ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2011, т. 273, с. 271–303

УДК 512.623.8

Об основных понятиях тропической геометрии

©2011 г. О. Я. Виро[1]

Поступило в апреле 2010 г.

Вводится бинарная операция над комплексными числами, являющаяся тропическим аналогом сложения. Вместе с обычным умножением комплексных чисел эта операция удовлетворяет аксиомам, обобщающим обычные аксиомы поля. Алгебраическая геометрия над определенным таким образом комплексным тропическим мультиполем занимает промежуточное положение между классической комплексной алгебраической геометрией и тропической геометрией. Деформация, аналогичная деквантованию Литвинова–Маслова вещественных чисел, дает вырождение комплексных алгебраических многообразий в комплексные тропические многообразия, тогда как амеба комплексного тропического многообразия оказывается соответствующим тропическим многообразием. Аналогичные тропические модификации с многозначными сложениями строятся также и для других полей: для вещественных чисел, p-адических чисел и кватернионов.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Тропическая геометрия. Когда тропическую геометрию хотят описать одной фразой, говорят, что это алгебраическая геометрия над полуполем $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\max,+} \cup \{-\infty\}$. Элементами полуполя $\mathbb{T}$ служат вещественные числа и добавленная к ним $-\infty$, роль сложения в нем исполняет операция взятия наибольшего из двух чисел: $(a,b) \mapsto \max(a,b)$, а роль умножения — обычное сложение чисел. Роль нуля играет $-\infty$, а роль единицы $0 \in \mathbb{R}$. Обычные свойства сложения и умножения элементов поля выполнены, за следующим исключением: сложение совершенно необратимо, т.е. ни для какого $a \in \mathbb{R}$ не существует такого $x \in \mathbb{R}$, чтобы $\max(a,x) = -\infty$. Это влечет отсутствие вычитания. Взамен сложение обладает свойством идемпотентности, $\max(a,a) = a$.

Такое определение тропической геометрии создает впечатление экзотичности предмета и его удаленности от центральных областей математики. Впечатление это ложно. Тропическая геометрия применяется для решения трудных классических проблем алгебраической геометрии над полями комплексных и вещественных чисел. Собственно она и возникла из решения таких задач. Тропические многообразия появлялись в разных математических контекстах под разными именами: логарифмические предельные множества Бергмана [1], множества Бьери–Гроува [3], неархимедовы амебы Капранова [12]. Тропические кривые являются ключевым элементом комбинаторного патчворкинга — мощного метода построения вещественных алгебраических кривых с контролируемой топологией [28, 11] и вычисления плоских инвариантов Громова–Виттена, принадлежащего Михалкину [19].

Хотя некоторые из упомянутых выше ростков тропической геометрии появились очень давно (кое-что можно проследить от Ньютона), как самостоятельный предмет она была осознана лишь лет девять назад; сам термин тропическая геометрия появился приблизительно в 2002 г. Несмотря на свой юный возраст, тропическая геометрия хорошо представлена в литературе. Вот некоторые обзоры, дающие довольно полную картину разных ее аспектов в разные моменты развития: [25, 26, 9, 13, 20–22, 7]. Тесно связаны с этим предметом и многочисленные аспекты алгебраической геометрии, группирующиеся вокруг понятия многогранник Ньютона (см. монографию Гельфанда, Капранова и Зелевинского [10]), и работы Берковича по p-адическим

[1]Mathematics Department, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794-3651, USA.
E-mail: oleg.viro@gmail.com

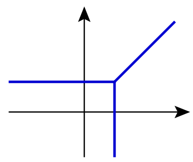


Рис. 1. Тропическая прямая, отвечающая тропической линейной форме $\max(x, y, 1)$

аналитическим пространствам (см. [2]), и работы по гомологической зеркальной симметрии в стиле Концевича–Сойбельмана [14].

1.2. Тропические многообразия. Главные объекты изучения тропической геометрии весьма просты. Для того чтобы дать какое-то представление о них, ограничусь тропическими гиперповерхностями пространства $\mathbb{R}^n_{\max,+}$. Как и в классической алгебраической геометрии, всякая аффинная гиперповерхность определяется одним полиномиальным уравнением, но полином, разумеется, должен быть тропическим, т.е. над $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Тропический многочлен есть тропическая сумма нескольких тропических одночленов, т.е. максимум нескольких тропических одночленов. Тропический одночлен есть тропическое произведение (т.е. сумма) коэффициента и тропических степеней переменных. Тропическое возведение в степень k есть простое умножение на k. Таким образом, тропический многочлен от n переменных в терминах обычных арифметических операций есть

$$p(x_1, \dots, x_n) = \max_{k=(k_1,\dots,k_n)} (a_k + k_1x_1 + \dots + k_nx_n),$$

т.е. выпуклая кусочно линейная функция.

