27

Do not Remove

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. *Sur l'existence d'une infinité de géodésiques périodiques sur une variété riemannienne compacte.* Note (*) de M. **Dennis Sullivan** et Mme **Micheline Vigué-Poirrier**, présentée par M. Henri Cartan.

Soit M une variété riemannienne compacte telle que π_1 M soit fini et telle que l'algèbre de cohomologie réelle de M soit engendrée par au moins deux éléments. On montre qu'alors, M a une infinité de géodésiques fermées géométriquement distinctes.

1. Introduction. — En géométrie riemannienne, le problème suivant a été l'objet de nombreuses études [*cf.* (1), (3)] :

Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $\geqq 2$. *Existe-t-il sur M une infinité de géodésiques fermées géométriquement distinctes?*

Il est facile de montrer qu'il en est ainsi si π_1 M a une infinité de classes de conjugaison.

W. Klingenberg a donné une réponse affirmative au problème lorsque la métrique de M est « générique » et que π_1 M est fini.

Dans cette Note, nous montrerons le résultat suivant qui sera exposé en détail dans (6).

Théorème 1. — *Soit* M *une variété riemannienne compacte. Si le groupe fondamental* π_1 M *est fini et si l'algèbre de cohomologie réelle de* M *ne peut être pas engendrée par un seul élément, alors il existe sur* M *une infinité de géodésiques périodiques géométriquement distinctes.*

Remarque. — Soit $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$ le revêtement universel de M muni de la structure riemannienne induite. Comme ce revêtement est fini, il est facile de voir que les problèmes d'existence d'une infinité de géodésiques périodiques sur M et sur $\tilde{M}$ sont équivalents. De plus, si l'algèbre $H^*(M, \mathbf{R})$ est engendrée par au moins deux éléments, alors l'algèbre $H^*(\tilde{M}, \mathbf{R})$ est aussi engendrée par au moins deux éléments. Pour démontrer le théorème, on pourra donc supposer que $\pi_1 M = \{e\}$.

2. Méthodes d'approche du problème. — On utilise le résultat suivant.

Proposition 1 [Gromoll-Meyer (1)]. — *Soit* M *une variété riemannienne compacte simplement connexe de dimension* $\geqq 2$, *et soit* ΛM *l'espace des applications de* S^1 *dans* M. *Si la suite des nombres de Betti* $b_n(\Lambda M)$ [*où* $b_n(\Lambda M) = \dim_{\mathbf{R}}(H^n(\Lambda M, \mathbf{R}))$] *n'est pas bornée, alors il existe sur M une infinité de géodésiques périodiques géométriquement distinctes.*

A tout complexe simplement connexe X, la théorie exposée dans (3) permet d'associer une algèbre différentielle graduée (Λ_X, d) sur $\mathbf{Q}$, appelée modèle minimal de X telle que :

(i) la cohomologie $H^*(\Lambda_X, d)$ est isomorphe à la cohomologie rationnelle singulière de X;

(ii) le nombre de générateurs de Λ_X de degré *n* est égal à la Q-dimension de $\pi_n(X) \otimes \mathbf{Q}$.

De plus, si M est simplement connexe, l'espace ΛM possède encore un modèle minimal ayant les propriétés (i) et (ii).

Définition. — Une algèbre différentielle graduée sur $\mathbf{Q}$, $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_n$ munie d'une différentielle d de degré +1 est dite minimale si $\Lambda_0 = \mathbf{Q}$, $\Lambda_1 = 0$, et Λ est le produit tensoriel d'une algèbre de polynômes graduée en degrés pairs et d'une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs; et pour tout $z \in \Lambda$, on a $dz \in \Lambda^+ . \Lambda^+$, où $\Lambda^+ = \bigoplus_{n>0} \Lambda_n$.

Le modèle minimal d'un complexe simplement connexe est une algèbre minimale au sens précédent.

Si $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ sont les générateurs de Λ, on note $\Lambda(z_1, \ldots, z_n, \ldots; d)$ l'algèbre différentielle graduée Λ.

Théorème 2 [voir (4) ou (6)]. — *Soit* $\Lambda(z_1, \ldots, z_n, \ldots; d)$ *le modèle minimal d'un complexe simplement connexe* M; *alors le modèle minimal de* Λ M *est* $\Lambda(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n, \ldots; d')$ avec $\deg \bar{z}_n = \deg z_n - 1$, $d' z_n = dz_n$ et $d' \bar{z}_n = -i dz_n$, où $i : \Lambda(z_1, \ldots, z_n, \ldots) \to \Lambda(z_1, \bar{z}_1, \ldots)$ *est l'unique dérivation de degré*-1 *prolongeant l'application* $z_n \mapsto \bar{z}_n$.

En résumé, la proposition 1 et le théorème 2 permettent de ramener la démonstration du théorème 1 à un problème algébrique. Nous démontrerons le théorème 3 (qui implique le théorème 1).

