35

Do not Remove

Société Mathématique de France
Astérisque 32-33 (1976)

CARTAN DE RHAM HOMOTOPY THEORY

by

DENNIS SULLIVAN

In a 1928 Compte Rendu note E.Cartan enunciated the basic theorems relating differential forms and Betti numbers. He compared known geometric facts about compact semi-simple Lie groups to statements about differential forms on the group. He found for example $B_1 = B_2 = 0$ and $B_3 \neq 0$ and offered a general procedure of calculation which I would state in terms of a differential algebra

$$\Lambda_g = \Lambda(x_1,\ldots,x_n;\ d) \quad \text{where} \quad dx_i = \sum a^i_{\ell k}\, x_\ell \wedge x_k \ .$$

The x_i are a basis of left invariant 1-forms, Λ_g is the exterior algebra on these with the differential stated, $a^i_{\ell k}$ are the structure constants of the Lie algebra of the group.
The expression $\sum_{i\ell k} a^i_{\ell k}\, x_i \wedge x_\ell \wedge x_k$ gives rise to $B_3 \neq 0$. Using this method Cartan gave the Poincaré polynomial of the unitary group, $(t+1)\,(t^3+1)\,\ldots(t^{2n-1}+1)$.

During that year Georges de Rham worked out proofs of these theorems enunciated by E.Cartan and announced this fact in a Compte Rendu note of July 1929. A new geometric ingredient, currents, was born in this process. This concept is well developed in de Rham's beautiful book of the 1950's.

25 years ago this month at the Topology conference of Brussels (1950) Henri Cartan gave two papers containing differential form descriptions of topological problems.

In the first paper there is an elegant treatment of principal bundles -which gives at one stroke :

i) the Weil description of characteristic classes in terms of a connection

ii) an important formula relating the base and total space.

In i) the connection yields an algebra map $\Lambda_g \to E$, the forms on the total space. The non-commutativity with d is the curvature of the connection yielding elements in B the forms on the base.

This discussion also yields the formula, a map of differential algebras

$$B \otimes_d \Lambda(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \to E \qquad \text{"Principal bundle formula"}$$

inducing an isomorphism of cohomology. Here $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ is the cohomology of the group (in the compact case $H(\Lambda_g)$ according to E.Cartan) and $d\xi_i = c_i$, the corresponding characteristic class.

In the second paper of the Brussels conference Henri Cartan studied a homogeneous space G/H and gave a formula of the form

$$B \otimes_d \Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n) \quad \sim \quad \text{"Description of } G/H \text{"}$$

where B is the polynomial algebra of invariant functions on the Lie algebra of H. Cartan found this formula by expressing in differential algebra form the operation of passing to a quotient. The paper ends with the Poincaré polynomials of some homogeneous spaces.

If the principal bundle formula were extended from the class of the smooth manifolds to more general spaces then Cartan's homogeneous space formula results from the "fibration" $G \to G/H \to B_H$.

In a 1954 paper* in the Cartan Seminar René Thom suggested such an extension of forms might be made. He further outlined an attack on general spaces using forms in the Postnikov systems, which shows how a general space is built up from a point (or its fundamental group) by "principal fibrations" (possibly twisted).

---

* René Thom "Homology operations with real coefficients" Cartan Seminar 1954–1955

CARTAN DE RHAM HOMOTOPY THEORY

In Whitney's book of 1956 "Geometric Integration" a treatment of forms on general simplicial complexes occurs. The geometric relation between general cochains and the integrals of forms is the object of this book. Also very interesting formulae (inspired by Weil's proof of de Rham's theorem) for diffusing cochains into forms are given there.

Using the Whitney forms Thom's suggested outline can be quite easily sketched in *. One can then construct from the differential forms on a space, canonical model differential algebras,

$$A(x_1, x_2, \dots ; d) = \text{Model of } X$$

combining the homotopy and homological information. Under appropriate hypothesis * $A(x_1, x_2, \dots ; d)$ is the tensor product of the exterior algebra on the graded vector space $\mathrm{Hom}(\pi_{odd} X, \mathbb{Q})$ tensor the polynomial algebra on $\mathrm{Hom}(\pi_{even} X, \mathbb{Q})$, and d is defined by decomposable polynomial expressions.

Maps between algebras (up to homotopy) correspond to maps between spaces (up to homotopy) after suppressing torsion.

Geometric problems are studied by putting together the models algebraically to follow the geometry.

I will give some of the main applications of this differential form method.

i) <u>closed geodesics</u> If M is a simply connected Riemannian manifold whose real cohomology ring is not generated by one element, then there are infinitely many geometrically distinct periodic geodesics. (Joint work with Micheline Vigué submitted to Journal of Differential Geometry.)

The point here is to show that the function space of all maps of S^1 into M has unbounded Betti numbers. One proceeds by writing down in terms of the model of M, the model of the function space and calculating. The Betti numbers

---

* D.Sullivan "Differential Forms and Topology of Manifolds" Tokyo 1973 "Conference on Manifolds" University of Tokyo Press

are unbounded precisely when the cohomology ring requires at least two generators.

ii) Symmetry groups of homotopy types and manifolds

The automorphism group of the essential part of the model $\mathfrak{M}$ (degree of generators $\leq$ dimension of space) is clearly an algebraic matrix group. The subgroup homotopic to the identity can be algebraically described in terms of inner automorphisms (a normal unipotent subgroup). The quotient group of outer automorphisms Aut $\mathfrak{M}$ is an algebraic matrix group over $\mathbb{Q}$ which is the symmetry group of the rational homotopy type described by the model. The commensurability class of arithmetic subgroups is then defined and into this class falls the automorphism group (up to homotopy) of any simply connected finite complex described by the model.

If the finite complex is also a smooth manifold the group of components of diffeomorphisms is arithmetic relative to an abelian extension of the subgroup of Aut $\mathfrak{M}$ fixing the Pontrjagin class.

It is easy to construct complexes and manifolds whose symmetry groups realize all possibilities –namely all commensurability classes of arithmetic groups. The basic examples come from S^{2N-1} fibrations over a product of complex projective spaces.

iii) Classification of simply connected manifolds in higher dimension

One can write a reasonable algebraic invariant for the diffeomorphism type of a manifold. We take

i) the model algebra up to the dimension

ii) the rational Pontrjagin classes

iii) a certain lattice in the model and torsion coefficients of homology.

Then under the stated hypothesis the diffeomorphism type is determined up to a finite number of possibilities by this invariant.

We have indicated in the above paragraph how the automorphism group up to isotopy is computed using this invariant.

Any model and Pontrjagin class can be realized by a manifold if Poincaré duality holds on the homology and in dimension 4k the Thom-Hirzebruch signature -cobordism relation holds (otherwise a manifold with one singular point is constructed).

Supposedly any geometric or analytic quantity (over $\mathbb{R}$) attached to the manifold can be treated by i) and ii) . For example, there is an explicit formula for the Gelfand-Fuks cohomology of the Lie algebra of vector fields on M in terms of the model and the Pontrjagin class (this uses work of Bott and Haefliger).

