

## CENTRO DE MASSA E APLICAÇÕES À GEOMETRIA

Emanuel Carneiro & Frederico Girão – UFC

Nível Avançado

### 1. INTRODUÇÃO

Chamaremos de sistema de massas um conjunto de  $n$  pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  no plano, sendo que ao ponto  $P_k = (x_k, y_k)$  está associada uma massa  $m_k \in \mathbb{R}$ , de modo que  $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$ . Definiremos o centro de massa desse sistema como sendo o ponto  $(x, y)$  tal que:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M}; \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{M},$$

Onde  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  é a massa associada a ele.

#### Notação:

Quando ao ponto  $(x, y)$  estiver associada uma massa  $m$  escreveremos  $(x, y)[m]$ .

#### Observações:

(i) Podemos interpretar fisicamente o centro de massa de um sistema como sendo o ponto onde ele concentra toda sua massa. Em termos práticos, isso nos ajuda a simplificar, por exemplo, problemas de Dinâmica onde há aplicações de forças sobre o sistema.

(ii) Podemos considerar os pontos em  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso, o cálculo do centro de massa de um sistema é análogo.

(iii) Claramente o centro de massa é único.

### 2. PROPRIEDADES BÁSICAS

#### Proposição 1.

Seja  $(x, y)[m]$  o centro de massa do sistema

$S_1 = \{(x_1, y_1)[m_1], (x_2, y_2)[m_2], \dots, (x_k, y_k)[m_k]\}$ , e seja  $(a, b)[N]$  o centro de massa do sistema  $S_2 = \{(a_1, b_1)[n_1], (a_2, b_2)[n_2], \dots, (a_l, b_l)[n_l]\}$ . Então, se

$M + N \neq 0$ , o centro de massa do sistema  $S = S_1 \cup S_2$  é o centro de massa do sistema  $\{(x, y)[M], (a, b)[N]\}$ .

**Demonstração:**

Por definição o centro de massa do sistema  $S = S_1 \cup S_2$  é o ponto  $(X, Y)[M + N]$ , onde:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i + \sum_{j=1}^l n_j a_j}{M + N} = \frac{M_x + N_a}{M + N}$$

que é justamente a primeira coordenada do centro de massa do sistema  $\{(x, y)[M], (a, b)[N]\}$ . Para a segunda coordenada é análogo.

A proposição acima nos dá um algoritmo para calcular o centro de massa de um sistema com  $n$  pontos. Para isso tomamos dois pontos  $(x_1, y_1)[m_1]$  e  $(x_2, y_2)[m_2]$  quaisquer desse sistema e os substituímos pelo seu centro de massa com a massa  $m_1 + m_2$ . Recaímos assim num sistema com  $n - 1$  pontos e continuamos o processo. Assim o cálculo de centros de massa resume-se apenas ao caso  $n = 2$ , que estudamos a seguir:

**Centro de massa de um sistema com duas massas**

O centro de massa  $(x, y)[M]$  de um sistema  $\{(x_1, y_1)[m_1], (x_2, y_2)[m_2]\}$  é colinear com os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  pois

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} &= x_1 y_2 + x y_1 + x_2 y - x y_2 - x_2 y_1 - x_1 y \\ &= x_1 y_2 + \left( \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \right) y_1 + \left( \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \right) x_2 \\ &\quad - \left( \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \right) y_2 - x_2 y_1 - \left( \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \right) x_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

E além disso se chamamos  $(x_1, y_1) = A$ ,  $(x_2, y_2) = B$  e  $(x, y) = G$  vale que:

$$m_1 \overrightarrow{AG} + m_2 \overrightarrow{BG} = 0$$

tal fato é deixado como exercício para o leitor.