Théorème 3. — *Soit* M *un complexe fini simplement connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'algèbre de cohomologie* $H^*(M, \mathbf{Q})$ *ne peut pas être engendrée par un seul élément;*

(ii) *les nombres de Betti de l'espace* Λ M *ne sont pas bornés.*

3. Démonstration du théorème 3. — Nous noterons (Λ, d) le modèle minimal de M et (Λ', d') le modèle minimal de Λ M. Les générateurs en degrés pairs (resp. en degrés impairs) seront notés $x_1, x_2, \ldots$ (resp. $y_1, y_2, \ldots$).

La proposition suivante permet de caractériser les algèbres minimales dont l'algèbre de cohomologie a au moins deux générateurs.

Proposition 2. — *Soit* (Λ, d) *une algèbre différentielle graduée minimale. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $H^*(\Lambda, d)$ *est engendrée par un élément;*

(2) *ou bien* Λ *est engendrée par un élément, ou bien* Λ *est engendrée par deux éléments* x *et* y *où* x *est un générateur polynomial avec* $dx = 0$, *et* y *un générateur extérieur avec* $dy = x^h$, h *entier* $\geqq 2$.

De plus, si Λ *a un nombre fini de générateurs en chaque degré, et si* $H^*(\Lambda)$ *est un* $\mathbf{Q}$*-espace vectoriel de dimension finie,* (1) *ou* (2) *sont équivalents à*

(3) Λ *a un et un seul générateur de degré impair.*

Preuve. — Il est clair que (2) $\Rightarrow$ (1) et (2) $\Rightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2) se démontre en regardant les générateurs de plus bas degré de Λ.

Si Λ vérifie (3), on a $\Lambda = \mathbf{Q}[x_i]_{i \in I} \otimes \mathbf{Q}(y)$. Si $dy \neq 0$, le théorème 2 de (2) montre que $\mathbf{Q}[x_i]/(dy)\,\mathbf{Q}[x_i]$ est un espace vectoriel de dimension finie et donc Λ vérifie (2). Si $dy = 0$, la proposition 2.2.1 de (5) montre que Λ a au plus un générateur polynomial, et comme $\dim_{\mathbf{Q}} H^*(\Lambda) < \infty$, on a $\Lambda = \mathbf{Q}(y)$.

C. Q. F. D.

La démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) du théorème 3 se fait en utilisant la proposition 2 et un calcul explicite de (Λ', d').

Démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii) *du théorème* 3. — On numérote l'ensemble des générateurs de Λ par degré croissant : $x_1, \ldots, x_n; y_1; x_{n+1}, \ldots, x_r; y_2; \ldots$ (la proposition 2 assure l'existence d'au moins deux générateurs extérieurs dans Λ). On a nécessairement $dx_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Premier cas : $dy_1 \neq 0$. Alors on montre par récurrence que $dx_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$. On montre ensuite que, dans Λ', les éléments $\left\{ \left(\prod_{i=1}^{r} \bar{x}_i \right) . \bar{y}_1^{\alpha} . \bar{y}_2^{\beta} \right\}$ (où α et β sont des entiers quelconques) sont des cycles et sont homologiquement indépendants, car on a $d' \Lambda' \subset (x_i, y_j) \Lambda'$. Nous avons donc prouvé (ii) dans ce cas.

Deuxième cas : $dy_1 = 0$. — Si $dy_2 = 0$, on démontre (ii) en considérant les cycles $\{ \bar{y}_1^{\alpha} . \bar{y}_2^{\beta} \}$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$. Si $dy_2 \neq 0$, alors on a $dy_2 \in (x_1, \ldots, x_r)^2 \Lambda$ et $d' \bar{y}_2 \in (x_1, \ldots, x_r) \Lambda'$. L'algèbre quotient $\Lambda'' = \Lambda'/(x_1, \ldots, x_r) \Lambda'$ est une algèbre différentielle graduée munie de la différentielle d'' déduite de d' par passage au quotient. De plus, on a $d'' \bar{y}_2 = 0$. Les éléments $\{ \bar{y}_1^{\alpha} . \bar{y}_2^{\beta} \}$ sont des cycles de (Λ'', d'') dont les images dans $H^*(\Lambda'')$ sont indépendantes. Les dimensions des espaces vectoriels $H^n(\Lambda'', d'')$ ne sont donc pas bornées. On conclut en utilisant la proposition 2.2.2 de (5).

(*) Séance du 23 juin 1975.

(1) D. Gromoll et W. Meyer, *J. of diff. geom.*, 3, n° 4, décembre 1969.

(2) M. C. Heydemann et M. Vigué, *Comptes rendus*, 278, série A, 1974, p. 1607.

(3) D. Sullivan, *Differential Forms and Topology of Manifolds*, Proceedings Japan conference on manifolds, 1973.

(4) D. Sullivan, *A Formula for the Homology of Function Spaces* (à paraître au *Bull. Amer. Math. Soc*),

(5) M. Vigué *Thèse de 3e cycle*, Publications mathématiques d'Orsay, janvier 1975.

(6) M. Vigué et D. Sullivan, *The Homology Theory of the Closed Geodesic Problem* (à paraître au *J. of diff. geom.*).

D. S. :

Institut des Hautes études scientifiques,
35, route de Chartres,
91440 Bures-sur-Yvette;

M. V.-P. :

Département de Mathématiques,
Bât. 425,
Université de Paris-Sud,
91405 Orsay.