Besides Cartan de Rham homotopy theory one uses the surgery technique of Browder and Novikov along the lines described in the author's thesis to prove the above classification theorem for manifolds. Smale's h-cobordism Theorem also plays a crucial role.

iv) Kaehler manifolds and algebraic manifolds

Here the analytical structure imposes special properties relating the forms and homology. One finds that the structure of the model is a formal consequence of the cohomology ring. This is proven (over $\mathbb{R}$) in Deligne, Griffiths, Morgan, and Sullivan (to appear in Inventiones Math.). The statement over $\mathbb{Q}_\ell$ is related to Deligne's Weil conjectures. Any of these statements imply the corresponding statement over $\mathbb{Q}$ using the algebraic groups of ii) .

One consequence in the simply connected case is the following: a homology class $x \in H_i(M, \mathbb{Q})$ is in the image of the Hurewicz homomorphism $\pi_i(M) \otimes \mathbb{Q} \to H_i(M, \mathbb{Q})$ if and only if $\langle x, u \cup v\rangle = 0$ for all u and v .

Another consequence is the following statement: the diffeomorphism type of a simply connected Kaehler manifold is determined up to a finite number of possibilities by

i) the integral cohomology ring

ii) the Pontrjagin classes. (real dimension $\neq 4$)

This follows from the formality of the model over $\mathbb{Q}$ using the classification theorem for manifolds stated in 3). Up to finite index all automorphisms of i) fixing ii) are realized by self diffeomorphisms.

Concluding Remarks

Besides the reference cited above there is one more of great importance. This is the 1968 paper of Quillen on rational homotopy theory (Annals of Math.). The structure presented there forces one to ask if there is a differential form approach to homotopy theory.

Many of our results can be obtained by applying algebraic arguments to Quillen's statements which are based on Kan's combinatorial loop space. We can alternatively start from the knowledges of the 1950's and use differential forms to recover Quillen's theory. The advantages are simplicity, new connections with geometry, a better potential for dealing with the fundamental group, and a new concreteness for calculation.

Quillen refers to Thom's paper of 1954 (which led me there) but otherwise this important paper is little known. Similarly Whitney's beautiful book is little known. I hope the above results will help to focus attention on these works.

Finally to achieve some measure of completeness we include the pages of Poincaré "Analysis Situs" (1895) which discuss Betti numbers and multiple integrals. As one can see the exterior differential is not explicitly defined as an operation but the discussion is almost complete anyway.

The classification theorem in iii) is in the spirit of Poincaré's efforts to understand the homological properties of manifolds in order to characterize their "analysis situs".

For dealing with the fundamental group in future theories we return to Elie Cartan theory of geometric movements or connections expressed by Pfaffians (1-forms).

A comprehensive paper on all these remarks is in preparation.

Dennis SULLIVAN
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91440 BURES SUR YVETTE - FRANCE

ANALYSIS SITUS. — *Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos.* Note ([2]) de M. E. Cartan.

On sait, d'après H. Weyl ([3]), que l'espace $\mathcal{E}$ représentatif des opérations d'un groupe G continu semi-simple clos d'ordre r est recouvert un nombre fini de fois par son espace simplement connexe de recouvrement $\mathcal{E}'$ ([4]); ce dernier est lui-même l'espace représentatif d'un groupe G' infinitésimalement isomorphe à G. On sait d'autre part que dans $\mathcal{E}'$ toute variété fermée qui ne rencontre pas les variétés à r-3 dimensions lieux des transformations singulières du groupe est réductible à un point par déformation continue. De là résulte facilement que *les deux premiers nombres de Betti de $\mathcal{E}$ sont nuls.*

La manière même dont ce résultat est obtenu ne laisse pas espérer une généralisation possible en gardant le même point de vue. On peut chercher à aller plus loin en utilisant, avec H. Poincaré, les intégrales multiples de différentielles exactes définies dans l'espace $\mathcal{E}$ et admettant des périodes. On démontre facilement que, pour avoir toutes les intégrales de cette nature, il suffit de se borner au cas où l'élément différentiel est invariant par tous les déplacements de l'espace $\mathcal{E}$ (qui est, comme on sait, un espace de Riemann). Il suffit alors, étant donné le groupe linéaire adjoint Γ de G, opérant sur les variables $e_1, \ldots, e_r$, de construire toutes les formes extérieures en $e_1, \ldots, e_r$ invariantes par Γ, et d'y remplacer les e_i par les formes différentielles linéaires ω_i qui entrent dans le symbole $\sum_i \omega_i X_i f$ de la transformation infinitésimale $S_{\xi+d\xi} S_\xi^{-1}$ du groupe. *L'élément d'intégrale multiple ainsi obtenu est de lui-même une différentielle exacte.*

On trouve facilement qu'il n'y a aucune intégrale du premier ou du second ordre de cette nature, ce qui est d'accord avec la propriété des deux premiers nombres de Betti d'être nuls. Mais *il y en a toujours une du troisième ordre*. Si l'on choisit la base infinitésimale du groupe, ce qui est toujours possible de manière que les constantes de structure c_{ijk} forment un

([2]) Séance du 17 juillet 1928.

([3]) H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (*Math. Zeitsch.*, **24**, 1925, p. 380-381).

([4]) Voir, pour la détermination effective du groupe de connexion de $\mathcal{E}$, E. Cartan, *La géométrie des groupes simples* (*Annali di Matem.*, 4e série, **4**, 1926-1927, p. 211-218).

trivecteur (¹), cette intégrale est $\iiint \sum^{i,j,k} c_{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k$. Étendue à la variété fermée à trois dimensions représentative d'un sous-groupe simple à trois paramètres de G, elle a une valeur différente de zéro. *Le troisième nombre de Betti de l'espace d'un groupe semi-simple clos n'est donc jamais nul* (²).

Les intégrales de différentielles exactes de la forme générale indiquée ci-dessus peuvent être formées par voie purement algébrique; on peut même démontrer assez facilement que *leur nombre total, pour un groupe de rang l, est* $2^l - 1$. Aucune d'elles ne se déduit, par la formule de Stokes généralisée, d'une intégrale multiple d'ordre moindre d'une unité. Malheureusement, on ne pourrait en déduire avec certitude qu'elles admettent toutes au moins une période que si l'on avait démontré le théorème suivant (³).

Théorème A. — *Si une intégrale de différentielle exacte d'ordre p, définie dans l'espace clos $\mathcal{E}$, est nulle pour tout domaine d'intégration fermé à p dimensions, elle résulte, par application de la formule de Stokes généralisée, d'une intégrale multiple d'ordre p-1 (définie et régulière dans tout l'espace).*

D'autre part, pour qu'on pût déduire du nombre des intégrales multiples considérées des conclusions précises sur les nombres de Betti de l'espace, il faudrait être également certain du théorème suivant, vérifié dans la théorie des courbes algébriques.

Théorème B. — *Si l'on considère h variétés fermées à p dimensions entre lesquelles n'existe aucune homologie, il existe h intégrales de différentielles exactes telles que le tableau carré des valeurs de ces intégrales étendues aux h variétés ait un déterminant différent de zéro.*

Si ces deux théorèmes étaient démontrés, la détermination des nombres de Betti d'un espace de groupe semi-simple clos serait ramenée à un

---

(¹) Cela signifie que, par une permutation impaire ou paire effectuée sur les indices, la constante c_{ijk} se reproduit avec ou sans changement de signe.

(²) Ce nombre est au moins égal au nombre des sous-groupes invariants simples de G.

