Topologie/*Topology*

Formules locales pour les classes de Pontrjagin topologiques

Alain CONNES, Dennis SULLIVAN et Nicolas TELEMAN

Résumé – Nous donnons des formules locales, en termes de cycles d'Alexander Spanier, pour les classes de Pontrjagin rationnelles des variétés quasi conformes et des variétés topologiques de dimension non égale à 4.

Local formulas for topological Pontrjagin classes

Abstract – *We give local formulae in terms of straight cycles (Alexander Spanier cycles), for the rational Pontrjagin classes of quasi conformal manifolds and for topological manifolds of dimension not equal to* 4.

INTRODUCTION. – Dans cette Note nous obtenons des formules locales pour les classes de Pontrjagin des variétés topologiques. Ces formules apparaissent *a posteriori* comme découlant de la question élémentaire suivante de la théorie de de Rham des variétés différentiables. Considérons, pour une variété compacte orientée M de dimension paire, $2l$, la théorie de Hodge des formes différentielles de degré l. Nous noterons γ la $\mathbb{Z}/2$ graduation donnée par l'opération $*$, associée à une structure conforme sur M, sur l'espace $\mathfrak{h}$ des formes de degré l de carré intégrable. La question considérée est la suivante :

« Existe-t-il un opérateur F de carré 1 ($F^2=1$) dans $\mathfrak{h}$ qui soit égal à 1 sur les formes exactes et anticommute à γ ».

La réponse à cette question est positive si et seulement si la signature de la variété M est nulle. Nous localisons cette question sur tout voisinage U de la diagonale dans $M \times M$ en exigeant que le support de l'opérateur F soit contenu dans U. Nous associons une obstruction à ce problème, formulée comme un nombre fini de cycles $(Z_{2k})_{k=0,\dots,l}$ d'Alexander Spanier sur M, construits par des formules locales. Nous montrons enfin que ces cycles donnent les composantes du genre L de Hirzebruch-Thom de la variété M. Alors que les formules usuelles pour ces classes caractéristiques invoquent la courbure de Weyl et donc deux dérivées de la métrique Riemannienne, les formules que nous obtenons sont valables pour toute structure conforme mesurable bornée et s'appliquent ainsi à toute variété quasi conforme. Un résultat de [1] assure l'existence et l'unicité à isotopie près d'une structure quasi conforme sur toute variété topologique compacte M de dimension non égale à 4. Le travail ci-dessous est un aboutissement des idées de [2] et [3], il utilise de manière essentielle les résultats de [4], [5].

DÉCOMPOSITION DE HODGE U-LOCALE. – Soient Ω_1 et Ω_2 des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $h:\Omega_1 \to \Omega_2$ un homéomorphisme. Rappelons que h est dit *quasi conforme* ssi il existe $K<\infty$ tel que

$$(1) \qquad K(x)=\limsup_{r\to 0} \frac{\operatorname{Sup}\{|h(x)-h(y)|;\, y\in\Omega_1,\, |x-y|=r\}}{\operatorname{Inf}\{|h(x)-h(y)|;\, y\in\Omega_1\, |x-y|=r\}} \leq K, \qquad \forall x\in\Omega_1.$$

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/93/03170521 $ 2.00 © Académie des Sciences

Un tel homéomorphisme est différentiable presque partout et est absolument continu [6].

Une variété quasi conforme est une variété topologique munie d'un atlas quasi conforme. Elle possède une classe de mesure, la classe de Lebesgue, et un fibré tangent qui est un fibré vectoriel *mesurable* noté TM.

Soient g_0, g_1 deux structures Euclidiennes sur l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^n$. La distance conforme, $d(g_0, g_1)$ est définie par :

$$d(g_0, g_1)=\log \frac{\operatorname{Sup}\{\|v\|_{g_1};\ v\in E,\ \|v\|_{g_0}=1\}}{\operatorname{Inf}\{\|v\|_{g_1};\ v\in E,\ \|v\|_{g_0}=1\}}. \tag{2}$$

Cette distance est inchangée si l'on remplace g_i par $\lambda_i g_i$, $\lambda_i>0$, de sorte qu'elle ne dépend que des classes conformes $[g_0]$ et $[g_1]$. Une structure Riemannienne (resp. conforme) mesurable sur une variété quasi conforme M est par définition la donnée d'une métrique Euclidienne mesurable (resp. de sa classe conforme) sur le fibré vectoriel mesurable TM.