Можно было бы ожидать, что тропическая гиперповерхность, определяемая многочленом p, задается уравнением $p(x_1, \dots, x_n) = -\infty$, поскольку $-\infty$ играет в тропическом полуполе $\mathbb{T}$ роль нуля, но такое уравнение не имеет решений и тропическая гиперповерхность, задаваемая многочленом p, определяется как множество, где он как функция недифференцируем. Иными словами, точка принадлежит тропической гиперповерхности, определяемой тропическим многочленом $p(x_1, \dots, x_n) = \max_{k=(k_1,\dots,k_n)}(a_k + k_1x_1 + \dots + k_nx_n)$, если в ней значение многочлена равно значениям не менее двух линейных функций $a_k + k_1x_1 + \dots + k_nx_n$ (т.е. максимум достигается более чем на одной из линейных функций).

Например, тропическая прямая, отвечающая тропической линейной форме $\max(x, y, 1)$ (которая соответствует классической линейной форме $x + y + 1$), представлена на рис. 1.

1.3. Деквантование. Связи тропической геометрии с другими частями математики разнообразны, однако многие из них основаны на одном явлении. Имеется непрерывная деформация, превращающая полуполе $\mathbb{R}_{\geq 0}$ неотрицательных вещественных чисел с обычными операциями сложения и умножения в тропическое полуполе $\mathbb{T}$ (см. [15, 29]). Эта деформация называется *деквантованием Литвинова–Маслова* вещественных чисел.

Формально говоря, деквантование Литвинова–Маслова представляет собой семейство полуполей $\{T_h\}_{h\in[0,\infty)}$. Как множество T_h есть $\mathbb{R}$ при каждом h. Полукольцевые бинарные операции $\oplus_h$ и $\odot_h$ в T_h определяются следующим образом:

$$a \oplus_h b = \begin{cases} h\ln(e^{a/h} + e^{b/h}) & \text{при } \ h > 0, \\ \max\{a, b\} & \text{при } \ h = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$a \odot_h b = a + b. \tag{2}$$

Эти операции зависят от h *непрерывно.* При $h > 0$

$$D_h \colon \mathbb{R}_{>0} \to T_h \colon x \mapsto h \ln x$$

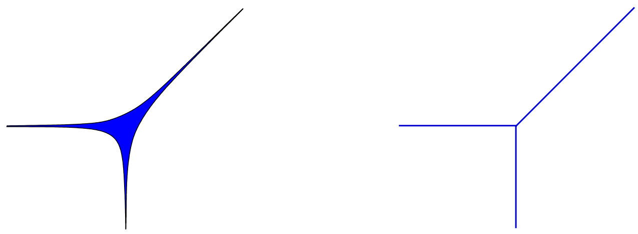


Рис. 2. Амеба прямой (слева) сжимается в тропическую прямую (справа)

есть изоморфизм полукольца $\{\mathbb{R}_{>0}, +, \cdot\}$ на полукольцо $\{T_h, \oplus_h, \odot_h\}$. Таким образом, при $h > 0$ полукольцо T_h является копией полукольца $\mathbb{R}_{>0}$ с обычными операциями. Полукольцо T_0 есть тропическое полукольцо $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Любое однопараметрическое семейство объектов, в котором все объекты, кроме одного, изоморфны друг другу, а этот специальный объект в некотором смысле вырожден, рассматривается как своего рода квантование этого вырожденного объекта. В случае семейства T_h это тем более оправдано, поскольку T_h было открыто в связи с квантовой механикой (см. [15]). С математической точки зрения T_h представляет собой непрерывное вырождение полукольца $\mathbb{R}_{>0}$ в $\mathbb{R}_{\max,+}$. С квантовой точки зрения T_0 есть *классический* объект (идемпотентное полукольцо $\mathbb{R}_{\max,+}$, не столь классическое в математике), тогда как T_h при $h \neq 0$ — *квантовые* объекты (хотя и очень классические в математике), а все семейство T_h — квантование полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$. Деквантование Литвинова–Маслова непрерывно деформирует график многочлена над T_h в график того же многочлена над тропическим полукольцом.

Сочетание относительной простоты тропических многообразий с возможностью их последующего превращения посредством квантования Литвинова–Маслова в комплексные и вещественные алгебраические многообразия с сохранением многих геометрических свойств позволяет доказывать существование алгебраических многообразий с интересными свойствами средствами тропической геометрии.

Однако деквантование Литвинова–Маслова применяется к алгебраическим многообразиям над полем $\mathbb{C}$ несколько опосредованно. Деформируется и затем вырождается в тропическое многообразие не само комплексное многообразие, а его *амеба*, т.е. образ многообразия $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ при отображении

$$\mathrm{Log}\colon\ (\mathbb{C} \setminus 0)^n \to \mathbb{R}^n\colon\ (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|).$$

Например, амеба прямой сжимается в тропическую прямую (рис. 2).

Специалистам хорошо известно, что соответствующая деформация во многих случаях может быть проделана и с самим многообразием. Более того, предельные объекты детально изучались. В частности, Михалкин [19] для решения задач исчислительной геометрии посредством тропической техники рассматривал плоские комплексные тропические кривые как образы кривых над полем рядов Пьюзо и как пределы голоморфных кривых при подходящем вырождении комплексной структуры (см. [19, Sect. 6]). Появлялись у Михалкина и комплексные тропические гиперповерхности (см. [18, Sect. 6.3]). Однако они появлялись как вспомогательные объекты и не рассматривались как алгебраические многообразия над каким-либо полем.