(³) Il est bien connu que ce théorème et vrai *localement;* il est évident pour $p = 1$.

problème d'algèbre parfaitement abordable [1]. Citons en particulier le cas du groupe unimodulaire d'une forme d'Hermite définie positive à n variables : les nombres de Betti de son espace représentatif seraient les coefficients du polynome

$$(t^3+1)(t^5+1)\ldots(t^{2n-1}+1).$$

Des considérations analogues seraient applicables aux espaces clos admettant un groupe continu transitif clos G de transformations (espace projectif complexe ponctuel, ou réglé, etc.). Mais il pourrait s'introduire dans certains cas des intégrales dont l'élément différentiel serait invariant par G sans qu'elles fussent des intégrales de différentielles exactes ; elle ne seraient pas sans analogie avec les intégrales de différentielles *semi-exactes* introduites par F. Severi dans la théorie des surfaces algébriques [2].

---

(1) On aurait par cela même résolu le problème pour les groupes simples *ouverts* (E. Cartan, *Ann. Ec. Norm.*, 3e série, 44, 1927, p. 347 et 377).

(2) F. Severi, *Sugl'integrali algebrici semplici e doppi* (*Rendic. Accad. Lincei*, 6e série, 7^1, 1928, p. 1-8).

ANALYSIS SITUS. — *Intégrales multiples et* Analysis situs. Note de M. **Georges de Rham**, présentée par M. Hadamard.

Le rôle des nombres de Betti dans la théorie des intégrales multiples apparaît dans des théorèmes encore admis sans preuve ([1]). Voici l'esquisse d'une démonstration, valable pour une variété fermée à n dimensions, V, qui peut être subdivisée par des calottes simplement connexes de manière à former un polyèdre P.

Pour énoncer ces théorèmes, désignons par c^q un champ d'intégration fermé à q dimensions et par ω un élément d'intégrale d'ordre q, définis sur V ([2]); soit ω' l'élément d'intégrale qui dérive de ω par la formule de Stokes généralisée; disons que ω est fermée si $\omega' = 0$ et homologue à zéro s'il existe un élément ϖ dont ω dérive : $\varpi' = \omega$. Les périodes d'une intégrale fermée sont les valeurs qu'elle prend étendue à des champs fermés; la formule de Stokes montre que cette valeur est nulle si l'intégrale ou le champ est homologue à zéro.

Théorème I. — *Une intégrale fermée dont toutes les périodes sont nulles est homologue à zéro.*

Théorème II. — *Étant donnés p champs d'intégration fermés entre lesquels n'existe aucune homologie, on peut trouver une intégrale fermée prenant, étendue à ces p champs, p valeurs données* ([3]).

Corollaire. — *Le $q^{\text{ième}}$ nombre de Betti de* V, *défini comme le nombre maximum de champs c^q entre lesquels n'existe aucune homologie, est aussi égal au nombre maximum d'intégrales fermées d'ordre q entre lesquelles n'existe aucune homologie.*

Soient a_i^q les éléments de P et b_i^{n-q} ceux du polyèdre réciproque P′ ([4]).

On peut faire correspondre à chaque élément b_i^{n-q} de P′ une intégrale d'ordre q, $\omega(b_i^{n-q})$ telle que, si b_i^{n-q} est limitée par $\sum_j e_j b_j^{n-q-1}$, on ait

$$\omega'(b_i^{n-q}) = \sum_j e_j \omega(b_j^{n-q-1}),$$

([1]) Cf. E. Cartan, *Comptes rendus*, **187**; 1928, p. 196-197.

([2]) Les champs et les intégrales considérés ici doivent satisfaire, en tout point de V, à des conditions générales de continuité et de régularité.

([3]) I et II sont équivalents aux théorèmes A et B de E. Cartan (*loc. cit.*).

([4]) Cf. Poincaré, complément à l'*Analysis situs* (*Rend. di Palermo*, **13**, 1899, p. 285 à 343).

et que

$$\int_{a_k^q} \omega(b_i^{n-q}) = \delta_i^k \quad (0 \text{ si } i \neq k,\ 1 \text{ si } i = k).$$

La construction de ces intégrales se fait aisément en commençant par celles d'ordre n et en utilisant le lemme V ci-dessous. Grâce aux deux propositions suivantes :

III. *Toute intégrale fermée est homologue à une combinaison linéaire des* $\omega(b_i^{n-q})$.

IV. *Tout champ fermé est homologue à une combinaison linéaire des* a_i^q (¹).

Les théorèmes I et II se ramènent au suivant, dû à Poincaré (²) : *pour que* $\Sigma x_i a_i^q$ *supposé fermé soit homologue à zéro avec division, et il suffit qu'on ait* $\Sigma x_i y_i = 0$ *quel que soit* $\Sigma y_i b_i^{n-q}$ *fermé.*

La démonstration de III et de IV ne saurait trouver place ici. Bornons-nous à citer deux lemmes qui y jouent un rôle important :

V. *Une intégrale* ω *d'ordre* q, *fermée et nulle hors d'un intervalle* I *de l'espace à* n *dimensions, dérive d'une intégrale* ϖ, $\varpi' = \omega$, *nulle hors de* I. *Si* $q = n$, *il faut de plus que* $\int_{\mathrm{I}} \omega = 0$.

VI. *Un champ fermé contenu dans* I *limite un champ contenu aussi dans* I.

(¹) Cf. J. W. ALEXANDER, *Trans. of the Am. math. Soc.*, **16**, 1915, p. 148.

(²) *Loc. cit.*

COLLOQUE DE TOPOLOGIE, BRUXELLES, 1950

Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie

par Henri CARTAN (Paris)

1. ALGÈBRES GRADUÉES

Soit A une algèbre (associative) sur un anneau commutatif K ayant un élément unité. Une structure graduée est définie par la donnée de sous-espaces vectoriels A^p $(p = 0, 1, \ldots)$ tels que l'espace vectoriel A soit somme directe des A^p; un élément de A^p est dit « homogène de degré p ». On suppose de plus que le produit d'un élément de A^p et d'un élément de A^q est un élément de A^{p+q}.

On note $a \longrightarrow \bar{a}$ l'automorphisme de A qui, à un élément $a \in A^p$, associe l'élément $(-1)^p a$.

Un endomorphisme θ de la structure vectorielle de A est dit *de degré r* s'il applique A^p dans A^{p+r} pour chaque p. Parmi les endomorphismes, nous distinguerons les catégories suivantes :

1. On appelle *dérivation* tout endomorphisme θ de A, de degré *pair*, qui, vis-à-vis de la multiplication dans A, jouit de la propriété

$$\theta(ab) = (\theta a)b + a(\theta b) . \qquad (1)$$

2. On appelle *antidérivation* tout endomorphisme δ de A, de degré *impair*, qui jouit de la propriété

$$\delta(ab) = (\delta a)b + \bar{a}(\delta b) . \qquad (2)$$

Si en outre δ est de degré $+1$ et si $\delta\delta = 0$, δ s'appelle une *différentielle*; on définit alors, classiquement, l'*algèbre de cohomologie* H(A) de A, relativement à δ. C'est une algèbre graduée.

Une dérivation (resp. antidérivation) est nulle sur l'élément unité de A, s'il existe.

