DOS PROBLEMAS DE TERMODINAMICA CLASICA

Eduardo González y Ricardo Hernández*.

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas. Edificio 9, Unidad Profesional Zacatenco, 07738 México, D.F.

RESUMEN

En los cursos de Termodinámica Clásica es común demostrar que la eficiencia del ciclo de Carnot es independiente de la sustancia de trabajo, haciendo el cálculo directo para diversas sustancias como el gas ideal, el sólido paramagnético y la radiación de cuerpo negro. Aquí demostramos que, aunque la eficiencia del ciclo Otto no tiene el mismo comportamiento universal que el ciclo de Carnot, conserva su forma general cuando la sustancia de trabajo es un sólido paramagnético que obedece la ecuación de Curié. Presentamos, además, una demostración formal de como el cambio en la entropía del universo termodinámico tiende a cero cuando se calienta un cuerpo desde una temperatura inicial a otra final mediante un número infinito de almacenes térmicos.

ABSTRACT

In classical thermodynamics courses is common to demonstrate that the Carnot´s efficiency does not depend on the working fluid employed, through direct calculations for several systems as the ideal gas, the paramagnetic solid and the black body radiation. In this work, we show that although the efficiency of an Otto cycle has not the same universal behavior as the Carnot´s cycle, however it maintains its general form when the working substance is a paramagnetic solid which obeys the Curie´s equation. We also present a formal demonstration about how the entropy change of the thermodynamic universe tends to zero, when a body is heated from an initial temperature up to a final one by means of an infinite number of thermal reservoirs.

INTRODUCCION

El ciclo Otto para gas ideal con capacidades caloríficas constantes supone, básicamente, la realización de cuatro procesos cuasi-estáticos, en el siguiente orden: una compresión adiabática de un volumen V_1 a uno V_2 con un incremento en la temperatura, aumento isócoro de la temperatura y presión, expansión adiabática de V_2 a V_1 con un descenso en la temperatura y, finalmente, descenso isócoro de la temperatura y presión. Bajo estas condiciones, la eficiencia de este ciclo es:

$$\eta = 1 - r^{1-\gamma} \qquad (1)$$

donde $r = V_2/V_1$ que se conoce como la razón de compresión y $\gamma = C_P / C_V$.

Cuando un gas ideal experimenta un proceso adiabático cuasi-estático, su volumen V y temperatura T se relacionan de la siguiente manera:

$$TV^{\gamma-1} = cte. \qquad (2)$$

La ecuación de Curié para el sólido paramagnético, relaciona la magnetización M, el campo magnético externo aplicado a la muestra H y la temperatura T de ésta, de la siguiente manera:

$$M = C_C \frac{H}{T} \qquad (3)$$

En esta expresión, C_C es una constante de proporcionalidad llamada de Curié. Cabe mencionar que (3) es válida sólo para valores bajos de H/T.

Por otro lado, la Segunda Ley de la Termodinámica establece que el cambio de la entropía del universo termodinámico es un número no negativo, el cual es cero siempre que el proceso efectuado sea reversible.

DESARROLLO.

CICLO OTTO PARA UN SOLIDO PARAMAGNETICO.

En la Figura 1 se muestra la geometría del ciclo en el plano HM. La primera Ley de la Termodinámica aplicada a este ciclo se escribe como sigue:

$$\Delta U = Q_{neto} - W_{ciclo} = 0, \qquad (4)$$

pues después de un ciclo la energía interna de la sustancia no cambia. Además,

$$Q_{neto} = |Q_1| - |Q_2|. \qquad (5)$$

Donde $|Q_1|$ es la cantidad de calor cedida al sistema por una fuente externa en la etapa $1 \to 2$, por su parte, $|Q_2|$ es el calor perdido por el sistema el proceso $3 \to 4$. De esta forma, la eficiencia es:

$$\eta_M = \frac{W_{ciclo}}{|Q_1|} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|}. \qquad (6)$$

Digamos que T_i es la temperatura correspondiente al punto i(= 1,...,4) (Fig. 1) y supongamos que el valor de la capacidad calorífica a magnetización constante, C_M, permanece fijo.