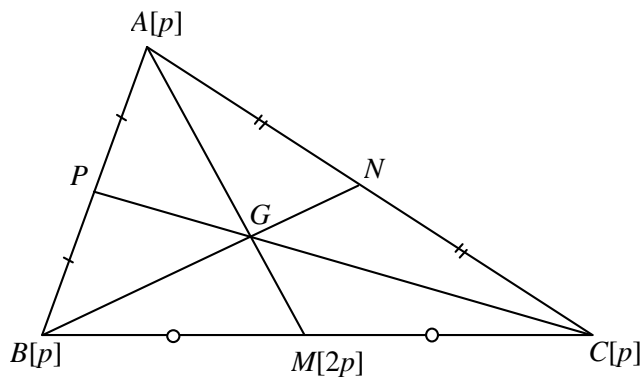
**Observação:**

Pela equação acima distinguimos alguns casos:

- As duas massas têm o mesmo sinal. Nesse caso o ponto  $G$  está entre  $A$  e  $B$  e vale que  $|m_1| |AG| = |m_2| |BG|$ .
- As duas massas têm sinais contrários. Nesse caso  $G$  está fora do segmento  $AB$  e vale que  $|m_1| |AG| = |m_2| |BG|$ .

**3. APLICAÇÕES À GEOMETRIA**

**Exemplo 1:** Vamos tomar um triângulo  $ABC$  qualquer e pôr massas iguais em seus três vértices, ou seja consideraremos o sistema  $A[p], B[p], C[p]$ . Chamaremos de  $G$  o centro de massa desse sistema. Como encontrar o ponto  $G$ ? (hummm...) denotaremos C.M. = centro de massa.



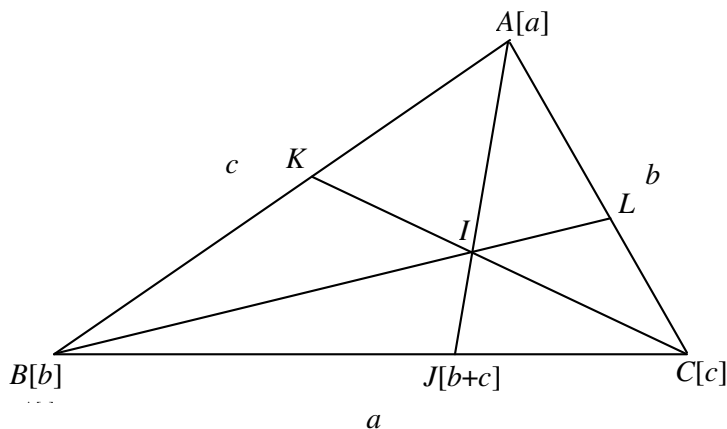
Vamos usar a proposição da seção anterior. O.C.M. de  $B[p]$  e  $C[p]$  é o seu ponto médio  $M$ . Podemos então trocar  $B[p]$  e  $C[p]$  por  $M[2p]$ . Logo o ponto  $G$  será o C.M. de  $A[p]$  e  $M[2p]$ , que está sobre  $AM$  e divide  $AM$  na razão

$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}.$$

Sejam  $N$  e  $P$  os pontos médios de  $AC$  e  $AB$ . De modo análogo poderíamos ter provado que  $G \in BN$  e que  $G \in CP$ . Esta é uma demonstração diferente que as três medianas concorrem em  $G$ , que é portanto o baricentro do triângulo. Além disso, segue do exposto acima que:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = \frac{2}{1}$$

**Exemplo 2:** Denote por  $a, b, c$ , os lados do triângulo  $ABC$  da maneira usual. Vamos pôr agora massas nos vértices do triângulo proporcionais aos lados opostos, ou seja, considere o sistema  $A[a], B[b], C[c]$ . Seja  $I$  o C.M. desse sistema. Você merece um prêmio se descobrir quem é  $I$ ...