1.4. Комплексная тропическая геометрия. В настоящей работе строятся объекты, которые заполняют указанный выше пробел между классической алгебраической геометрией над $\mathbb{C}$ и тропической геометрией. Строится тропическое вырождение поля $\mathbb{C}$. Оно оказывается несколько экзотическим: в нем операция сложения многозначна. Тем не менее оно во многом похоже на обычные поля и, в частности, имеется алгебраическая геометрия над ним.

Неособые гиперповерхности в этой геометрии являются топологическими многообразиями, они могут получаться как вырождения гомеоморфных им комплексных алгебраических гиперповерхностей при деформации, аналогичной деквантованию Литвинова–Маслова, а их амебы являются тропическими многообразиями.

1.5. Мультиполя. Тропическое вырождение поля $\mathbb{C}$ удовлетворяет системе аксиом, максимально близкой к системе аксиом поля. Все отличия связаны исключительно с многозначностью сложения. Аналогичные вырождения допускает сложение во многих других алгебраических системах. Упомяну лишь поля вещественных и p-адических чисел и тело кватернионов. Здесь мы соприкасаемся не с единичным примером, а с неисследованным явлением весьма общей природы, изучение и тем более оценка которого выходит за рамки настоящей работы.

Благодарности. Я благодарен Петербургскому отделению Математического института РАН за постоянную поддержку, которую я чувствовал на протяжении всей своей математической карьеры независимо от того, в каких формальных отношениях с этим институтом находился. Работа выполнена в лаборатории геометрии и топологии этого института в рамках Программы фундаментальных исследований РАН, тема 01200960820. Часть исследования, представленного в этой работе, выполнена, когда я участвовал в семестровой программе по тропической геометрии Mathematical Sciences Research Institute в Беркли, и я считаю своим долгом выразить благодарность за прекрасные условия и возможность непосредственного общения с ведущими тропическими геометрами. Наконец, я благодарен своим коллегам Г.Б. Михалкину, В.М. Харламову, Я.М. Элиашбергу, И.В. Итенбергу, Л. Кацаркову и И.Г. Жаркову за полезные замечания, вопросы и советы.

2. АЛГЕБРА МНОГОЗНАЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ

2.1. Многозначные отображения. Символ 2^X обозначает множество всех подмножеств множества X. *Многозначное отображение* множества X в множество Y — это в сущности отображение $X \to 2^Y$, с которым по тем или иным причинам обращаются как с отображением $X \to Y$, не удовлетворяющим требованию однозначности (согласно которому каждому элементу множества X отображение соотносит *в точности один* элемент множества Y).

К такому отступлению от стандартов языка современной математики вынуждает обычно желание подчеркнуть аналогию с ситуациями, в которых соответствующее отображение однозначно. Например, в настоящей работе мы имеем дело с обобщением сложения, когда сумма может оказаться многозначной. Использование современной теоретико-множественной терминологии затушевало бы аналогии с обычным сложением до неузнаваемости, что заставляет прибегнуть к нетрадиционной терминологии многозначных отображений.

Многозначное отображение f множества X в множество Y обозначают символом $f\colon X \multimap Y$.

Как и другие отступления от теоретико-множественных обычаев, это влечет целую цепь изменений в общепринятых определениях и обозначениях. Некоторые изменения прямолинейны и не приводят к недоразумениям. Например, через $f(a)$ обозначается подмножество множества Y, являющееся образом элемента $a \in X$ при соответствующем отображении $X \to 2^Y$, тогда как для подмножества $A \subset X$ через $f(A)$ обозначается не подмножество $\{f(x)\colon x \in A\}$ множества 2^Y, а подмножество $\bigcup_{x \in A} f(x)$ множества Y.

В том же духе композицией многозначных отображений $f\colon X \multimap Y$ и $g\colon Y \multimap Z$ называется многозначное отображение $g \circ f\colon X \multimap Z$ переводящее $a \in X$ в $g(f(a)) = \bigcup_{y \in f(a)} g(y)$.

Другие изменения менее очевидны. Например, что такое прообраз множества $B \subset Y$ при многозначном отображении $f\colon X \multimap Y$? Множество $\{a \in X\colon f(a) \subset B\}$ или множество $\{a \in \in X\colon f(a) \cap B \neq \varnothing\}$? Значит, понятие прообраза расщепляется при переходе от однозначных отображений к многозначным. В случаях такого расщепления приходится вводить новые термины. Множество $\{a \in X\colon f(a) \subset B\}$ называется *верхним прообразом* множества B при f

и обозначается символом $f^+(B)$, тогда как множество $\{a \in X\colon f(a) \cap B \neq \varnothing\}$ называется *нижним прообразом* множества B при f и обозначается символом $f^-(B)$. Названия несколько странные, поскольку $f^+(B) \subset f^-(B)$, т.е. верхний прообраз меньше нижнего.

При желании прибегнуть к стандартной теоретико-множественной терминологии мы будем переходить от многозначного отображения $f\colon X \multimap Y$ к соответствующему однозначному отображению $X \to 2^Y$. Последнее будет обозначаться символом $f^{\uparrow}$.

