten in M_0 (M_1).

Bemerkung 2.1 Wir können im Allgemeinen nicht erwarten, daß die Morse-Smale Bedingung für den negativen Gradientenfluß von F bezüglich G auf $M \times S^1$ erfüllt ist. Durch eine (beliebig kleine) Störung können wir dies jedoch erreichen. Dabei werden zwar die kritischen Punkte von F bzw. die zuvor invarianten Mengen M_i (beliebig wenig) verschoben bzw. deformiert, wir können jedoch $\text{Crit } F$ mit $\text{Crit } \tilde{F}$ eindeutig identifizieren, falls die Störung hinreichend klein ist. Die Orbits in M_i (bezüglich der ursprünglichen Größen F, G) werden durch eine hinreichend kleine Störung auch nicht zerstört, da sie transversale Schnitte sind und Transversalität eine gegen hinreichend

kleinen Störungen stabile Eigenschaft ist. Um die Notation so einfach wie möglich zu halten, gehen wir im folgenden oBdA davon aus, daß die Morse-Smale Bedingung erfüllt sei.

Die Menge $U := M \times (-\delta, 1 + \delta) \subset M \times [-1, 1] / \{\pm 1\}$ mit $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ist eine isolierende Umgebung von $S := M \times [0, 1]$. Wir betrachten nun den Morse-Witten Kettenkomplex $(C^F, \Delta \cdot) := (C \cdot(U, F, G, \Sigma), \partial \cdot(U))$. Wir erhalten die Aufspaltung $C^F = C^0 \oplus C^1$, wobei C^i durch $(x, i) \in \text{Crit} \cdot_{-1+i} f^i \times \{i\}$ frei abelsch erzeugt wird. Die Orientierung von $\langle x, i \rangle$ sei induziert durch die Isomorphismen

$$(2.10) \quad T_{(p,0)}W^u(x, 0) \simeq T_pW^u(x) \oplus T_0S^1$$

$$T_{(p,1)}W^u(x, 1) \simeq T_pW^u(x)$$

für ein und damit jedes $p \in M$ (die Orientierung von T_0S^1 sei durch die Parametrisierung von S^1 induziert). Σ ist also durch σ^0 und σ^1 bestimmt. Es läßt sich zeigen [Po2, Se. 2.6], daß die Inklusionen $\mathcal{M}(x, y) \rightarrow \mathcal{M}((x, i), (y, i))$, $i = 0, 1$, orientierungserhaltend sind.

Die obige Aufspaltung von C^F führt zu folgender Darstellung von $\Delta \cdot$:

$$(2.11) \quad \Delta \cdot = \begin{bmatrix} \Delta \cdot^{00} & \Delta \cdot^{01} \\ \Delta \cdot^{10} & \Delta \cdot^{11} \end{bmatrix} : C^0 \oplus C^1 \rightarrow C^0 \cdot_{-1} \oplus C^1 \cdot_{-1} \quad ,$$

wobei $\Delta \cdot^{01} = 0$, da es keine verbindenden Orbits von M_1 nach M_0 gibt. Aus Paragraph 3.1 wissen wir, daß gilt $\Delta \cdot \cdot_{-1} \circ \Delta \cdot = 0$. Dies ist äquivalent zu

$$(2.12) \quad \Delta \cdot \cdot_{-1}^{00} \circ \Delta \cdot^{00} = 0 \quad , \quad \Delta \cdot \cdot_{-1}^{11} \circ \Delta \cdot^{11} = 0 \quad ,$$

$$\Delta \cdot \cdot_{-1}^{10} \circ \Delta \cdot^{00} + \Delta \cdot \cdot_{-1}^{11} \circ \Delta \cdot^{10} = 0 \quad ,$$

d.h. $\Delta \cdot^i : C^i \rightarrow C^i \cdot_{-1}$ sind Randoperatoren (klar, da sie bis auf folgende Identifikationen durch $\partial^i \cdot$ gegeben sind). Mit den Identifizierungen

$$(2.13) \quad \chi^i : C \cdot(f^i, g^i, \sigma^i) \rightarrow C^i \cdot_{+1-i} \quad , \quad i = 0, 1$$