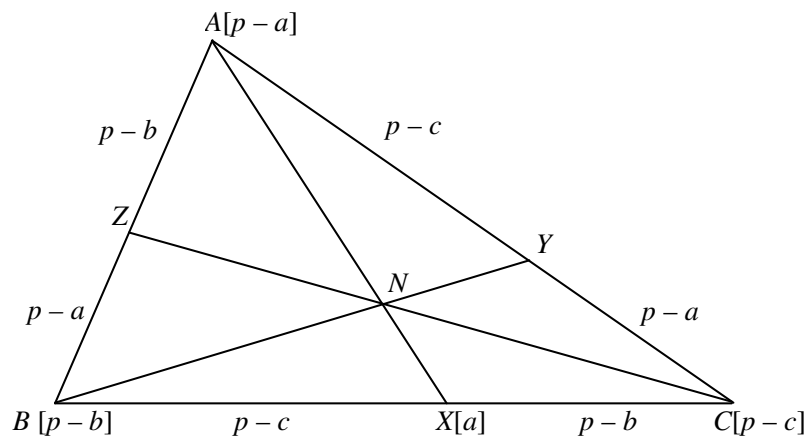
O raciocínio é igual ao do exemplo anterior. O C.M. de  $B[b]$  e  $C[c]$  é um ponto  $J$  no lado  $BC$  tal que  $\frac{JB}{JC} = \frac{c}{b}$ , ou seja,  $J$  é o pé da bissetriz interna. Logo  $I$  será o

C.M. de  $A[a]$  e  $J[b+c]$ . Tiramos daí que  $I \in AJ$  e que  $\frac{AI}{IJ} = \frac{b+c}{a}$ .

Sejam  $BL$  e  $CK$  bissetrizes internas. De modo análogo poderíamos ter provado que  $I \in BL$  e que  $I \in CK$ , o que mostra que  $I$  é o incentro. As razões saem de graça:

$$\frac{BI}{IL} = \frac{a+c}{b}; \quad \frac{CI}{IK} = \frac{a+b}{c}$$

**Exemplo 3:** Seja  $p$  o semiperímetro do triângulo. Agora uma novidade: o sistema de massas será  $A[p-a], B[p-b], C[p-c]$ . Seja  $N$  o C.M. desse sistema. Você realmente merece um prêmio se descobrir quem é o  $N$ .



O C.M. de  $B[p-b]$  e  $C[p-c]$  é um ponto  $X$  sobre o lado  $BC$  tal que  $\frac{BX}{CX} = \frac{p-c}{p-b}$ , donde concluímos que  $BX = p-c$  e que  $CX = p-b$ . Este ponto  $X$  é onde o exincírculo relativo ao lado  $a$  toca este lado (como referência sobre este fato podemos indicar [1]). Logo  $N$  será o C.M. de  $A[p-a]$  e  $X[p-c + p-b] = X[a]$ .

Portanto  $N \in AX$  e  $\frac{AN}{NX} = \frac{a}{p-a}$ . Se considerarmos os pontos  $Y$  e  $Z$  onde os exincírculos relativos aos lados  $b$  e  $c$  tocam estes lados, respectivamente, podemos mostrar que  $N \in BY$  e  $N \in CZ$ . Conclusão:  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  são concorrentes em  $N$  que é chamado *Ponto de Nagel* do  $\Delta ABC$ . Ora, ora, poderíamos saber disso usando o teorema de Ceva (veja por exemplo [3]). Calma, o melhor ainda está por vir. As razões aqui são cortesias para nós:

$$\frac{BN}{NY} = \frac{b}{p-b}; \quad \frac{CN}{NZ} = \frac{c}{p-c}$$

O próximo resultado foi o que nos motivou a escrever este artigo. Ele mostra toda a beleza desta teoria, enquanto outros métodos são ineficazes. Para uma demonstração

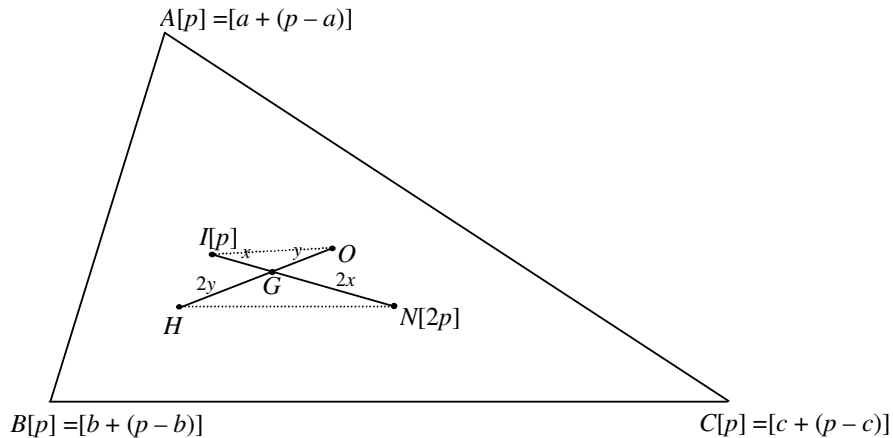
completa (e bastante extensa) do próximo resultado usando a geometria plana clássica, veja [2].