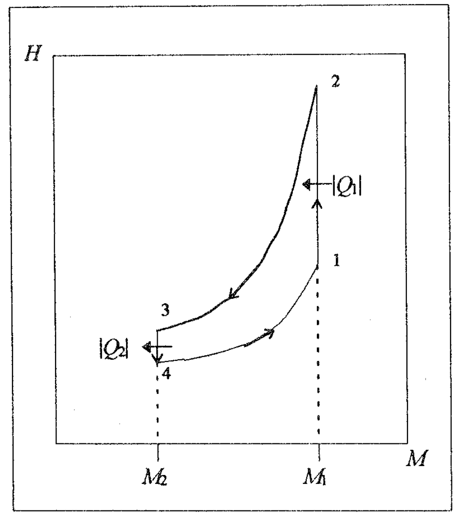

FIGURA 1. Esquema del ciclo en el plano HM. Las unidades son arbitrarias.

Entonces,

$$|Q_1| = \left| \int_{T_1}^{T_2} C_M dT \right| = C_M (T_2 - T_1) \qquad (7)$$

$$|Q_2| = \left| \int_{T_3}^{T_4} C_M dT \right| = C_M (T_3 - T_4) \qquad (8)$$

Sustituyendo (7) y (8) en (6), la ecuación de la eficiencia adquiere el siguiente aspecto:

$$\eta_M = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4} \qquad (9)$$

Encontremos una relación entre M y T, cuando la sustancia experimenta un proceso adiabático cuasi-estático. Para este caso, la primera Ley de la Termodinámica tiene la siguiente forma:

$$dU = -d'W_{mag} = H\,dM \qquad (10)$$

Donde la d' denota diferencial inexacta.

Además,

$$dU = C_M\,dT \tag{11}$$

Combinando (10), (11) y (3), e integrando y simplificando resulta:

$$Te^{-\alpha M^2} = cte.\ ;\ \text{con}\ \alpha = \frac{1}{2C_M C_C} \tag{12}$$

De esta forma, para el proceso adiabático cuasi-estático 2→3 (Figura 1) se satisface lo siguiente:

$$T_2 e^{-\alpha M_1^2} = T_3 e^{-\alpha M_2^2}. \tag{13}$$

Análogamente, para el proceso 4→1, también adiabático, se tiene que:

$$T_1 e^{-\alpha M_1^2} = T_4 e^{-\alpha M_2^2}. \tag{14}$$

Restando miembro a miembro (14) de (13) y rearreglando, resulta:

$$\frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} = \left(\frac{e^{M_2^2}}{e^{M_1^2}}\right)^{\alpha}. \tag{15}$$

Sustituyendo (15) en (9), se tiene que la eficiencia del ciclo es:

$$\eta_M = 1 - \left(\frac{e^{M_2^2}}{e^{M_1^2}}\right)^{\alpha}. \tag{16}$$

O bien, si definimos el cociente de exponenciales cuadráticas de la siguiente manera

$$\rho = \frac{e^{M_2^2}}{e^{M_1^2}}, \tag{17}$$

podremos, finalmente, escribir la eficiencia en una forma más simple, a saber:

$$\eta_M = 1 - \rho^{\alpha}. \tag{18}$$

CAMBIO DE LA ENTROPÍA DE UN CUERPO EN UN NÚMERO INFINITO DE PASOS.

El problema consiste en elevar la temperatura de un cuerpo A, con C_P constante, desde un valor inicial T_0 a uno final T, poniéndolo en contacto con un número n de almacenes térmicos, en forma tal que sólo estará en contacto con el almacén j+1 después de que A haya alcanzado el equilibrio térmico con el almacén j.

Supongamos que la temperatura del k-ésimo almacén es

$$T_k = \frac{k(T - T_0)}{n} + T_0;\quad k=1,\ldots,n. \tag{19}$$

De esta forma, el cambio en la entropía del cuerpo después de elevar su temperatura de T_{k-1} a T_k es:

$$\Delta S_k^A = \int_{T_{k-1}}^{T_k} \frac{d'Q}{T} = C_P\, ln \frac{T_k}{T_{k-1}} \tag{20}$$

Por otro lado, el cambio en la entropía ΔS_k del almacén k es:

$$\Delta S_k = \frac{Q_k}{T_k}, \tag{21}$$

donde Q_k es la cantidad de calor que el almacén cede a A, entonces:

$$Q_k = -C_P\left(T_k - T_{k-1}\right). \tag{22}$$

Y sustituyendo (22) en (21) se obtiene:

$$\Delta S_k = -C_P \frac{(T_k - T_{k-1})}{T_k} \qquad (23)$$

Por lo tanto, el cambio en la entropía del universo termodinámico después del paso k es:

$$\Delta S_{UT}^k = C_P \left(ln \frac{T_k}{T_{k-1}} + \frac{T_{k-1}}{T_k} - 1 \right) \qquad (24)$$