Si δ est une antidérivation, $\delta\delta$ est une dérivation; si δ_1 et des éléments de degré un de l'algèbre E, application qui satisfasse aux deux conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} i(x)\cdot f(x') = i(x)\cdot x' \\ \text{(scalaire de E, c'est-à-dire fonction constante sur } \mathscr{E}\text{),} \\ \theta(x)\cdot f(x') = f(\theta(x)\cdot x') \end{array}\right\} \quad (8)$$

pour tout $x \in \mathfrak{a}(G)$ et tout $x' \in A^1(G)$.

Supposons qu'on ait un autre espace fibré principal $\mathscr{E}'$ de même groupe G, et un G-*homomorphisme* de $\mathscr{E}'$ dans $\mathscr{E}$ (c'est-à-dire une application indéfiniment différentiable de $\mathscr{E}'$ dans $\mathscr{E}$, compatible avec les opérations de G dans $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}$). Un tel homomorphisme définit d'une manière évidente l'image réciproque d'une connexion infinitésimale sur $\mathscr{E}$: c'est une connexion infinitésimale sur $\mathscr{E}'$. On vérifie aisément que l'application f' de $A^1(G)$ dans E'^1 définie par cette dernière est composée de l'application f et de l'homomorphisme de E dans E' défini par l'application de l'espace $\mathscr{E}'$ dans l'espace $\mathscr{E}$.

Ce qui précède conduit à la notion abstraite de « connexion algébrique » dans une algèbre différentielle E (avec élément-unité) dans laquelle opère un groupe G (au sens de la fin du § 4) : ce sera une application linéaire de $A^1(G)$ dans E^1 qui satisfasse aux conditions (8).

Soit alors f une telle connexion algébrique. Supposons en outre que l'algèbre E satisfasse à la loi d'anticommutation $vu = (-1)^{pq}uv$ pour u de degré p et v de degré q. Alors on peut prolonger f, d'une seule manière, en un *homomorphisme (multiplicatif) de l'algèbre* A(G) *dans l'algèbre* E, qui transforme l'élément unité de A(G) dans l'élément unité de E. Notons encore f ce prolongement. On a alors, pour tout élément $a \in A(G)$,

$$\left.\begin{array}{l} i(x)\cdot f(a) = f(i(x)\cdot a) \\ \theta(x)\cdot f(a) = f(\theta(x)\cdot a)\,. \end{array}\right\} \quad (8')$$

Autrement dit, f est *compatible* avec les opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$, qui opèrent dans A(G) et dans E.

Mais, si $x' \in A^1(G)$, *on n'a pas*, en général, $d(f(x')) = f(dx')$; autrement dit, f n'est pas compatible avec les différentielles de A(G) et de E. L'application $x' \to d(f(x')) - f(dx')$ de $A^1(G)$ dans E^2 est ce qu'on appelle le *tenseur de courbure* de la connexion.

L'élément $d(f(x')) - f(dx')$ n'est pas, en général, un élément basique de E; toutefois il est *annulé par tous les produits intérieurs* $i(x)$. Démonstration :

$$i(x)d\cdot(f(x')) = \theta(x)\cdot f(x') - d\cdot(i(x)\cdot f(x')) = f(\theta(x)\cdot x')$$

d'après (8) et, d'après (8'),

$$i(x)\cdot f(dx') = f(i(x)\cdot dx') = f(\theta(x)\cdot x') - f(di(x)\cdot x')$$
$$= f(\theta(x)\cdot x') .$$

6. L'algèbre de Weil d'une algèbre de Lie

Les considérations précédentes ont conduit André Weil (dans un travail non publié) à associer à l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$ une autre algèbre différentielle, dont $A(G)$ est un quotient, et que nous allons définir maintenant.

Désignons par $S(G)$ *l'algèbre symétrique* du dual $\mathfrak{a}'(G)$ de $\mathfrak{a}(G)$. Si on prend une base (x_k') dans $\mathfrak{a}'(G)$, $S(G)$ s'identifie à l'algèbre des *polynômes* par rapport aux lettres x_k' (commutant deux à deux). $S(G)$ s'identifie aussi canoniquement à l'algèbre des formes multilinéaires *symétriques* sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}(G)$.

On distinguera l'espace $\mathfrak{a}'(G)$ comme sous-espace $A^1(G)$ de $A(G)$, et comme sous-espace $S^1(G)$ de $S(G)$. On a un isomorphisme canonique h de $A^1(G)$ sur $S^1(G)$. On notera souvent $\tilde{x}'$ l'élément $h(x')$, pour $x' \in A^1(G)$.

Si on a une connexion algébrique f de $A^1(G)$ dans une algèbre E comme ci-dessus, et qu'on prolonge f en un homomorphisme de $A(G)$ dans E, on est amené à définir une application linéaire $\tilde{f}$ de $S^1(G)$ dans E^2, en posant

$$\tilde{f}(\tilde{x}') = d(f(x')) - f(dx') .$$

Pour que $\tilde{f}$ conserve les degrés, on convient que les éléments de $S^1(G)$ sont de *degré 2*. Ceci conduit à graduer $S(G)$ en convenant que les éléments de $S^p(G)$ (formes p-linéaires symétriques sur $\mathfrak{a}(G)$) sont de degré $2p$. L'application $\tilde{f}$ se prolonge alors en un homomorphisme multiplicatif, de degré 0, de l'algèbre (commutative) $S(G)$ dans l'algèbre E. On notera encore $\tilde{f}$ l'homomorphisme prolongé.

L'algèbre de Weil de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$ sera, par définition, l'algèbre graduée

$$W(G) = A(G) \otimes S(G) ,$$

produit tensoriel des algèbres graduées $A(G)$ et $S(G)$ (cf. § 1).

Les homomorphismes $f : A(G) \longrightarrow E$, et $\tilde{f} : S(G) \longrightarrow E$, définissent un homomorphisme $\bar{f}$ de l'algèbre $W(G)$ dans l'algèbre E, par la formule

$$\bar{f}(a \otimes s) = f(a) \otimes \tilde{f}(s) .$$

L'homomorphisme (multiplicatif) $\bar{f}$ est de degré 0.

On va définir, sur $W(G)$, *d'une manière indépendante de*

....

La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal

par Henri CARTAN (Paris)

Les notations de la première conférence [1] sont conservées. En particulier, $I_S(G)$ continue à désigner l'algèbre des éléments invariants de $S(G)$, c'est-à-dire des éléments basiques de l'algèbre de Weil $W(G) = A(G) \otimes S(G)$. De plus, nous introduirons les notations suivantes : $I_A(G)$ pour l'algèbre des éléments invariants de $A(G)$, et $I_W(G)$ pour l'algèbre des éléments invariants de $W(G)$. Ce sont des algèbres différentielles graduées (l'opérateur différentiel étant induit, pour $I_A(G)$, par celui de l'algèbre ambiante $A(G)$, et, pour $I_W(G)$, par celui de l'algèbre ambiante $I_W(G)$).

En fait, l'opérateur différentiel de $I_A(G)$ *est nul*, en vertu de la formule (IV) de la première conférence (§ 3).

On notera $H_A(G)$ l'algèbre de cohomologie de $A(G)$, qui, lorsque G est un groupe compact (connexe), s'identifie à l'algèbre de cohomologie réelle de l'espace compact G. Puisque les éléments de $I_A(G)$ sont des cocycles, on a un homomorphisme canonique $I_A(G) \longrightarrow H_A(G)$. Il est bien connu que, lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$ est *réductive* (c'est-à-dire composée directe d'une algèbre abélienne et d'une algèbre semi-simple), l'homomorphisme $I_A(G) \longrightarrow H_A(G)$ est une application *biunivoque de* $I_A(G)$ *sur* $H_A(G)$. On en trouvera une démonstration dans la thèse de Koszul [2]. Ceci vaut notamment lorsque G est un groupe compact.