$$\langle x \rangle \mapsto \langle (x, i) \rangle$$

definieren wir folgenden Gruppenhomomorphismus

$$(2.14) \quad \psi^{10} := (-1) \cdot (\chi^1 \cdot)^{-1} \circ \Delta \cdot \cdot_{+1}^{10} \circ \chi^0 \cdot : C \cdot(f^0, g^0, \sigma^0) \rightarrow C \cdot(f^1, g^1, \sigma^1) \quad ,$$

d.h. ψ^{10} zählt die isolierten Orbits von kritischen Punkten x (von f^0) in $M \times 0$ zu

kritischen Punkten y (von f^1) in $M \times 1$ mit Vorzeichen. Aus der dritten Gleichung in (2.12) ergibt sich unter Verwendung von

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \Delta^{00} &= \chi^{0 \cdot -2} \circ \partial^{0 \cdot -1} \circ (\chi^{0 \cdot -1})^{-1} \quad \text{und} \quad \Delta^{11} = \chi^{1 \cdot -2} \circ \partial^{1 \cdot -1} \circ (\chi^{1 \cdot -1})^{-1} \\ \psi^{10} \circ \partial^{0 \cdot -1} &= \partial^{1 \cdot -1} \circ \psi^{10} \quad , \end{aligned}$$

d.h. ψ^{10} ist ein Grad 0 Kettenhomomorphismus und ist daher auf Homologieniveau wohldefiniert

$$(2.16) \quad \psi_*^{10} : HM_*(f^0, g^0, \sigma^0, M; \mathbb{Z}) \rightarrow HM_*(f^1, g^1, \sigma^1, M; \mathbb{Z}) \quad .$$

Die Abbildung ψ^{10} ordnet jedem $x \in \text{Crit}_k f^0$ die direkte Summe aller $y \in \text{Crit}_k f^1$ zu (multipliziert mit einem entsprechenden charakteristischen Vorzeichen), zu denen x einen verbindenden Orbit besitzt (bezüglich $-\nabla_G F$ auf $M \times S^1$). Im Fall von konstanten Homotopien (d.h. insbesondere $f^0 = f^1, g^0 = g^1$) ergibt sich also $\psi^{10} = Id$. und $\psi_*^{10} = Id_*$.

Um die Unabhängigkeit des induzierten Homomorphismus ψ_*^{10} von den gewählten Homotopien zu zeigen, betrachten wir nun **2-Parameter Homotopien** und wiederholen die vorige Konstruktion für diesen Fall. Wir wollen das weitere Vorgehen daher nur skizzieren und entledigen uns insbesondere der lästigen Graduierungsnotation. Sei $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ und

$$(2.17) \quad f_{\mathbf{s}, \mathbf{r}} := \begin{cases} f^0 & , s < \epsilon & , r < \epsilon \\ f^1 & , s > 1 - \epsilon & , r < \epsilon \\ f^2 & , s < \epsilon & , r > 1 - \epsilon \\ f^3 & , s > 1 - \epsilon & , r > 1 - \epsilon \end{cases} \quad , \quad s, r \in [0, 1] \quad ,$$

$g_{\mathbf{s}, \mathbf{r}}$ sei analog definiert (wir verbinden also jetzt vier Morse-Witten Komplexe mittels 2-Parameter Homotopien der f 's und g 's). Eine **Morse-Funktion auf $M \times S^1 \times S^1$** definieren wir durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{r}) := f_{|s|, |r|}(p) + \frac{K}{\pi} (\cos \pi s + \cos \pi r) \quad , \quad s, r \in [-1, 1] / \{\pm 1\} \quad , \quad p \in M \quad ,$$

eine Metrik G durch

$$G_{(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{r})} := g_{|s|, |r|} \oplus \hat{g} \oplus \hat{g} \quad .$$

Die Untermannigfaltigkeiten $M_{ij} := M \times \{i\} \times \{j\}$, $i, j = 0, 1$, sind bezüglich $-\nabla_G F$ invariant und die Restriktion von $-\nabla_G F$ auf M_{ij} liefert gerade die ursprünglichen Morse-Witten Komplexe $C \cdot (f^{2j+i}, g^{2j+i}, \sigma^{2j+i})$ mit Randoperator ∂^{2j+i} .