2.2. Многозначные бинарные операции. *Многозначной бинарной операцией* в множестве X называется многозначное отображение $X \times X \multimap X$ с непустыми значениями, т.е. любое отображение $X \times X \to 2^X \setminus \{\varnothing\}$.

Говорят, что бинарная многозначная операция $f\colon X \times X \multimap X$ *коммутативна*, если равенство $f(a,b) = f(b,a)$ выполнено для любых $a, b \in X$.

Говорят, что бинарная многозначная операция $f\colon X \times X \multimap X$ *ассоциативна*, если равенство $f(f(a,b),c) = f(a, f(b,c))$ выполнено для любых $a, b, c \in X$. Разумеется, в последней формуле под f следует понимать естественное продолжение операции f на все подмножества множества X, т.е.

$$2^X \times 2^X \to 2^X\colon\ (A,B) \mapsto \bigcup_{a\in A,\ b\in B} f(a,b).$$

Пусть $Y \subset X$ и $f\colon X \times X \multimap X$ — многозначная бинарная операция. Говорят, что многозначная бинарная операция $g\colon Y \times Y \multimap Y$ *индуцирована* операцией f, если $g(a,b) = f(a,b) \cap Y$ для любых $a, b \in Y$. Индуцированная операция полностью определена исходной. Она существует тогда и только тогда, когда $f(a,b) \cap Y \neq \varnothing$ для любых $a, b \in Y$ (напомню, что по определению многозначной бинарной операции множеству $g(a,b)$ запрещено быть пустым).

2.3. Многозначные группы. Множество X с *многозначной* операцией $(a,b) \mapsto a \top b$ называется (*коммутативной*) *мультигруппой*, если

(1) операция $\top$ ассоциативна и коммутативна;

(2) в X имеется такой элемент 0, что $0 \top a = a$ для любого $a \in X$;

(3) для каждого элемента $a \in X$ существует единственный элемент $-a \in X$ такой, что $0 \in a \top (-a)$.

Это непосредственное обобщение понятия абелевой группы: мультигруппа, в которой операция однозначна (т.е. $a \top b$ состоит из одного элемента для любых a и b), является абелевой группой.

Разумеется, ничто не мешает рассматривать и некоммутативные мультигруппы, но в настоящей работе они не понадобятся.

Мы пользуемся символом $\top$ (а не $+$) здесь потому, что операцию $(a,b) \mapsto a \top b$ нам обычно придется рассматривать вместе с обычным сложением $(a,b) \mapsto a + b$.

2.4. Самая маленькая мультигруппа. В множестве $\{0,1\}$ определим операцию $\top$ формулами $0 \top 0 = 0$, $0 \top 1 = 1 = 1 \top 0$, $1 \top 1 = \{0,1\}$. Легко проверить, что это мультигруппа. Следуя Маршаллу [16], обозначим ее символом Q_1. Это единственная мультигруппа из двух элементов, не являющаяся группой.

2.5. Замечания об истории понятия мультигруппы. Мультигруппы появлялись многократно в разных контекстах и иногда под разными названиями (такими как *гипергруппа* или *полигруппа*). Наиболее ранние сочинения [17, 30] о них, какие мне удалось найти, датированы 1934 г. Некоторые авторы, определявшие их, по-видимому, не знали о своих предшественниках. Я признателен А.М. Вершику, который вывел меня из такого заблуждения.

Нередко термины мультигруппа и гипергруппа обозначали объекты более широких классов. Например, Дрешер и Оре [6] использовали слово мультигруппа в гораздо более широком

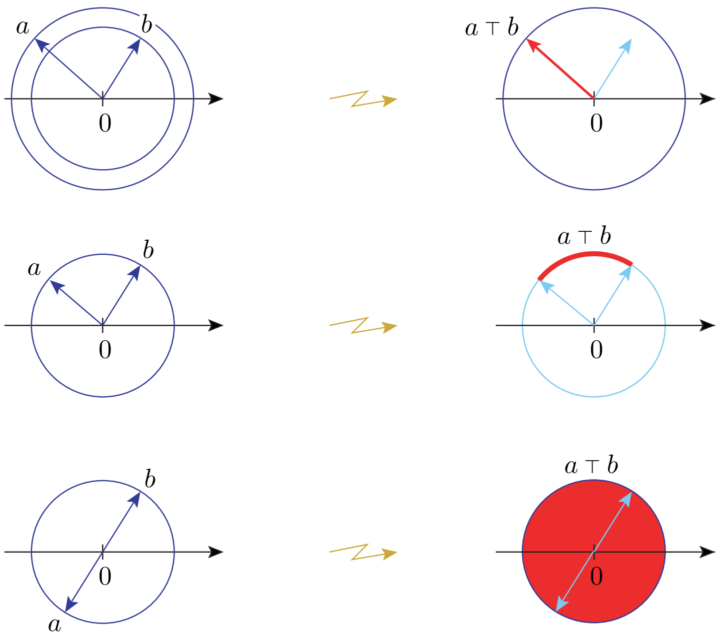


Рис. 3. Тропическое сложение комплексных чисел

смысле, тогда как то, что мы называем мультигруппой, Дрешер и Оре [6] назвали бы регулярной обратимой в себе коммутативной мультигруппой с абсолютной единицей (a regular multigroup reversible in itself with an absolute unit).