1. La cohomologie de l'algèbre de Weil.

En relation avec le caractère universel de l'algèbre de Weil (1^re conférence, § 8), on a le théorème suivant :

[1] Page 15 de ce Recueil.
[2] *Bull. Soc. Math. de France*, 1950, pp. 65-127; voir le théorème 9.2 du chapitre IV.

THÉORÈME 1. — *L'algèbre de cohomologie de* W(G) *est triviale :* $H^m(W(G))$ *est nul pour tout entier* $m \geqslant 1$ (pour $m = 0$, $H^0(W(G))$ s'identifie évidemment au corps des scalaires). *De même, l'algèbre de cohomologie de la sous-algèbre* $I_W(G)$ *est triviale.*

Ce théorème vaut sans aucune hypothèse restrictive sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$. Il se démontre comme suit : soit k l'antidérivation de W(G), de degré -1, nulle sur A(G), et définie sur $S^1(G)$ par $k(\tilde{x'}) = x'$ (autrement dit : l'endomorphisme composé kh est l'identité sur $A^1(G)$). L'opérateur k commute avec les transformations infinitésimales $\theta(x)$, par suite k opère dans la sous-algèbre $I_W(G)$ des éléments invariants de W(G).

$\delta k + k\delta$ est une *dérivation*; elle est entièrement définie quand on la connaît sur $A^1(G)$ et sur $S^1(G)$: or elle transforme tout $x' \in A^1(G)$ en x' lui-même, et tout $\tilde{x'} \in S^1(G)$ en $\tilde{x'} - d_A x'$. Appelons *poids* d'un élément de W(G) le plus grand des entiers q tels que sa composante dans $A(G) \otimes S^q(G)$ ne soit pas nulle (le poids étant, par définition, -1 si l'élément considéré est nul). Soit alors u un élément homogène de degré m ($m \geqslant 1$) de W(G) ; $\delta k u + k \delta u$ est homogène de degré m. Soit $q \geqslant 0$ le poids de u (u étant supposé $\neq 0$) ; le poids de

$$v = u - \frac{1}{m-q}(\delta k u + \delta k u)$$

est $\leqslant q - 1$. Le processus qui fait passer de u à l'élément v de poids strictement plus petit peut être itéré, et conduira finalement à un élément nul. *Supposons que* u *soit un cocycle :* $\delta u = 0$; alors v est un cocycle homologue à u, et de proche en proche on voit que u est le cobord d'un élément de W(G). Ceci montre bien que $H^m(W(G))$ est nul.

Si en outre u est un cocycle *invariant*, le processus montre que u est le cobord d'un élément invariant de W(G) ; donc $H^m(I_W(G))$ est nul.

2. L'APPLICATION CANONIQUE $I_S{}^p(G) \rightarrow I_A{}^{2p-1}(G)$.

Soit $u \in I_S{}^p(G)$ ($p \geqslant 1$). Puisque c'est un cocycle de degré $2p$ de l'algèbre $I_W(G)$, il existe, d'après le théorème 1, un $w \in I_W(G)$, de degré $2p - 1$, tel que $\delta w = u$. La projection canonique de W(G) sur A(G) transforme w en un élément w_A de $I_A(G)$, de degré $2p - 1$. Cet élément ne dépend pas du choix de w; car si $\delta w' = \delta w$, il existe un $v \in I_W(G)$ tel que $w' - w = \delta v$. Alors $w_A{}' - w_A = d_A v_A$, et comme $v_A \in I_A(G)$, $d_A v_A$ est nul.

• • • • • • • • • • • • • • • • • •

9. Cohomologie des espaces homogènes

Nous allons appliquer la théorie précédente à la recherche de l'algèbre de cohomologie (réelle) d'un espace homogène G/g, lorsque G est un groupe compact connexe et g un sous-groupe fermé connexe de G. Cette question a déjà fait l'objet d'importants travaux de Samelson, Leray et Koszul [2]. Nous nous placerons ici dans le cadre algébrique suivant : $\mathfrak{a}(G)$ sera une algèbre de Lie réductive, et $\mathfrak{a}(g)$ une sous-algèbre *réductive dans* $\mathfrak{a}(G)$ [3].

E sera alors l'algèbre $A(G)$, dans laquelle opèrent les $i(x)$ et les $\theta(x)$ relatifs aux $x \in \mathfrak{a}(g)$. La sous-algèbre B des « éléments basiques » de E s'identifie, lorsque G est un groupe compact connexe et g un sous-groupe fermé connexe, à l'algèbre des formes différentielles de l'espace homogène G/g, invariantes à gauche par G; et l'on sait que son algèbre de cohomologie s'identifie à l'algèbre de cohomologie $H(G/g)$ de l'espace homogène. C'est pourquoi nous noterons désormais $H(G/g)$ l'algèbre de cohomologie $H(B)$.

D'autre part, l'algèbre de cohomologie $H(G)$ de l'espace fibré G s'identifie canoniquement à la sous-algèbre $I_A(G)$ des éléments G-invariants de $A(G)$.

Le théorème 4 est applicable, parce qu'il existe une « connexion » dans $E = A(G)$: une application linéaire f de $A^1(g)$ dans $A^1(G)$, compatible avec les $i(x)$ et les $\theta(x)$ relatifs aux $x \in \mathfrak{a}(g)$. Une telle connexion est définie par un projecteur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$ sur la sous-algèbre $\mathfrak{a}(g)$, projecteur qui soit compatible avec les $\theta(x)$ relatifs aux $x \in \mathfrak{a}(g)$; ou encore, par un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}(G)$, supplémentaire de $\mathfrak{a}(g)$, et stable par les transformations infinitésimales de $\mathfrak{a}(g)$. L'existence d'un tel sous-espace résulte de l'hypothèse suivant laquelle $\mathfrak{a}(g)$ est réductive dans $\mathfrak{a}(G)$.

Appliquons le théorème 4 : $H(G/g)$ s'identifie canoniquement à l'algèbre de cohomologie de la sous-algèbre C_g des éléments g-invariants de l'algèbre $A(G) \otimes S(g)$, munie de l'opérateur Δ_g explicité au théorème 4. Mais ici, non seulement la théorie de Hirsch-Koszul est applicable comme au § 7, mais (cf. la conférence de Koszul) on peut astreindre l'application φ du § 7 à être compatible avec les structures *multiplicatives*. D'une façon précise, l'algèbre $H(E) \otimes I_S(G)$ envisagée au § 7 devient ici $I_A(G) \otimes I_S(g)$; et φ va être un isomorphisme de cette

[2] Références bibliographiques dans la thèse de Koszul; voir en outre les *Notes* de Leray aux *Comptes rendus*, t. 228, 1949, p. 1902, et t. 229, 1949, p. 280.