**Teorema 3.1.** *No  $\Delta ABC$  considere os pontos  $I, G$  e  $N$  como definidos acima. Vale então que  $I, G$  e  $N$  são colineares e ainda:*

$$\frac{NG}{GI} = \frac{2}{1}$$

**Prova:** Seja  $p$  o semiperímetro do triângulo. Considere um sistema de massas  $A[p], B[p], C[p]$ . Já sabemos que o C.M. desse sistema é o baricentro  $G$ . Fazendo uso da proposição 1, podemos dividir esse sistema em dois subsistemas  $S_1 = A[a], B[b], C[c]$  e  $S_2 = A[p-a], B[p-b], C[p-c]$ . O C.M. de  $S_1$  é o incentro  $I$  com massa  $[a+b+c]=[2p]$ , enquanto o C.M. de  $S_2$  é o ponto da Nagel  $N$  com massa  $[p-a+p-b+p-c]=[p]$ . Logo  $G$  será o C.M. de  $I[2p], N[p]$  o que implica  $I, N, G$  colineares (com  $G$  entre  $I$  e  $N$ ) e ainda pela equação do momento linear:

$$\frac{NG}{GI} = \frac{2}{1}$$



**Corolário 3.1.1.** *Em um triângulo qualquer  $ABC$ , sejam  $I, G, N$  como acima,  $O$  o circuncentro e  $H$  o ortocentro. Então os pontos  $I, O, N, H$  formam um trapézio.*

**Prova:** Sabemos que  $H, G, O$  são colineares (reta de Euler) e que:

$$\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1}$$

Segue então do teorema anterior que  $IO$  é paralelo a  $NH$ , logo  $I, O, N, H$  formam um trapézio, cujo encontro das diagonais é  $G$ .

Podemos aplicar estes métodos do centro de massa em problemas que envolvem o ortocentro, o baricentro e os exincentros, para saber que massas devem estar nos vértices, veja o problema 1. Divirta-se resolvendo estes problemas. Vale usar tudo, mas experimente a sua mais nova arma.

#### 4. PROBLEMAS RELACIONADOS

##### Problema 1

(a) Verifique que o sistema  $A\left[\frac{a}{\cos A}\right], B\left[\frac{b}{\cos B}\right], C\left[\frac{c}{\cos C}\right]$  tem como C.M. o ortocentro do triângulo.

(b) Verifique que o sistema  $A[\text{sen}2A], B[\text{sen}2B], C[\text{sen}2C]$  tem como C.M. o circuncentro.

(c) Prove que o C.M. do sistema  $A[-a], B[b], C[c]$  é o exincentro relativo ao lado  $a$ . Verifique os análogos para os outros exincentros.

##### Problema 2

Sejam  $A, B, C, D$  pontos concíclicos. Sejam  $G_A, G_B, G_C, G_D$  os baricentros dos triângulos  $BCD, ACD, ABD$  e  $ABC$ . Prove que  $G_A, G_B, G_C, G_D$  são concíclicos.

##### Problema 3

Sejam  $ABCD$  um quadrilátero no espaço de forma que  $AB, BC, CD$  e  $DA$  sejam tangentes a uma esfera  $\gamma$  nos pontos  $X, Y, Z, W$ . Prove que estes pontos são coplanares.

##### Problema 4

Sejam  $X, Y$  e  $Z$  os pontos onde o incírculo do triângulo  $ABC$  toca os lados  $BC, AC$  e  $AB$ , respectivamente. Mostre que o incentro de  $\Delta ABC$  está sobre a reta que passa pelos pontos médios de  $BC$  e  $AX$ . (veja uma solução em [5]).