Определение, данное выше, представляется самым узким многозначным обобщением понятия абелевой группы. В сравнительно недавних публикациях то же понятие рассматривали С.Д. Комер [5] (он пользовался термином *полигруппа*) и М. Маршалл [16].

Имеется другая разновидность понятия мультигруппы, в которой операция принимает фиксированное число значений, некоторые из которых могут совпадать друг с другом. Таким образом, операция принимает значения в n-й симметрической степени множества, а не в множестве всех его подмножеств. Эта разновидность мультигрупп рассматривалась Уоллом [31] и в наши дни Бухштабером и Рисом (Rees) [4].

2.6. Тропическое сложение комплексных чисел. Пусть a, b — произвольные комплексные числа. Положим

$$a \top b = \begin{cases} \{a\}, & \text{если } \ |a| > |b|, \\ \{b\}, & \text{если } \ |a| < |b|, \\ \{|a|e^{\varphi i}\colon \varphi \in [\alpha, \beta]\}, & \text{если } \ a = |a|e^{\alpha i}, \quad b = |a|e^{\beta i}, \quad \beta - \alpha < \pi, \\ \{c \in \mathbb{C}\colon |c| \le |a|\}, & \text{если } \ a + b = 0 \end{cases}$$

(см. рис. 3). Множество $a \top b$ будем называть *тропической суммой* чисел a и b.

Теорема 2.А. *Множество всех комплексных чисел, снабженное тропической суммой, является мультигруппой.*

Доказательство. Коммутативность тропического сложения очевидна. Нейтральным элементом, очевидно, служит 0. Для любого комплексного числа a единственным комплексным числом b таким, что $0 \in a \top b$, является $-a$. Из всех аксиом мультигруппы только ассоциативность требует реальной проверки. Выделим ее в отдельную лемму. $\square$

Лемма 2.B. *Тропическое сложение комплексных чисел ассоциативно.*

Доказательство. Докажем, что $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$ для любых комплексных чисел a, b, c. Следующий список исчерпывает все типы троек комплексных чисел:

(1) абсолютная величина одного из чисел, скажем a, больше абсолютных величин двух других чисел: $|a| > |b|, |c|$;

(2) $|a| = |c| > |b|$;

(3) $|a| = |b| > |c|$, при этом

  (а) $a \neq -b$;

  (б) $a = -b$;

(4) $|a| = |b| = |c|$, при этом

  (а) $a + b \neq 0 \neq b + c$;

  (б) либо $a + b = 0$, либо $b + c = 0$, но не оба равенства;

  (в) $a + b = 0 = b + c$, но $a \neq 0$;

  (г) $a = b = c = 0$.

Докажем ассоциативность в каждом из этих случаев. В рамках доказательства нам удобно будет иметь дублирующие обозначения для множеств, возникающих как тропические суммы. В случае, когда тропическая сумма комплексных чисел a, b есть дуга (т.е. $|a| = |b|$ и $a + b \neq 0$), будем обозначать эту дугу символом $\frown(ab)$.

(1) В первом случае (т.е. когда $|a| > |b|, |c|$) тропическая сумма равна a — слагаемому с наибольшей абсолютной величиной независимо от порядка выполнения операций, при любом порядке это слагаемое мажорирует другие и оказывается окончательным результатом. $\square$

(2) Если $|a| > |b|$ и $|b| < |c|$, то $a \top b = a$ и $b \top c = c$. Поэтому $(a \top b) \top c = a \top c$ и $a \top (b \top c) = a \top c$. $\square$

(3а) Так как в рассматриваемом случае $|a| = |b|$ и $a \neq -b$, то $a \top b = \frown(ab)$, а поскольку $|c| < |a|$, то $c \top x = x$ для любого x с $|x| = |a|$. Поэтому $(a \top b) \top c = (\frown(ab)) \top c = \frown(ab)$. С другой стороны, $a \top (b \top c) = a \top b = \frown(ab)$. $\square$

(3б) Имеем

$$(a \top -a) \top c = \{x\colon |x| \leq |a|\} \top c =$$

$$= \begin{pmatrix} \{x\colon |c| < |x| \leq |a|\} \cup \\ \{x\colon |x| = |c|,\ x \neq -c\} \cup \\ \{-c\} \cup \\ \{x\colon |x| < |c|\} \end{pmatrix} \top c = \begin{pmatrix} \{x\colon |c| < |x| \leq |a|\} \cup \\ \{x\colon |x| = |c|,\ x \neq -c\} \cup \\ \{x\colon |x| \leq |c|\} \cup \\ \{c\} \end{pmatrix} = \{x\colon |x| \leq |a|\}.$$

С другой стороны, $a \top (-a \top c) = a \top (-a) = \{x\colon |x| \leq |a|\}$. $\square$

(4а) Имеем

$$(a \top b) \top c = (\frown(ab)) \top c = \begin{cases} \{x\colon |x| \leq |a|\}, & \text{если } -c \in (\frown(ab)), \\ (\frown(ac)) \cup (\frown(bc)), & \text{если } -c \notin (\frown(ab)). \end{cases}$$