[3] Pour cette notion, voir thèse de Koszul, § 9.

algèbre sur une sous-algèbre de l'algèbre C_g. Pour définir φ, on remarque que $I_A(G)$ est l'algèbre extérieure du sous-espace $P_A(G)$ de ses éléments primitifs; par suite φ sera déterminé quand on le connaîtra sur le sous-espace $P_A(G)\otimes 1$ de $I_A(G)\otimes I_S(g)$. Pour définir φ sur ce sous-espace de manière à satisfaire aux conditions 1, 2 et 3 du § 7, on observe que *tout élément de* $P_A(G)$ *est transgressif dans l'algèbre* C_g (voir ci-dessous), de sorte qu'on définira φ en associant, à tout élément $a\otimes 1$ de $P_A(G)\otimes 1$, une cochaîne de transgression dans l'algèbre C_g des éléments g-invariants de $A(G)\otimes S(g)$.

Démontrons que tout élément de $P_A(G)$ est *transgressif* dans C_g, comme il a été annoncé. On va, pour cela, se servir à nouveau de la transgression dans l'algèbre de Weil de $\mathfrak{a}$ (G) : considérons l'homomorphisme canonique λ de $A(G)\otimes S(G)$ dans $A(G)\otimes S(g)$, défini par $S(G)\longrightarrow S(g)$. Il applique la sous-algèbre $I_W(G)$ des éléments G-invariants de $A(G)\otimes S(G) = W(G)$ dans la sous-algèbre C_g des éléments g-invariants de $A(G)\otimes S(g)$; en outre, il est compatible avec les opérateurs différentiels Δ_G et Δ_g de $I_W(G)$ et C_g respectivement (cf. la remarque de la fin du § 6). Soit alors a un élément de $P_A(G)$; il est transgressif dans $I_W(G)$; si w est une cochaîne de transgression de $a\otimes 1$ dans $I_W(G)$, $\lambda(w)$ sera, dans C_g, une cochaîne de transgression pour $a\otimes 1$, puisque sa différentielle $\Delta_g\lambda(w)$ sera égale à l'image, par l'application $I_S(G)\longrightarrow I_S(g)$, de $\Delta_G(w)$, qui est un élément de $I_S(G)$.

Ceci prouve en outre que, pour obtenir une transgression $P_A(G)\longrightarrow I_S(g)$ dans l'algèbre C_g, il suffit de prendre une transgression $P_A(G)\longrightarrow I_S(G)$ (cf. § 3), et de la composer avec l'homomorphisme canonique $I_S(G)\longrightarrow I_S(g)$. Résumons les résultats obtenus :

THÉORÈME 5. — *Choisissons une transgression* $\tau : P_A(G)\longrightarrow I_S(G)$, *et composons-la avec l'homomorphisme canonique de* $I_S(G)$ *dans* $I_S(g)$. *On obtient une application linéaire de* $P_A(G)$ *dans* $I_S(g)$, *qu'on prolonge en une antidérivation de* $I_A(G)\otimes I_S(g)$, *nulle sur* $I_S(g)$. *Cette antidérivation, de degré* $+1$, *est une différentielle* δ *sur l'algèbre graduée* $I_A(G)\otimes I_S(g)$; *l'algèbre de cohomologie de* $I_A(G)\otimes I_S(g)$, *pour* δ, *est isomorphe à l'algèbre de cohomologie* $H(G/g)$ *de l'espace homogène* G/g, *par un isomorphisme compatible avec les homomorphismes du diagramme*

$$\begin{tikzcd}
 & H(I_A(G)\otimes I_S(g)) \arrow[dr] \arrow[dd, leftrightarrow] & \\
I_S(g) \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_A(G) = H(G) \\
 & H(G/g) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

. . . .

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

OPÉRATIONS EN COHOMOLOGIE RÉELLE.

(Exposé de R. THOM, 28.3.1955)

1.- Soit E un espace, et soient x , y deux classes de cohomologie de E (dans des groupes de coefficients G , G' arbitraires). On sait que y est une <u>construction cohomologique</u> de la classe x , si, pour toute application f de E dans un espace arbitraire A , la relation $x = f^{*}(x')$, $x' \in H^{*}(A\ ;\ G)$ entraîne que y est de la forme $y = f^{*}(y')$, $y' \in H^{*}(A\ ;\ G')$. Rappelons qu'en ce cas, on a toujours $\dim y \geq \dim x$ (sauf si $y = 0$ ou $\dim y = 0$), et qu'on obtient toutes les constructions y de x en prenant pour espace A le complexe d'Eilenberg-Mac Lane $K(G\ ,\ \dim x)$ de classe fondamentale j , avec l'application $f : E \rightarrow K$ telle que $f^{*}(j) = x$.

Si on transcrit cette définition, par dualité, sur les classes d'homologie, on est amené à considérer, non plus les images de f^{*} , mais les noyaux de f_{*} . Il est par suite naturel d'introduire la définition suivante :

<u>Classes subordonnées d'une classe</u> . Soit $x \in H^{p}(E\ ;\ G)$ une classe de cohomologie d'un espace E ; une classe $y \in H^{q}(E\ ;\ G')$ sera dite <u>subordonnée à</u> x , si, pour toute application f d'un espace arbitraire A dans E , la relation $f^{*}(x) = 0$ entraîne la relation $f^{*}(y) = 0$.

Il est clair que l'ensemble des classes subordonnées d'une classe x constitue un idéal dans $H^{*}(E)$ (pour peu qu'on ait défini une structure multiplicative de cup-produit dans $H^{*}(E)$).

On définira de façon analogue l'idéal des classes subordonnées à un nombre quelconque de classes $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_r) \in H^{*}(E)$.

Pour déterminer l'ensemble des classes subordonnées à une classe donnée $x \in H^{p}(E\ ;\ G)$, donnons-nous une application $f : E \rightarrow K(G\ ,\ p)$, telle que $f^{*}(j) = x$ (cf. Exposé 14, paragraphe 2). On sait que $K(G\ ,\ p)$ est la base d'un espace fibré $\mathfrak{A}$ acyclique (l'espace des chemins sur $K(G\ ,\ p)$), dont la fibre (espace des lacets sur $K(G\ ,\ p)$) a l'homotopie de $K(G, p-1)$. L'image réciproque, pour f , du fibré $\mathfrak{A}$ est un espace fibré Q_x de base E , de fibre $K(G\ ,\ p-1)$. On appellera Q_x l'<u>espace fibré canonique attaché à la classe</u> x . De même, pour un nombre fini de classes $x_1 \in H^{p_1}(E\ ;\ G_1)$, ...

de dimension impaire, s'il est orientable, ne dépend que de la classe caractéristique fondamentale x (à coefficients réels) de l'espace fibré.

On verra plus loin comment on peut effectivement déterminer cette cohomologie.

Cas où n est impair ($n = p+1$, p pair).

En ce cas, le fibré canonique Q_x admet pour fibre $K(R,p)$, dont la cohomologie réelle est l'algèbre de polynômes $S(v)$. La suite spectrale de cette fibration peut présenter des différentielles de Leray d_i non nulles pour tout $i \equiv 1 \mod p$. Il importe de donner un procédé canonique permettant de déterminer ces différentielles, par la seule donnée de l'espace de base E . A cet égard, la théorie de Hirsch permet de fournir l'argument nécessaire, avec toutefois l'hypothèse suivante : tous les espaces fibrés considérés admettent des "couvertures" (systèmes de cochaînes) fines et anticommutatives pour le cup-produit ; on suppose en outre que la théorie de la suite spectrale d'une fibration peut être étendue à ces couvertures.