$V := M \times (-\delta_2, 1 + \delta_2) \times (-\delta_2, 1 + \delta_2)$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, ist eine isolierende Umgebung von $\tilde{S} := M \times [0, 1]^2$. Es ergibt sich der Morse-Witten Komplex

$$(\mathbf{C}^F, \Delta \cdot) := (C \cdot (V, F, G, \Sigma), \partial \cdot (V)) \quad ,$$

der wie folgt aufspaltet:

$$C^F = \bigoplus_{l=0}^3 C^l \quad ,$$

wobei C^l durch $\langle (x, i, j) \rangle$ mit $l = 2j + i$, $i, j = 0, 1$, frei abelsch erzeugt wird. Ähnlich wie zuvor bei der 1-Parameter Homotopie ergibt sich nun eine (4x4)-Matrix Δ

$$(2.18) \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{00} & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_{10} & \Delta_{11} & 0 & 0 \\ \Delta_{20} & \Delta_{21} & \Delta_{22} & 0 \\ \Delta_{30} & \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} .$$

Das Resultat $\Delta^2 = 0$ aus Paragraph 3.1 führt auf

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \Delta_{ii}^2 &= 0 \quad , \quad i = 0, \dots, 3 \quad , \\ \Delta_{10} \Delta_{00} + \Delta_{11} \Delta_{10} &= 0 \quad , \quad \Delta_{20} \Delta_{00} + \Delta_{22} \Delta_{20} = 0 \quad , \\ \Delta_{31} \Delta_{11} + \Delta_{33} \Delta_{31} &= 0 \quad , \quad \Delta_{32} \Delta_{22} + \Delta_{33} \Delta_{32} = 0 \quad , \end{aligned}$$

sowie

$$(2.20) \quad \Delta_{30} \Delta_{00} + \Delta_{31} \Delta_{10} + \Delta_{32} \Delta_{20} + \Delta_{33} \Delta_{30} = 0 \quad .$$

Mit den natürlichen Identifizierungen

$$\begin{aligned} \chi^0 &: C \cdot (f^0, g^0, \sigma^0) \rightarrow C^0_{+2} \\ \chi^i &: C \cdot (f^i, g^i, \sigma^i) \rightarrow C^i_{+1} \quad , \quad i = 1, 2 \\ \chi^3 &: C \cdot (f^3, g^3, \sigma^3) \rightarrow C^3 \end{aligned}$$

und $\psi^{ji} := (\chi^j)^{-1} \circ \Delta_{ji} \circ \chi^i : C \cdot (f^i, g^i, \sigma^i) \rightarrow C \cdot (f^j, g^j, \sigma^j)$ erhalten wir aus (2.19), daß $\psi^{10}, \psi^{20}, \psi^{32}, \psi^{31}, \psi^{30}$ Kettenhomomorphismen sind.

$$(2.21) \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s} & \\ & \psi^{10} & \\ f^0 & \bullet \text{ --- } > \text{ --- } \bullet & f^1 \\ & | & | \\ r \downarrow & \psi^{20} \downarrow & \downarrow \psi^{31} \\ & | & | \\ f^2 & \bullet \text{ --- } > \text{ --- } \bullet & f^3 \\ & \psi^{32} & \end{array} .$$

(2.20) besagt, daß ψ^{30} eine **Kettenhomotopie** (vom Grad $+1$) zwischen $\psi^{31} \circ \psi^{10}$ und $\psi^{32} \circ \psi^{20}$ darstellt, d.h. es gilt

$$\psi_*^{31} \circ \psi_*^{10} = \psi_*^{32} \circ \psi_*^{20} \quad .$$

Wähle $f^0 = f^2$ und $f^1 = f^3$, sowie eine in r konstante Homotopie, dann erhalten wir

$$\psi_*^{10} = \psi_*^{32}$$

unabhängig von der in s gewählten Homotopie. Für $f^2 = f^3$ ergibt sich

$$\psi_*^{21} \circ \psi_*^{10} = \psi_*^{20}$$

und für $f^0 = f^2 = f^3$

$$\psi_*^{01} \circ \psi_*^{10} = \psi_*^{00} \circ \psi_*^{00} = Id_*^0 \quad ,$$

d.h.