С другой стороны,

$$a \top (b \top c) = a \top (\frown(bc)) = \begin{cases} \{x\colon |x| \leq |a|\}, & \text{если } -a \in (\frown(bc)), \\ (\frown(ab)) \cup (\frown(ac)), & \text{если } -a \notin (\frown(bc)). \end{cases}$$

Условия $-c \in (\frown(ab))$ и $-a \in (\frown(bc))$ эквивалентны. Действительно, как легко видеть, каждое из них эквивалентно тому, что выпуклая оболочка трехточечного множества $\{a, b, c\}$

содержит 0. Если это условие не выполнено, то $\{a,b,c\}$ содержится в половине окружности $\{x\colon |x|=|a|\}$ и тогда $(\frown(ac))\cup(\frown(bc))=(\frown(ab))\cup(\frown(ac))$ есть наименьшая дуга окружности, содержащая a, b, c, т.е. своего рода выпуклая оболочка множества $\{a,b,c\}$ в полуокружности. $\square$

(4б) Если $|a|=|b|=|c|$, $a+b=0$, но $b+c\neq 0$, то $(a\top b)\top c=\{x\colon |x|\le|a|\}\top c=(\{-c\}\cup\cup\{x\colon x\neq -c,\ |x|\le|a|\})\top c=\{x\colon |x|\le|a|\}$. С другой стороны, $a\top(-a\top c)=a\top(\frown(-a,c))==\{x\colon |x|\le|a|\}$. $\square$

(4в) Если $|a|=|b|=|c|\neq 0$ и $a+b=0=b+c$, то $(a\top b)\top c=(a\top -a)\top a=a\top(-a\top a)==a\top(b\top c)$. $\square$

(4г) Не нуждается в доказательстве. $\square$

Теорема 2.C. *Пусть $a_1,\dots,a_n$ — комплексные числа с абсолютными величинами, равными r. Тогда*

- *либо $a_1\top\dots\top a_n$ есть замкнутый круг с центром в 0 радиуса r и получается как сумма не более чем трех из слагаемых $a_1,\dots,a_n$ и $0\in\operatorname{Conv}(a_1,\dots,a_n)$,*
- *либо $a_1\top\dots\top a_n$ есть дуга окружности с центром в 0 радиуса r, содержащаяся в половине этой окружности и представляющая собой тропическую сумму не более двух из слагаемых $a_1,\dots,a_n$.*

Доказательство. Для $n=2$ это утверждение есть непосредственное следствие определения тропической суммы. Допустим, для всех $n<k$ утверждение леммы доказано, и докажем его для $n=k$.

В силу предположения тропическая сумма первых $k-1$ слагаемых есть либо весь замкнутый круг и тогда $0\in\operatorname{Conv}(a_1,\dots,a_{k-1})$, либо дуга окружности, меньшая половины окружности. В первом случае тропическая сумма всех k слагаемых есть все тот же круг, поскольку $-a_k\in a_1\top\dots\top a_{k-1}$, и $0\in\operatorname{Conv}(a_1,\dots,a_k)$, поскольку $0\in\operatorname{Conv}(a_1,\dots,a_{k-1})$.

Во втором случае возможны две взаимоисключающие ситуации: либо $-a_k$ принадлежит дуге $a_1\top\dots\top a_{k-1}$ и тогда $a_1\top\dots\top a_k$ есть круг, либо $-a_k$ не принадлежит дуге $a_1\top\dots\top a_{k-1}$.

В первой ситуации диаметр круга, соединяющий точки a_k и $-a_k$, делит дугу $a_1\top\dots\top a_{k-1}$, а значит, и хорду, соединяющую ее концы. Центр круга лежит на отрезке этого диаметра, соединяющем a_k с хордой, стягивающей концы дуги $a_1\top\dots\top a_{k-1}$. Концы этой дуги являются в силу индукционного предположения какими-то из первых $k-1$ слагаемых. Следовательно, $0\in\operatorname{Conv}(a_1,\dots,a_k)$.

Во второй ситуации либо a_k лежит на дуге $a_1\top\dots\top a_{k-1}$ и тогда $a_1\top\dots\top a_k=a_1\top\dots\top a_{k-1}$, так что оказывается выполнена вторая альтернатива, либо a_k не лежит на дуге $a_1\top\dots\top a_{k-1}$ и тогда эта дуга лежит по одну сторону от диаметра, соединяющего a_k с $-a_k$. В этом случае вся сумма $a_1\top\dots\top a_k$ есть дуга, один из концов которой есть a_k, а другой — один из концов дуги $a_1\top\dots\top a_{k-1}$. $\square$

Следствие 2.D. *Тропическая сумма любого конечного множества комплексных чисел равна тропической сумме подмножества, состоящего не более чем из трех слагаемых. Если тропическая сумма не содержит нуля, то число слагаемых можно сократить до двух.* $\square$

Следствие 2.E. *Тропическая сумма конечного числа комплексных чисел содержит нуль тогда и только тогда, когда нуль содержится в выпуклой оболочке тех слагаемых, которые имеют наибольшую абсолютную величину.* $\square$