Il est assez légitime de prétendre que, pour une catégorie étendue d'espaces (par ex. les C.W. complexes), on peut trouver, en coefficients réels, des couvertures de ce type. En effet, la propriété est vraie des polyèdres finis, car ce sont des rétractes par déformation de variétés différentiables (à bord) pour lesquelles les formes différentielles fournissent le type de cochaînes cherché. Par contre, il parait difficile d'étendre à ces cochaînes la théorie de la suite spectrale d'une fibration, cette suite spectrale n'étant établie, pour une fibration du type espace de chemins sur un espace, que pour les cochaînes singulières, pour lesquelles l'anticommutativité laisse à désirer ...

Rappel sur la théorie de Hirsch.

Soit Q_x le fibré canonique associé à la classe $x \in H^{p+1}(E ; R)$; la cohomologie de la fibre $K(R ; p)$ est une algèbre de polynômes à un générateur u de degré pair p . Soit u' une cochaine de Q_x , telle que $d\,u' = p^*(x')$, x' désignant un cocycle, choisi une fois pour toutes, dans la classe x . La restriction de u' à la fibre $K(R ; p)$ donne la classe fondamentale u . Le choix de la cochaine u' permet de définir un isomorphisme V du produit tensoriel $C(E) \otimes H^*(R , p)$ du groupe des cochaînes de la base par la cohomologie de la fibre dans le groupe $C(Q_x)$ des cochaînes de l'espace fibré, comme suit :

....

H.WHITNEY "GEOMETRIC INTEGRATION",Princeton, 1956

Preface

In various branches of mathematics and its applications, in particular, in differential geometry and in physics, one has often to integrate a quantity over an r-dimensional manifold M in n-space E^n, for instance, over a surface in ordinary 3-space. Considering M (or a portion of M) as the image of part of r-space E^r, integration over M is reduced to integration in E^r, where standard theory applies. However, it is important to know in what manner the integral over M depends on the position of M in E^n, assuming the quantity to be integrated is defined throughout a region R containing M. Thus we must consider the integral over M as a function of the position of M in E^n. The main purpose of this book is to study this function, in a broad geometric and analytic setting.

Starting with Chapter V, we use a postulational approach. Assuming the simplest properties of what r-dimensional integration in n-space should be like, we are led to a theory which turns out to be precisely the integration of differential forms, which may be of a very general character. Hence the role of differential forms in integration theory is more firmly fixed, and at the same time the scope of the theory is considerably increased.

The subject requires an understanding of the geometric properties of the "direction" of an r-dimensional element in n-space, and of course the fundamentals of calculus in several dimensions. The classical treatment, using coordinate systems, results in sometimes lengthy formulas, which do not make the underlying geometric ideas clear, and whose parts depend on the coordinate system employed. Hence in the first part of the book we give a full exposition of this material, in an elementary manner. The geometric approach is gradually coming into use at present; it is hoped that the early chapters may help in making the methods accessible to the general reader.

An overall picture of what the book is about may be obtained from the introductory chapter; we show how the simplest hypotheses lead to the basic tools employed, and we illustrate these tools particularly in the 3-dimensional case. For a more complete outline of results, one may read the introductory pages to the different chapters. Preliminary material that is somewhat outside the scope of the study but is needed in various parts of the book is collected in the appendices.

The body of the book falls into three Parts. The first Part, Classical theory, leads up to the theory of the Riemann integral; we include also a study of smooth (i.e. differentiable) manifolds. The early chapters should be accessible to the beginning graduate student. The second Part, General theory, gives a postulational approach. More maturity on the

ANALYSIS SITUS

Journal de l'École Polytechnique, t. 1, p. 1-121 (1895).

Introduction.

La Géométrie à n dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de son objet, il n'en est pas de même de l'Hypergéométrie.

La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux.

Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir. C'est que ce langage nouveau est plus concis ; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles.

Peut-être ces raisons ne sont-elles pas suffisantes? Ce n'est pas assez, en effet, qu'une science soit légitime : il faut que l'utilité ne puisse en être contestée. Tant d'objets divers sollicitent notre attention, que les plus importants ont seuls droit de l'obtenir.

Aussi y a-t-il des parties de l'Hypergéométrie auxquelles il n'y a pas lieu de beaucoup s'intéresser : telles sont, par exemple, les recherches sur la courbure des surfaces dans l'espace à n dimensions. On est sûr d'avance d'obtenir les mêmes résultats qu'en Géométrie ordinaire et l'on n'entreprend pas un long voyage pour retrouver des spectacles tout pareils à ceux que l'on rencontre chez soi.

Mais il y a des problèmes où le langage analytique serait tout à fait incommode.

On sait quelle est l'utilité des figures géométriques dans la théorie des fonctions imaginaires et des intégrales prises entre des limites imaginaires, et combien on regrette leur concours quand on veut étudier, par exemple, les fonctions de deux variables complexes.

Cherchons à nous rendre compte de la nature de ce concours; les figures suppléent d'abord à l'infirmité de notre esprit en appelant nos sens à son secours; mais ce n'est pas seulement cela. On a bien souvent répété que la Géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites; encore ces figures, pour ne pas nous tromper, doivent-elles satisfaire à certaines conditions; les proportions peuvent être grossièrement altérées, mais les positions relatives des diverses parties ne doivent pas être bouleversées.

L'emploi des figures a donc avant tout pour but de nous faire connaître certaines relations entre les objets de nos études, et ces relations sont celles dont s'occupe une branche de la Géométrie que l'on a appelée *Analysis situs*, et qui décrit la situation relative des points des lignes et des surfaces, sans aucune considération de leur grandeur.

Il y a des relations de même nature entre les êtres de l'hyperespace; il y a donc une *Analysis situs* à plus de trois dimensions, comme l'ont montré Riemann et Betti.

Cette science nous fera connaître ce genre de relations, bien que cette connaissance ne puisse plus être intuitive, puisque nos sens nous font défaut. Elle va ainsi, dans certains cas, nous rendre quelques-uns des services que nous demandons d'ordinaire aux figures de Géométrie.

Je me bornerai à trois exemples.

La classification des courbes algébriques en genres repose, d'après Riemann, sur la classification des surfaces fermées réelles, faite au point de vue de l'*Analysis situs*. Une induction immédiate nous fait comprendre que la classification des surfaces algébriques et la théorie de leurs transformations birationnelles sont intimement liées à la classification des surfaces fermées réelles de l'espace à cinq dimensions au point de vue de l'*Analysis situs*. M. Picard, dans un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences, a déjà insisté sur ce point.

D'autre part, dans une série de Mémoires insérés dans le *Journal de Liou-*

ville, et intitulés : *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, j'ai employé l'*Analysis situs* ordinaire à trois dimensions à l'étude des équations différentielles. Les mêmes recherches ont été poursuivies par M. Walther Dyck. On voit aisément que l'*Analysis situs* généralisée permettrait de traiter de même les équations d'ordre supérieur et, en particulier, celles de la Mécanique céleste.

M. Jordan a déterminé analytiquement les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à n variables. M. Klein avait antérieurement, par une méthode géométrique d'une rare élégance, résolu le même problème pour le groupe linéaire à deux variables. Ne pourrait-on pas étendre la méthode de M. Klein au groupe à n variables ou même à un *groupe continu quelconque ?* Je n'ai pu jusqu'ici y parvenir, mais j'ai beaucoup réfléchi à la question et il me semble que la solution doit dépendre d'un problème d'*Analysis situs* et que la généralisation du célèbre théorème d'Euler sur les polyèdres doit y jouer un rôle.