Définition 1. — Soit M une variété quasi conforme. Une structure conforme mesurable $[g]$ sur M est dite **bornée** ssi pour toute carte locale quasi conforme ρ, la distance conforme de $\rho^{-1*}[g]$ à la métrique Euclidienne est localement bornée.

L'existence d'une structure conforme mesurable bornée, sur toute variété quasi conforme est immédiate. Soient M une variété quasi conforme compacte de dimension paire $2l$ et $[g]$ une structure conforme mesurable bornée sur M. Soit $\mathfrak{h}=L^2(M, \Lambda^l T^*_{\mathbb{C}})$ l'espace de Hilbert des sections de carré intégrable du fibré vectoriel complexe mesurable $\Lambda^l T^*_{\mathbb{C}}$, puissance extérieure l-ième du dual $T^*_{\mathbb{C}}$ de TM. Supposons M orientée. Le produit scalaire dans $\mathfrak{h}$ est déterminé par l'opérateur $*$ associée à $[g]$ par l'égalité :

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle=\int_M \omega_1 \wedge *\bar{\omega}_2, \qquad \forall\, \omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{h}. \tag{3}$$

Soit γ l'involution $\mathbb{C}$ linéaire autoadjointe de $\mathfrak{h}$ déterminée par l'égalité :

$$\gamma\omega=i^l *\omega, \qquad \forall\, \omega\in\mathfrak{h}. \tag{4}$$

L'espace localement convexe sous-jacent à $\mathfrak{h}$ est indépendant du choix de la structure conforme mesurable bornée $[g]$ et nous notons Im d le sous-espace fermé de $\mathfrak{h}$ engendré par les $d\omega$, où ω est une forme différentielle de degré $l-1$ sur M, à support dans un domaine de carte locale, et de classe C^∞ dans cette carte,

Pour tout $p\in[1, \infty[$, les conditions suivantes définissent des idéaux bilatères d'opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert, où l'on note $\mu_n(T)$ la n-ième valeur caractéristique de l'opérateur compact T, $\mu_n(T)=n$-ième valeur propre de $|T|=(T^*T)^{1/2}$:

$$\mathcal{L}^p(\mathfrak{h})=\left\{T \text{ compact};\ \sum_1^\infty \mu_n(T)^p<\infty\right\}, \tag{5}$$

$$\mathcal{L}^{(p,\infty)}(\mathfrak{h})=\left\{T \text{ compact};\ \mu_n(T)=O(n^{-1/p})\right\}. \tag{6}$$

Soient enfin T un opérateur borné dans $\mathfrak{h}=L^2(M, \Lambda^l T^*_{\mathbb{C}})$ et U un voisinage de la diagonale dans $M\times M$. Nous dirons que Support(T)$\subset$U si pour tout ouvert V de M on a :

$$\omega\in\mathfrak{h},\ \ \operatorname{Support}(\omega)\subset V \ \Rightarrow\ \operatorname{Support}(T\omega)\subset U\circ V$$

où $U\circ V=\{x\in M;\ \exists\, y\in V,\ (x, y)\in U\}$.

DÉFINITION 2. — Soit U un voisinage de la diagonale dans $M \times M$. Une décomposition de Hodge U-locale est un opérateur H dans $L^2(M, \Lambda^l T^*_{\mathbb{C}})$ tel que :

α) $H^2 = 1$,

β) Support $H \subset U$,

γ) $(H - \mathrm{id})/_{\mathrm{Im}\, d} \in \mathscr{L}^{(2l, \infty)}$,

δ) $H\gamma + \gamma H \in \mathscr{L}^1$.

On notera qu'aucune des conditions α) ... δ) n'utilise le produit scalaire dans $\mathfrak{h}$.

La donnée d'un opérateur H de carré 1 dans $\mathfrak{h}$ est équivalente à celle de deux sous-espaces fermés transverses :

$$E^{\pm} = \{\xi \in \mathfrak{h};\ H\xi = \pm \xi\}. \tag{7}$$

Si H est une décomposition de Hodge U-locale les sous-espaces fermés $E^{\pm}$ correspondants sont des perturbations compactes des sous-espaces $\mathrm{Im}\, d$ et $\gamma(\mathrm{Im}\, d)$ de la décomposition de Hodge globale.