2.7. Тропическое сложение вещественных чисел. Тропическое сложение комплексных чисел индуцирует на $\mathbb{R}$ бинарную многозначную операцию $a\top_{\mathbb{R}} b=(a\top b)\cap\mathbb{R}$. Более

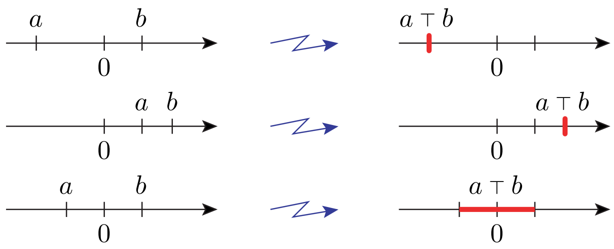


Рис. 4. Тропическое сложение вещественных чисел

непосредственно множество $a \top_{\mathbb{R}} b$ описывается следующим образом (см. также рис. 4):

$$a \top_{\mathbb{R}} b = \begin{cases} \{a\}, & \text{если} \quad |a| > |b|, \\ \{b\}, & \text{если} \quad |a| < |b|, \\ \{a\}, & \text{если} \quad a = b, \\ [-|a|, |a|], & \text{если} \quad a = -b. \end{cases}$$

Операцию $(a, b) \mapsto a \top_{\mathbb{R}} b$ будем называть *вещественной тропической суммой* или просто *тропической суммой*, если вещественность ясна из контекста.

Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел, снабженное тропической суммой, как легко проверить, является мультигруппой.

2.8. Гомоморфизмы. Пусть X и Y суть мультигруппы. Отображение $f\colon X \to Y$ называется (*мультигрупповым*) *гомоморфизмом*, если $f(a \top b) \subset f(a) \top f(b)$ для любых $a, b \in X$.

Пример. Неархимедова норма $K \to \mathbb{R}$ удовлетворяет ультраметрическому неравенству треугольника $|a + b| \le \max(a, b)$ для любых $a, b \in K$. Это означает, что она является гомоморфизмом аддитивной группы K в мультигруппу $(\mathbb{R}, \top_{\mathbb{R}})$, определенную в п. 2.7.

2.9. Кольца и поля с многозначным сложением. Множество X, снабженное бинарной многозначной операцией $\top$ и (однозначным) умножением, называется *мультикольцом*, если оно является коммутативной мультигруппой относительно $\top$, умножение ассоциативно и коммутативно, а также дистрибутивно относительно $\top$.

Многозначное кольцо X называется *мультиполем*, если $X \setminus 0$ есть группа относительно умножения.

Примеры мультиполей. Мультигруппа Q_1, введенная выше в п. 2.4, превращается в мультиполе единственным образом. Напомню, что $Q_1 = \{0, 1\}$ с операцией $\top$, которая определяется формулами $0 \top 0 = 0$, $0 \top 1 = 1 = 1 \top 0$, $1 \top 1 = \{0, 1\}$. Умножение в Q_1 определяется формулами $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

Многозначные группы $(\mathbb{R}, \top_{\mathbb{R}})$ и $(\mathbb{C}, \top)$ с обычным умножением являются мультиполями. Говоря о мультиполях $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, мы всегда будем иметь в виду $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ с обычным умножением и с тропическим сложением $\top_{\mathbb{R}}$ и $\top$ соответственно. Другие похожие примеры приведены в добавлении 1.

Комплексное сопряжение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \bar{z}$ является автоморфизмом мультиполя $\mathbb{C}$.

Мультиполе треугольников. В множестве $\mathbb{R}_{\ge 0}$ неотрицательных вещественных чисел определим многозначное сложение $\triangledown$ формулой

$$a \triangledown b = \{c \in \mathbb{R}_{\ge 0} \colon |a - b| \le c \le a + b\}.$$

Другими словами, $a \triangledown b$ — множество всех таких вещественных чисел c, что существует треугольник с длинами сторон a, b, c.

Теорема 2.F. *Множество $\mathbb{R}_{\geq 0}$ с многозначным сложением $\triangledown$ и обычным умножением является мультиполем.*

Доказательство. Очевидно, это сложение коммутативно. Для того чтобы показать, что оно ассоциативно, заметим, что как $(a \triangledown b) \triangledown c$, так и $a \triangledown (b \triangledown c)$ есть множество таких вещественных чисел x, что существует четырехугольник с длинами сторон a, b, c, x.

Обычное умножение дистрибутивно относительно $\triangledown$. Роль нуля играет 0. Наконец, для любого $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ единственным вещественным числом x таким, что $0 \in a \triangledown x$, является само число a. $\square$

Назовем это мультиполе *мультиполем треугольников* и обозначим его символом ∇.