Je ne crois donc pas avoir fait une œuvre inutile en écrivant le présent Mémoire; je regrette seulement qu'il soit trop long; mais, quand j'ai voulu me restreindre, je suis tombé dans l'obscurité; j'ai préféré passer pour un peu bavard.

Table des matières.

. . . .

§ 7. Emploi des intégrales.

Considérons une variété V que l'on puisse représenter par les inégalités et égalités (8), (9) et (10) de façon à satisfaire à toutes les conditions énoncées plus haut.

On sait alors ce que l'on doit entendre par l'intégrale multiple d'ordre m

$$\int F\, dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$$

étendue à la variété V; je désigne, bien entendu, par F une fonction donnée des y. Il faut effectuer l'intégration successivement par rapport aux m variables y, et les limites d'intégration seront définies par les inégalités (9) et (10).

Cela posé, je vais définir l'intégrale suivante :

$$\int \sum X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_m}. \tag{11}$$

Les différentielles $dx_{\alpha_1}, dx_{\alpha_2}, \ldots, dx_{\alpha_m}$ sont m quelconques des n différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Les fonctions $X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et il y en a autant qu'il y a de combinaisons possibles des indices

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m,$$

c'est-à-dire qu'il y a de combinaisons de n lettres m à m. Il faut convenir que la fonction X est nulle si deux de ses indices sont égaux et qu'elle change de signe quand on permute deux de ses indices.

Cela posé, l'intégrale (11) sera, par définition, égale à l'intégrale d'ordre m

$$\int \sum X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_m})}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)} dy_1, dy_2, \ldots, dy_m.$$

Si maintenant la variété V n'était pas susceptible d'être représentée par des relations de la forme (8), (9) et (10) satisfaisant à toutes les conditions énoncées, on décomposerait la variété V en variétés partielles assez petites pour être susceptibles de ce mode de représentation et l'intégrale (11), étendue à la variété totale V, serait par définition la somme des intégrales (11) étendues aux diverses variétés partielles.

Cette définition laisse toutefois subsister encore une ambiguïté.

En effet, si l'on permute deux des lettres y_1 et y_2, l'intégrale change de signe; il importe donc de se donner l'ordre de ces lettres et la permutation de deux de ces lettres équivaudrait à un changement du sens de l'intégration dans l'étude des intégrales simples. Je dirai donc le sens de l'intégration pour parler de l'ordre dans lequel on convient de ranger les lettres $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

J'ai eu l'occasion de m'occuper d'une question analogue dans un Mémoire *sur les résidus des intégrales doubles*, inséré au tome IX des *Acta mathematica* et, en particulier, dans le paragraphe 3 de ce Mémoire intitulé : *Conditions d'intégrabilité*.

J'ai recherché dans quels cas ces *conditions d'intégrablité* sont remplies, c'est-à-dire dans quels cas l'intégrale (11) est nulle toutes les fois qu'elle s'applique à une variété fermée.

Voici ce que j'ai trouvé; écrivons pour abréger l'écriture

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

au lieu de $X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}$ et $[\alpha_p]$ au lieu de x_{α_p}.

Nos conditions d'intégrabilité s'écriront

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}{d[\alpha_{m+1}]} \pm \frac{d(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{m-1})}{d[\alpha_1]} \\ &\quad \pm \frac{d(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_1)}{d[\alpha_2]} \pm \ldots \pm \frac{d(\alpha_{m+1}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1})}{d[\alpha_m]} = 0, \end{aligned}\right.$$

Voici la loi suivant laquelle doivent être choisis les signes $\pm$. On prendra toujours le signe $+$ si m est pair, et alternativement le signe $+$ et le signe $-$ si m est impair.

Il y aura autant d'équations (12) qu'il y a de systèmes possibles d'indices

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m, \quad \alpha_{m+1},$$

c'est-à-dire, puisque ces indices doivent être choisis parmi les lettres,

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n,$$

autant qu'il y a de combinaisons de n lettres $m+1$ à $m+1$.

Supposons maintenant que les conditions (12), au lieu d'être satisfaites pour toutes les valeurs possibles des n variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

le soient seulement pour certaines valeurs de ces variables. Par exemple considérons une variété V définie par les conditions

$$F_\alpha = 0, \qquad \varphi_\beta > 0.$$

Soit ensuite un domaine D comprenant tous les points voisins de ceux de V et défini, par exemple, par les conditions

$$-\varepsilon < F_\alpha < \varepsilon, \qquad \varphi_\beta > -\varepsilon,$$

ε étant un très petit nombre positif.

Supposons que les conditions (12) soient satisfaites pour tous les points du domaine D.

En répétant le raisonnement du Mémoire cité et en le modifiant convenablement, on démontrera ce qui suit : Soit une variété V' à $m+1$ dimensions faisant partie de V (le nombre $m+1$ doit donc être inférieur ou au plus égal au nombre des dimensions de V).

Supposons que la frontière complète de V' se compose des k variétés à m dimensions

$$W_1, \quad W_2, \quad \ldots, \quad W_k,$$

de sorte que $W_1 + W_2 + \ldots + W_k \sim 0$.

Alors si l'intégrale (11) satisfait aux conditions (12) dans le domaine D, la somme algébrique des intégrales (11) étendue aux variétés $W_1, W_2, \ldots, W_k$ est nulle. Il faut, bien entendu, pour chacune d'elles, faire attention au sens de l'intégration.

Les conditions (12) sont suffisantes pour qu'il en soit ainsi, mais elles ne sont pas nécessaires; ces conditions, nous l'avons vu, sont en nombre égal à celui des combinaisons de n lettres $m+1$ à $m+1$; il suffirait, pour que le résultat que je viens d'énoncer fût encore exact, que l'intégrale (11) satisfît pour tous les points de V à certaines conditions en nombre égal à celui des combinaisons de $n-p$ lettres $m+1$ à $m+1$, $n-p$ étant le nombre des dimensions de V.

Ces conditions seraient aisées à former, mais cela m'entraînerait trop loin de mon sujet.

Si alors une intégrale (11) satisfait aux conditions (12) dans le domaine D, les diverses valeurs que cette intégrale pourra prendre quand on l'étendra à diverses variétés fermées à m dimensions faisant partie de V seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers d'un certain nombre d'entre elles que l'on pourra appeler les périodes de l'intégrale (11).

Le nombre maximum des périodes est égal à $P_m - 1$; car, si l'on considère P_m variétés fermées quelconques à m dimensions, il y aura toujours une variété à $m+1$ dimensions qui admettra comme frontière complète ces P_m

variétés ou quelques-unes d'entre elles. Il y aura donc toujours entre les P_m intégrales correspondantes une relation linéaire à coefficients entiers. On pourrait d'ailleurs faire voir qu'il existe toujours des intégrales de la forme (11) pour lesquelles le nombre maximum des périodes est atteint. Cette manière de faire comprendre la définition des nombres de Betti a été employée par Betti lui-même pour le premier et le dernier de ces nombres, c'est-à-dire pour P_1 et P_{m-1}; mais nous venons de voir qu'il est aisé de faire de même pour les autres nombres de Betti.