HOMOLOGIE D'ALEXANDER SPANIER. — Soient X un espace compact, d un entier, et σ une mesure totalement antisymétrique sur l'espace produit X^{d+1}. Une telle mesure, $\sigma \in A_d$, est uniquement déterminée par la valeur de $\sigma(\varphi)$ pour toute fonction borélienne bornée antisymétrique φ.

Nous noterons $\delta : A_d \to A_{d-1}$ l'opérateur défini par l'égalité :

$$(\delta\sigma)(\varphi) = \sum_0^d (-1)^j \int \varphi(x_0, x_1, \ldots, \check{x}_j, \ldots, x_d)\, d\sigma, \qquad \forall \varphi. \tag{8}$$

Soit U un voisinage de la diagonale dans $X \times X$. Nous dirons que $\sigma \in A_d$ est U-locale ssi le support de σ est contenu dans :

$$\{(x_j) \in X^{d+1};\ (x_i, x_j) \in U,\ \forall i, j \in \{0, 1, \ldots, d\}\}. \tag{9}$$

On définit de manière évidente le complexe (A_U, δ) des chaînes U-locales. Nous parlerons de cycle d'Alexander Spanier U-local et de sa classe d'homologie pour désigner les cycles de ce complexe et leur homologie.

Soient (X, ν) un espace mesurable et Λ un fibré vectoriel mesurable Hermitien sur X. Rappelons que tout opérateur de Hilbert-Schmidt $T \in \mathscr{L}^2(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{h} = L^2(X, \Lambda)$ est, de manière unique, de la forme :

$$(T\xi)(x) = \int k(x, y)\, \xi(y)\, d\nu(y), \qquad \forall \xi \in \mathfrak{h} \tag{10}$$

où k est une section mesurable sur $X \times X$ de $\mathrm{Hom}(\Lambda_y, \Lambda_x)$, telle que :

$$\int_{X \times X} \mathrm{trace}(k(x, y)^* k(x, y))\, d\nu(x)\, d\nu(y) < \infty. \tag{11}$$

De plus la valeur de cette intégrale est le carré de la norme de Hilbert-Schmidt $\|T\|^2_{HS}$.

En particulier un tel noyau k définit pour tout $d \geqq 1$ une mesure sur X^{d+1} par l'égalité :

$$\sigma(\varphi) = \int_{X^{d+1}} \mathrm{trace}(k(x_0, x_1)\, k(x_1, x_2) \ldots k(x_d, x_0))\, \varphi(x_0, \ldots, x_d) \prod d\nu(x_i). \tag{12}$$

On a en effet l'inégalité :

$$|\sigma(\varphi)| \leqq \|k\|^{d+1}_{HS}\, \|\varphi\|_\infty, \qquad \forall \varphi \in L^\infty(X^{d+1}, \nu^{d+1}) \tag{13}$$

qui montre de plus que σ est absolument continue par rapport à la mesure produit ν^{d+1}. Si de plus $T \in \mathscr{L}^1$ la formule ci-dessus garde un sens pour $d = 0$.

Toutes ces expressions gardent un sens en terme de 1/2 densités et ne nécessitent pas de fixer le choix de la mesure ν dans sa classe de mesures, ce qui permet de l'éliminer. Nous noterons $\operatorname{tr}(\Lambda^{d+1} k)$ l'unique mesure totalement antisymétrique, $\sigma \in A^d$ qui vérifie (12) pour tout φ totalement antisymétrique.

Construction locale des classes de Pontrjagin. — Énonçons le résultat principal de cette Note :

Théorème 3. — *Soient* M *une variété quasi conforme compacte orientée de dimension paire* $2l$, γ *la* $\mathbb{Z}/2$ *graduation de* $\mathfrak{h}=L^2(M, \Lambda^l T^*_{\mathbb{C}})$ *associée à une structure conforme mesurable bornée et* U *un voisinage de la diagonale dans* $M \times M$.

1) *Il existe une décomposition de Hodge* U-*locale* H.

2) *Soient* H *une décomposition de Hodge* U-*locale*, $k = H\gamma H + \gamma$, *et* d *un entier pair. La mesure* $\sigma = \operatorname{tr}(\Lambda^{d+1} k)$ *est alors un cycle d'Alexander Spanier* U^{0d} *local.*

3) *La classe d'homologie de* $\sigma = \operatorname{tr}(\Lambda^{d+1} k)$ *parmi les cycles* U^{0q} *locaux,* $q = 2d(3l+2)$ *est indépendante du choix de* H.