$$\psi_*^{10} : HM_*(f^0, g^0, \sigma^0, M; \mathbb{Z}) \rightarrow HM_*(f^1, g^1, \sigma^1, M; \mathbb{Z})$$

ist ein Isomorphismus unabhängig von der gewählten Homotopie. Es genügt daher die Bezeichnung

$$HM_*(M; \mathbb{Z})$$

für die **Morse-Homologie**.

3.3 Der kanonische Isomorphismus zur singulären Homologie

Da die Details für den Beweis unseres kanonischen Isomorphismus noch nicht vollständig ausgearbeitet sind, wollen wir diesen hier nur kurz skizzieren und darauf hinweisen, daß es sich bislang nur um eine Hypothese handelt.

Auf Homologieniveau wurde jedoch bereits mehrfach folgende Isomorphie bewiesen, siehe z.B. [Sa]

Theorem 3.1 (*R. Thom, S. Smale, J. Milnor, A. Floer, D. Salamon*)

$$H_*^{\text{sing}}(M; \mathbb{Z}) \simeq HM_*(M; \mathbb{Z}) \quad .$$

Sei nun (K, h) eine glatte Triangulierung von M (diese existiert nach [Th]), d.h. K ist ein Simplicialkomplex und $h: |K| \rightarrow M$ ein Homöomorphismus, der auf jedem Simplex von K differenzierbar ist. $|K|$ bezeichnet die Vereinigung aller Simplexe von K , $H_*(K)$ die simpliciale Homologie von K . Es ist bekannt, daß gilt

$$(3.1) \quad \begin{aligned} H_*^{\text{sing}}(M; \mathbb{Z}) &\simeq H_*^{\text{sing}}(|K|; \mathbb{Z}) \quad , \quad h: |K| \rightarrow M \text{ Homöomorphismus} \quad , \\ &\simeq H_*(K) \quad , \quad \text{kan. Isom. [StZi, Satz 9.7.4]} \quad . \end{aligned}$$

Es bleibt also einen kanonischen Isomorphismus zwischen $H_*(K)$ und $HM_*(M)$ zu finden. Die Idee ist nun auf M eine Morse-Funktion f zu konstruieren, für die gilt: Die kritischen Punkte von f vom Morse-Index k stimmen genau mit den Bildern (unter der Triangulierung h) der Baryzentren der k -Simplexe von K überein. Damit ist bereits eine Isomorphie der Kettengruppen der simplicialen und Morse-Witten Homologie erreicht. Da der Randoperator der simplicialen Homologie jedem k -Simplex die alternierende Summe seiner $(k-1)$ -Seitensimplize zuordnet, sind wir fertig, wenn der negative Gradientenfluß von f bezüglich einer geeigneten Metrik g von M genau einen verbindenden Orbit, von jedem kritischen Punkt in einem k -Baryzentrum, zu jedem kritischen Punkt im $(k-1)$ -Baryzentrum der Seitensimplize besitzt (mit alternierenden charakteristischen Vorzeichen n_u). In diesem Fall imitiert der Morse-Witten Randoperator ∂_k jenen der simplicialen Homologie. Die offensichtliche Kettenabbildung zwischen den beiden Komplexen ist bereits auf Kettenniveau ein Isomorphismus, also auch auf Homologieniveau.

3.4 Anwendung

Die Morse-Homologie bietet die Möglichkeit die Homologiegruppen einer Mannigfaltigkeit in manchen Fällen recht einfach zu berechnen. Denn wir haben die Freiheit die Mannigfaltigkeit glatt zu deformieren, z.B. sie in einen \mathbb{R}^N (N hinreichend groß) einzubetten, sowie eine bequeme Wahl einer Morse-Funktion und einer Metrik zu treffen. Wir wollen dies anhand eines Beispiels veranschaulichen.