**Problema 5**

Considere 6 pontos em uma dada circunferência. Tomamos três destes pontos e marcamos seu baricentro  $G_1$ . Em seguida, marcamos o ortocentro  $H_2$  dos outros três pontos e traçamos o segmento  $G_1H_2$ . Mostre que todos os  $\binom{6}{3} = 20$  possíveis segmentos  $G_1H_2$  passam por um ponto fixo.

**Problema 6**

Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo inscrito com os lados opostos  $AD$  e  $BC$  se encontrando em  $P$ , e  $AB$  e  $CD$  em  $Q$ . Prove que o quadrilátero  $EFGH$ , determinado em  $ABCD$  pelas bissetrizes de  $\sphericalangle P$  e  $\sphericalangle Q$ , é um losango.

**Problema 7**

Seja  $PABC$  um tetraedro e sejam  $A_1, B_1, C_1$  os pontos médios das arestas  $BC, AC$  e  $AB$ , respectivamente. Seja  $\alpha$  um plano paralelo à face  $ABC$  que intercepta as arestas  $PA, PB, PC$  nos pontos  $A_2, B_2, C_2$  respectivamente.

- (a) Prove que  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  concorrem em um ponto  $D$ .
- (b) Determine o lugar geométrico dos pontos  $D$  quando  $\alpha$  varia.

**Problema 8**

(a) Considere 4 pontos que formam um sistema ortocêntrico (cada um é o ortocentro do triângulo formado pelos outros três). Ponha massas iguais nesses 4 pontos. Prove que o centro de massa é o centro do círculo dos nove pontos de cada um desses 4 triângulos (veja [1] e o problema proposto No. 107 na página 61).

(b) (Beltrami) Prove que o C.M. do sistema formado pelo incentro e pelos três exincentros com massas iguais é o circuncentro.

**Problema 9**

Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo inscrito com os lados opostos  $AD$  e  $BC$  se encontrando em  $P$ , e  $AB$  e  $CD$  em  $Q$ . Prove que as bissetrizes dos ângulos  $\sphericalangle P$  e  $\sphericalangle Q$  e a reta que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero  $ABCD$  (diagonal de Euler) concorrem.

**Problema 10**

(Banco IMO/97) No  $\triangle ABC$  acutângulo, sejam  $AD$ ,  $BE$  alturas e  $AP$ ,  $BQ$  bissetrizes internas. Sejam  $I$  e  $O$  o incentro e o circuncentro do triângulo  $ABC$ , respectivamente. Prove que os pontos  $D$ ,  $E$  e  $I$  são colineares se e somente se  $P$ ,  $Q$  e  $O$  são colineares.

**Agradecimentos:** A nosso amigo Carlos Shine pela primeira versão digitada deste material, na Semana Olímpica de 2001, em Salvador - BA.

**REFERÊNCIAS:**

- [1] Coxeter, H.S.M.; Greitzer, S.L., *Geometry Revisited*, MAA, 1967.
- [2] Johnson, R.A., *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, 1960.
- [3] Castro, L.G.M., *Introdução à Geometria Projetiva*, *Eureka!*, vol 8, pp 16-27, 2000.
- [4] Honsberger, R., *Mathematical Morsels*, MAA, 1978.
- [5] Moreira, C.G.T., Wagner, E., *10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática*, OEI, 1996.



**Você sabia...**

Que  $28433 \cdot 2^{7830457} + 1$  é primo?

Este número de 2357207 dígitos é o quinto maior primo conhecido, e foi descoberto em 30/12/2004.

Isto mostra que 28433 não é um número de Sierpinski (isto é, um natural ímpar  $k$  tal que  $k \cdot 2^n + 1$  é composto para todo  $n \in \mathbb{N}$ ; veja a *Eureka!* 18, pág 61), reduzindo para 10 o número de naturais menores que 78557 (que é o menor número de Sierpinski conhecido), sobre os quais não se sabe se são números de Sierpinski ou não (conjectura-se que nenhum deles seja): 4847, 10223, 19249, 21181, 22699, 24737, 27653, 33661, 55459 e 67607.

Veja: <http://www.seventeenorbust.com> para mais informações (inclusive sobre como ajudar a provar essa conjectura).