4) *La classe d'homologie de* σ *est égale à* $\lambda_d\, L_{2l-d} \cap [M]$ *où* L_k *est la composante de degré* k *de la classe de Hirzebruch-Thom* $L_k(M) \in H^k(M, \mathbb{C})$ *et où*

$$\lambda_{2m} = 2^{2n+1}(2\pi i)^{-m}\frac{m!}{(2m)!}, \qquad d = 2m.$$

La construction (1) s'effectue localement grâce à des cartes locales quasi conformes $\rho_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{2l}$.

Corollaire 4. — *Soit* M *une variété quasi conforme compacte orientée de dimension* $4q$. *La construction du théorème* 3 *pour* $d=0$ *définit de manière locale sur* M *une mesure* σ *dans la classe de Lebesgue telle que*

$$\int_M d\sigma = \text{Signature } M.$$

Explicitons la construction du théorème 3. Considérons la sphère S^{2l} munie de sa structure conforme standard notée $[g_0]$. Soit $[g]$ une structure conforme mesurable bornée arbitraire sur S^{2l}. Nous noterons γ_0 (resp. γ) la $\mathbb{Z}/2$ graduation de $\mathfrak{h}=L^2(S^{2l}, \Lambda^l T^*_{\mathbb{C}})$ associée à $[g_0]$ (resp. $[g]$) et F_0 (resp. F) l'opérateur dans $\mathfrak{h}$ qui vaut 1 sur $\operatorname{Im} d$ et -1 sur $\gamma_0(\operatorname{Im} d)$ [resp. $\gamma(\operatorname{Im} d)$]. Il existe un unique endomorphisme mesurable μ de $\Lambda^l T^*_{\mathbb{C}}$ sur S^{2l} qui vérifie les conditions suivantes :

a) $\mu\gamma_0 = -\gamma_0\mu$, $\mu = \mu^*$,

b) $\|\mu\|_\infty < 1$,

c) $\gamma = \gamma_0(1+\mu)/(1-\mu)$,

d) $F = (1+\mu)^{-1}(F_0+\mu)F_0(F_0+\mu)^{-1}(1+\mu)$.

Les conditions *b*) et *d*) montrent que pour tout idéal bilatère J d'opérateurs dans $\mathfrak{h}$ et toute fonction $f \in L^\infty(S^{2l})$ on a

(14) $$[F_0, f] \in J \iff [F, f] \in J.$$

Soit $[g]$ la structure conforme mesurable bornée de M. Considérons un recouvrement $M = \bigcup V_\alpha$ par des domaines de cartes locales quasi conformes :

(15) $$\rho_\alpha : \quad V_\alpha \to S^{2l}.$$

Pour chaque α, soient g_α une structure conforme mesurable bornée sur S^{2l} qui coïncide avec $\rho_\alpha^{-1*}[g]$ sur $\rho_\alpha(V_\alpha)$ et F_α l'opérateur associé dans $L^2(S^{2l}, \Lambda^l T^*_{\mathbb{C}})$. L'implication (14) appliquée à F_α et à l'idéal $J = \mathscr{L}^{(2l,\infty)}$ permet d'utiliser une partition de l'unité pour recoller les opérateurs F_α. On obtient ainsi, pour tout voisinage V de la diagonale dans $M \times M$ un opérateur S vérifiant les conditions suivantes :

(16) $\quad$ Support $S \subset V$, $\quad S^2 - 1 \in \mathcal{L}^{(2l, \infty)}$, $\quad S\gamma = -\gamma S$, $\quad (S-1)/\mathrm{Im}\, d \in \mathcal{L}^{(2l, \infty)}$.

Pour démontrer le 1) du théorème 3 on choisit V tel que $V^{0\,(3l)} \subset U$ et l'on modifie S vérifiant (16) de la manière suivante. Soient p et q les polynômes à une variable tels que :

(17) $$(1+t)^{-1/2} = q(t) + 0(t^{2l+1}), \qquad \text{degré } q = 2\,l.$$

(18) $$p(t) = (1+t)\,q(t)^2 - 1.$$

On pose alors, avec $\theta = S^2 - 1$:

(19) $$H = \gamma\, p(\theta) + \left(1 - \frac{1+\gamma}{2}\, p(\theta)\right) q(\theta)\, S.$$

On vérifie directement que $p(\theta) \in \mathcal{L}^1$ et que H est une décomposition de Hodge U-locale (définition 2).