Beispiel 4.1 $M = S^n$

Wir betten S^n zunächst in üblicher Weise in den \mathbb{R}^{n+1} ein, siehe Figur 0.1 für den Fall $n = 2$. Als Metrik nehmen wir die durch die Einbettung auf S^n induzierte Metrik, als Morse-Funktion die Höhenfunktion

$$f : S^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto x^{n+1} .$$

Diese hat genau einen kritischen Punkt x mit $\text{Ind}_f(x) = n$ und genau einen mit $\text{Ind}_f(y) = 0$. Die Morse-Smale Bedingung ist automatisch erfüllt, denn wir haben keine verbindenden Orbits zwischen kritischen Punkten vom selben Index. Nun ist offenbar

$$C_n = \mathbb{Z} \langle x \rangle \quad , \quad C_0 = \mathbb{Z} \langle y \rangle$$

und

$$C_i = 0 \quad , \quad \forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\} .$$

Die Orientierungen $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$ von $T_x W^u(x)$ bzw. $T_y W^u(y)$ seien beliebig gewählt. Wegen $\partial_n \langle x \rangle = 0$ und $\partial_0 \langle y \rangle = 0$ und der Tatsache, daß keine kritischen Punkte vom Index $n + 1$ oder 1 existieren, folgt

$$HM_k(S^n; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & , k = 0, n \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} ,$$

und hieraus mit Theorem 3.1

$$H_k^{\text{sing}}(S^n; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & , k = 0, n \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Literatur

- [BB] D.D. Bleeker, B. Booss, *Topology and analysis - the Atiyah-Singer index formula and gauge-theoretic physics*, Springer 1985.
- [BL] D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol 1994.
- [BT] R. Bott, L.W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate texts in mathematics **82**, Springer, New York 1982.
- [BS] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun 1987.
- [C] P. Chernoff, *Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations*, J. Funct. Anal. **12** (1973), 401-414.
- [CDS] J.M. Combes, P. Duclos, R. Seiler, *Krein's formula and one-dimensional multiple well*, J. Funct. Anal. **52** (1983), 257-301.
- [CFKS] H.L. Cycon, R.G. Froese, W.Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators*, Texts and monographs in physics, Springer, Berlin 1987.
- [Ch] K.-c. Chang, *Infinite dimensional Morse theory and multiple solution problems*, PNLDE **6**, Birkhäuser 1993.
- [F11] A. Floer, *Wittens complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Diff. Geom. **30** (1989), 207-221.
- [F12] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Commun. Math.

- Phys. **120** (1989), 575-611.
- [GrHa] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, J. Wiley & Sons 1978.
- [H] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate texts in mathematics **33**, Springer, New York 1976.
- [IZ] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum field theory*, McGraw-Hill, International edition 1985.
- [Mi] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes 1, Princeton Univ. Press 1965.
- [O'N] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press 1983.
- [Po1] M. Poźniak, *The Morse complex, Novikov cohomology and Fredholm theory*, University of Warwick, Preprint 1991.
- [Po2] M. Poźniak, *Floer homology, Novikov rings and clean intersections*, PhD-thesis, University of Warwick, Oct. 1994.
- [RSI] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I : Functional analysis*, Academic Press 1980.
- [RSII] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics II : Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press 1975.
- [Sa] D.A. Salamon, *Morse theory, the Conley index and Floer homology*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 113-140.
- [Sch] M. Schwarz, *Morse homology*, PM **111**, Birkhäuser 1993.
- [Si] B. Simon, *Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, I. Nondegenerate minima: Asymptotic expansions*, Ann. Inst. H. Poincare **38** (1983), 295-307.
- [Sm] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. AMS **73** (1967), 747-???
- [StZi] R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, B.G. Teubner, Stuttgart

1988.