Ahora bien, debido a que la entropía es una variable termodinámica aditiva, el cambio total de la entropía del universo termodinámico será la suma de las variaciones que ella sufra después de efectuado cada paso de calentamiento, es decir,

$$\Delta S_{UT}{}^n = C_p \sum_{k=1}^{n} \left(ln \frac{T_k}{T_{k-1}} + \frac{T_{k-1}}{T_k} - 1 \right) \qquad (25)$$

Analizando la expresión anterior, notamos que los términos de la primera suma son las diferencias entre los logaritmos de términos correspondientes a índices consecutivos, por tanto, se anulan a pares excepto para el primer y último índices. De esta manera, (25) debe escribirse como:

$$\Delta S_{UT}{}^n = C_P \, ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + C_P \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T_{k-1}}{T_k}\right) - nC_P \qquad (26)$$

Por otro lado, de la ecuación (19) se obtiene el cociente T_{k-1} / T_k en términos de T y T_0, es decir:

$$\left(\frac{T_{k-1}}{T_k}\right) = 1 - \frac{T - T_0}{k(T - T_0) + nT_0}, \qquad (27)$$

simplificando y puesto que $k \leq n$:

$$1 - \frac{T_{k-1}}{T_k} \geq \frac{k}{n} - \frac{1}{kn} + \frac{k}{n^2}\left(\frac{T}{T_0}\right) \qquad (28)$$

Utilizando la expansión de Taylor para la función logaritmo, dada por:

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

y combinando con (19), resulta:

$$ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}\left(ln\, n + \frac{T}{T_0}\right). \qquad (29)$$

Por otro lado, la constante γ de Euler se define como (Arfken, 1970):

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - ln\, n\right) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n \qquad (30)$$

Finalmente, sustituyendo (28), (29) y (30) en (26), se obtiene una cota superior para el cambio en la entropía del universo termodinámico después de realizados los n calentamientos, a saber:

$$\Delta S_{UT}{}^n \leq \frac{C_P}{n}\left(\frac{T}{T_0} - \gamma_n\right) \qquad (31)$$

En consecuencia, cuando n tiende a infinito se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta S_{UT}{}^n = 0 \qquad (28)$$

RESULTADOS Y DISCUSION.

CICLO OTTO

Si comparamos (18) con (1) notamos que, para cada una de las sutancias de trabajo, la eficiencia del ciclo Otto se escribe como la diferencia entre la unidad y un número que es el cociente de los valores que toma cierta función en cada uno de los valores extremos que alcanza la variable extensiva (*V* para el gas ideal o *M* para el sólido paramagnético) que varía mientras la sustancia experimenta un proceso adiabático del ciclo. Más aún, después de analizar (2) y (12), notamos que, para ambas sustancias, durante este tipo de proceso la temperatura es proporcional a esa cierta función; que para el gas ideal es una función potencial del volumen y para el sólido paramagnético, es una exponencial cuadrática de la magnetización.

Para el segundo problema hemos llegado a resumir que si se aproxima lentamente la temperatura de un cuerpo a otra mayor, el cambio de la entropía del universo termodinámico producido por tal proceso es cero, bajo la suposición de que el cambio de la temperatura de los almacenes es despreciable y que la capacidad calorífica es constante.

CONCLUSIONES.

Para el primer problema tratado, notamos que si bien la eficiencia del ciclo Otto no posee una forma universal, que es el caso del ciclo de Carnot, sí la conserva en general; ya que para ambas sustancias de trabajo, sólo depende de los valores extremos que alcanza la variable extensiva que, al cambiar, hace posible la producción de trabajo.

Finalmente cuando se eleva la temperatura de la manera ejemplificada en el segundo problema, se afirma que el calentamiento cuasi-estático de cualquier cuerpo, produce un cambio nulo en la entropía del universo. Lo anterior reafirma nuestros conocimientos, sobre el comportamiento natural de la variable *S* (entropía), ante los procesos reversibles, que es sabido por el segundo principio de la Termodinámica, que cualquier proceso reversible no produce modificación alguna a esta variable.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

Arfken G., 1970, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press.

Zemansky M.K., 1979, *Calor y Termodinámica*, Edit. Aguilar.