La démonstration du 2) du théorème 3 utilise de manière essentielle la cohomologie cyclique [4] et sa relation avec la cohomologie d'Alexander Spanier décrite comme suit :

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$, le complexe cyclique (C_λ^*, b) de $\mathcal{A}$ est donné par :

(20) $$C_\lambda^n(\mathcal{A}) = \{\text{formes } n+1 \text{ linéaires sur } \mathcal{A} \text{ telles que } \tau(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0) = (-1)^n \tau(a_0, a_1, \ldots, a_n),\ \forall a_j \in \mathcal{A}\}$$

(21) $$(b\tau)(a_0, \ldots, a_{n+1}) = \sum_0^n (-1)^j \tau(a_0, \ldots, a_j a_{j+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau(a^{n+1} a^0, \ldots, a^n), \qquad \forall a^j \in \mathcal{A}.$$

Remarquons de plus que si $J \subset \mathcal{A}$ est un idéal bilatère et $B \subset \mathcal{A}$ une sous-algèbre telle que $J \cap B = \{0\}$, $J + B = \mathcal{A}$, l'extension naturelle par 0 sur B des cochaînes $\tau \in C_\lambda^n(J)$ telles que

(22) $$\left| \begin{array}{l} \tau(a_0, \ldots, a_j \delta, a_{j+1}, \ldots, a_n) = \tau(a_0, \ldots, a_j, \delta a_{j+1}, \ldots, a_n), \\ \qquad \forall j, \quad \forall a^i \in J, \quad \forall \delta \in B \end{array} \right.$$

commute avec l'opérateur de cobord b.

Considérons alors l'algèbre J des opérateurs traçables dans $\mathfrak{h}$, le lemme essentiel est le suivant :

Lemme 5 [4]. — 1) *L'égalité suivante définit un morphisme de complexes* $\tau : (A^*, \delta^*) \to (C_\lambda^*(J), b)$ *qui préserve la* U-*localité* :

$$\tau_\varphi(k_0, \ldots, k_n) = (-1)^n \int_{M^{n+1}} \operatorname{trace}(k_0(x_0, x_1)\, k_1(x_1, x_2) \ldots k_n(x_n, x_0))\, \varphi(x_0, \ldots, x_n), \qquad \forall \varphi \in A^n.$$

2) *Tout élément de l'image de* τ *vérifie la condition* (22) *relativement à l'algèbre* B *des endomorphismes mesurables du fibré* $\Lambda^l T_{\mathbb{C}}^*$.

La démonstration du 2) du théorème 3 résulte alors de l'invariance par homotopie de l'accouplement entre $K_0(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} = J + B$ et cohomologie cyclique.

La démonstration du 3) combine celles de 1) et 2). Enfin le 4) résulte facilement de [4] et de la comparaison des espaces classifiants BO et BTop.

Note remise le 30 juin 1993, acceptée le 5 juillet 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. SULLIVAN, Hyperbolic geometry and homeomorphisms, in *Geometric Topology, Proceed. Georgia Topology Conf.*, Athens, Georgia, 1977, p. 543-555.

[2] N. TELEMAN, The index theorem on topological manifolds, *Acta Math.*, 153, 1984, p. 117-152.

[3] D. SULLIVAN et N. TELEMAN, An analytical proof of Novikov's theorem on the topological invariance of the rational Pontrjagin classes, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 58, 1983, p. 291-295.

[4] A. CONNES et H. MOSCOVICI, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and Hyperbolic groups, *Topology*, 29, 3, 1990, p. 345-388.

[5] S. DONALDSON et D. SULLIVAN, Quasiconformal Four Manifolds, *Acta Math.*, 163, 1989, p. 181-252.

[6] F. W. GEHRING, The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping, *Acta Math.*, 130, 1973, p. 265-277.

Institut des Hautes Études Scientifiques,
35, *route de Chartres*, 91440 *Bures-sur-Yvette, France;*
D. S. : *Department of Math., SUNY at Stony Brook, NY* 11794, *USA.*