- [St] R. Strichartz, *Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold*, J. Funct. Anal. **52** (1983), 48-79.
- [T] R. Thom, *Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété*, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 661-692.
- [Th] W.P. Thurston, *Three-dimensional geometry & topology*, preliminary version 1990.
- [Va] C. Vafa, *Topological mirrors and quantum rings*, in S.-T. Yau (Ed.) *Essays on mirror manifolds*, International Press Co., Hong Kong 1992.
- [We] J. Weber, *Der Morse-Witten Komplex*, Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik der TU Berlin 1993.
- [Wi1] E. Witten, *Dynamical breaking of supersymmetry*, Nucl. Phys. B **185** (1981), 513-554.
- [Wi2] E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. B **202** (1982), 253-316.
- [Wi3] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 661-692.

Verwendete Symbole

$Ind_f(x)$	Morse-Index des (nichtdegenerierten) kritischen Punktes x von f	5
$Crit f$	Menge der kritischen Punkte von f	78
$Crit_k f$	Menge der kritischen Punkte von f vom Morse-Index k	78
c_k	$\#Crit_k f$	5,78
b_k	k -te Bettizahl von M	6
$\Lambda^p(M)$	glatte Differentialformen auf M vom Grad p	6
d_p	äußere Differentiation auf $\Lambda^p(M)$	6,23
$H_{DR}^*(M; \mathbb{R})$	de Rham Kohomologie von M	6
\mathbb{T}^2	2-dimensionaler Torus	9
Q_α	Supersymmetrieoperator	11
N_F	Operator der Fermionenanzahl	11
$(-1)^{N_F}$	Operator der Fermionenzahl modulo 2	11
$n_{f(b)}^{E=0}$	$\#$ fermionischer (bos.) Zustände mit Energie $E = 0$	12
$\chi(M)$	Eulercharakteristik von M	14,77
$\mathcal{F}(M)$	glatte reellwertige Funktionen auf M	20
$\mathfrak{X}(M)$	glatte Vektorfelder auf M	20
$\langle \cdot, \cdot \rangle_m^p$	inneres Produkt auf $\wedge^p(T_m^*M)$	22
$\langle \cdot, \cdot \rangle^p$	inneres Produkt auf $\Lambda^p(M)$	26
$\bar{\Lambda}^p(M)$	Abschluß von $\Lambda^p(M)$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle^p$	33
Δ	definiert als $dd^* + d^*d$ auf $\Lambda^p(M)$	34
L	Laplace-Beltrami-Operator	35
$\bar{\Lambda}_{\mathbb{H}}^p(M)$	$\bar{\Lambda}_{\mathbb{H}}^p(M), \bar{\Lambda}_{\mathbb{H}}^{p*}(M), \Lambda_{\mathbb{H}}^p(M), \Lambda_{\mathbb{H}}^{p*}(M)$	35
d_t	deformierter Operator der äußeren Differentiation ($e^{-tf}de^{tf}$)	42
Δ_t	definiert als $d_t d_t^* + d_t^* d_t$ auf $\Lambda^p(M)$	42
L_t	Wittens deformierter Laplace-Operator	42
$\bar{\Lambda}_{\mathbb{H}_t}^p(M)$	$\bar{\Lambda}_{\mathbb{H}_t}^p(M), \bar{\Lambda}_{\mathbb{H}_t}^{p*}(M), \Lambda_{\mathbb{H}_t}^p(M), \Lambda_{\mathbb{H}_t}^{p*}(M)$	42
$a^i, (a^i)^*$	Fermionenerzeuger bzw. -vernichter	43
$\{ \cdot, \cdot \}$	Antikommutator	44

$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$	beschränkte lineare Operatoren auf dem Hilbertraum \mathfrak{H}	46
$R_\lambda(T)$	Resolvente des Operators T an der Stelle λ	55
$\text{Spec } T$	Spektrum des Operators T	55
$\text{Ind}_{\text{sup}}(H)$	supersymmetrischer Index von H	70
$E_\Omega(H)$	Spektralprojektor von H auf $\Omega \subset \mathbb{R}$	70
$W^{(u)s}(x)$	(in)stabile Mannigfaltigkeit von $x \in \text{Crit } f$	78
$\mathcal{M}(x, y)$	x mit y verbindende Mannigfaltigkeit	79
$\tilde{\mathcal{M}}(x, y)$	Orbitraum von x und y	79
$C_k(f, g)$	k -te Kettengruppe des Morse-Witten Komplex (M nicht orientiert)	79
∂_k	Randoperator des Morse-Witten Komplex	80
$HM_k(M; \mathbb{Z}_2)$	Morse-Homologie mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_2	80
E_x^u	definiert als $T_x W^u(x)$	80
σ	Wahl einer Orientierung aller instabilen Mannigfaltigkeiten	80
n_{u_1}	charakteristisches Vorzeichen eines isolierten Orbits	80
$n(x, y)$	Koeffizienten des Randoperators	81
$C_k(f, g, \sigma)$	Kettengruppen des Morse-Witten Komplex (M orientiert)	81
$\tilde{\mathcal{M}}^i(x, z)$	Zusammenhangskomponente von $\tilde{\mathcal{M}}(x, z)$	87
$\text{Grad}^\infty(M)$	glatte Gradientenvektorfelder auf M	85
$\hat{O}^1(x, z)$	Menge der 1-fach gebrochenen Orbits zwischen x und z	89
$\psi^{\beta\alpha}$	kanonischer Kettenhomomorphismus	91
$\psi^{\cdot 30}$	Kettenhomotopie	96
$HM_k(M; \mathbb{Z})$	ganzzahlige Morse-Homologie von M	96

Index

- Bettizahl, 6,20
- Cauchyfolge, 30
- elliptische Regularität, 36,56
- Eulercharakteristik, 14,77
- Fermionen
 - erzeuger, 15,43
 - vernichter, 15,43
- Gradientenfluß negativer, 78
- Graphennorm, 34
- harmonische Form, 35
- Hesse-Matrix, 5
- Hodge
 - * -Operator, 27
 - Zerlegung, 36,56
- inneres Produkt, 26
- Instantonen, 16
- Integration einer Differentialform, 25
- invariante Menge
 - isolierte-, 91
- nichtlineares supersymmetrisches Sigma Modell, 13
- Ketten
 - homomorphismus
 - kanonischer--, 91
 - homotopie, 96
- Kommutator, 11
 - Anti-, 44
- Laplace-Beltrami-Operator, 35
- Limes quasiklassischer, 42
- Mannigfaltigkeit
 - geschlossene-, 5
 - instabile-, 78
 - Orientierung einer-, 20
 - stabile-, 78
 - verbindende-, 79
 - Zusammenhangskomponente einer--, 87
- metrischer Raum, 30
 - vollständiger-, 30
- Morse
 - Funktion, 5
 - auf $M \times S^1$, 92
 - auf $M \times S^1 \times S^1$, 94
 - krit. Punkt einer-, 5
 - nichtdegenerierter--, 5
 - Index, 5
 - Karte, 6
 - Koordinaten, 6
 - Lemma, 5
 - Smale Bedingung, 78
 - Ungleichungen,
 - starke--, 6
 - schwache--, 7
 - Witten Komplex
 - Homologie des--, 80,96
 - kan. Isomorphismus zum--, 97
 - Kettengruppen des--, 79,81
 - Randoperator des--, 80
- Normalkoordinaten, 50
- Operator linearer, 32
 - abgeschlossener-, 32
 - adjungierter-, 32
 - Erweiterung eines-, 32
 - Graph eines-, 32
 - kompakter-, 32
 - selbstadjungierter-, 32
 - symmetrischer-, 32
 - wesentlich selbstadjungierter-, 32
- Orbit
 - isolierte-, 79
 - charakteristisches Vorzeichen eines--, 81
 - raum, 79
- Orthogonalprojektor, 38
- präkompakte Menge, 36
- Rahmen eines Vektorbündels, 23
 - orientierter-, 23
- regulärer Wert, 79
- Resolventenmenge, 54
- Supersymmetrie

- algebra, 11
- invarianz, 12
- operator, 11
- spontan gebrochene-, 12

transversaler Schnitt, 78
Tunneleffekt, 16

Umgebung
 isolierende-, 91

Volumenelement, 23

Zerlegung der Eins, 25

Zustände
 bosonische-, 69
 fermionische-, 69