Мультиполе линейного порядка. Пусть X — мультипликативная группа с таким линейным порядком $\prec$, что если $a \prec b$, то $ac \prec bc$ для любых $a, b, c \in X$. Пусть $Y = X \cup \{0\}$. Распространим порядок $\prec$ с X на Y, полагая $0 \prec x$ для любого $x \in X$. Определим в Y многозначное сложение $\curlyvee$

$$(a,b) \mapsto a \curlyvee b = \begin{cases} \max(a,b), & \text{если } \ a \neq b, \\ \{x \in X : x \preceq a\}, & \text{если } \ a = b. \end{cases}$$

Легко видеть, что X с $\curlyvee$ представляет собой мультигруппу, в которой $-a = a$ для любого $a \in X$. Распространим умножение с X на Y, полагая $x0 = 0$ для любого $x \in Y$. Легко видеть, что Y с многозначным сложением $\curlyvee$ и этим умножением является мультиполем.

В случае тривиальной группы $X = \{1\}$ эта конструкция дает Q_1.

Мультиполе ультраметрических треугольников. Эта конструкция, примененная к мультипликативной группе положительных вещественных чисел, снабженных обычным порядком $<$, определяет структуру мультиполя в $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Напомню, что сложение в нем определяется формулой

$$(a,b) \mapsto a \curlyvee b = \begin{cases} \max(a,b), & \text{если } \ a \neq b, \\ \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x \preceq a\}, & \text{если } \ a = b, \end{cases}$$

а умножение есть обычное умножение вещественных чисел.

Это же мультиполе можно определить по-другому. Для этого нужно в конструкции мультиполя треугольников неравенства треугольника заменить неархимедовыми (т.е. ультраметрическими) неравенствами треугольника $|c| \leq \max(|a|, |b|)$. Назовем это мультиполе *мультиполем ультраметрических треугольников* и обозначим символом $U\Delta$.

Тропическое мультиполе. Отображение $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ естественно продолжается до отображения $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, переводящего 0 в $-\infty$. Будем обозначать его тем же символом log. Это биекция, и структура мультиполя ультраметрических треугольников $U\Delta$ переносится посредством log в множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Полученное мультиполе обозначим символом $\mathbb{Y}$ и назовем *тропическим мультиполем.*

Тропическое мультиполе получается и посредством конструкции мультиполя линейного порядка, примененной к аддитивной группе всех вещественных чисел с обычным порядком $<$. Сложение в этом мультиполе отличается от сложения $(a,b) \mapsto \max(a,b)$ в полуполе $\mathbb{T}$ только на диагонали: $\max(a,a) = a \neq a \curlyvee a = \{x \in \mathbb{T} : x \preceq a\}$, тогда как $\max(a,a) \in a \curlyvee a$.

Пример мультикольца: целые числа. В множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел тропическое сложение, индуцируемое тропическим сложением в $\mathbb{C}$, превращает $\mathbb{Z}$ в мультигруппу, а вместе с обычным произведением и в мультикольцо, но не в мультиполе.

Понятие мультиполя является непосредственным обобщением понятия поля: поле есть не что иное, как мультиполе с однозначным сложением. Мне удалось найти лишь одну работу [16], где рассматривалось понятие мультиполя. Ниже оно возникает естественно как вырождение поля при тропической деформации.

Тропическое сложение $\top$ индуцирует в множестве $\mathbb{R}_{\geq 0}$ неотрицательных вещественных чисел обычную операцию max взятия наибольшего из двух чисел. Заметим, что $a \top_{\mathbb{R}} b \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ для любых $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Таким образом, полуполе $\mathbb{R}_{\geq 0, \max, \times}$ возникает как подмножество мультиполя $\mathbb{R}$, замкнутое относительно обеих бинарных операций, и его бинарные операции идентичны операциям мультиполя $\mathbb{R}$. В частности, включение $\mathbb{R}_{\geq 0, \max, \times} \to \mathbb{R}_{\top_{\mathbb{R}}, \times}$ является гомоморфизмом.

Предостережение. Имеется естественное отображение в противоположном направлении $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \colon x \mapsto |x|$. Оно является правым обратным для включения. Однако оно не является гомоморфизмом для $\top$. В самом деле, $x \top (-x) = [-|x|, |x|]$ для любого $x \in \mathbb{R}$, далее, отображение $x \mapsto |x|$ переводит $[-|x|, |x|]$ в $[0, |x|]$, но $|x| \top |-x| = |x|$, что отлично от $[-|x|, |x|]$ при $x \neq 0$.

Отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \colon x \mapsto |x|$ является гомоморфизмом мультиполя вещественных тропических чисел в мультиполе ультраметрических треугольников. Кроме того, то же отображение является гомоморфизмом поля вещественных чисел в мультиполе треугольников.

Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \colon x \mapsto |x|$ является гомоморфизмом мультиполя комплексных тропических чисел в мультиполе ультраметрических треугольников. Кроме того, то же отображение является гомоморфизмом обычного поля комплексных чисел в мультиполе треугольников.

2.10. Тропические комплексные числа и многочлены. Отображение w, которое определяется и обсуждается в этом и следующем пунктах, было по существу определено Михалкиным [19] для его определения комплексных тропических кривых. При этом, правда, алгебраические свойства оставались вне поля зрения, поскольку тропическое сложение не обсуждалось.

Пусть $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ — многочлен от одной переменной X с комплексными коэффициентами, $p(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, где $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Положим $w(p) = \frac{a_n}{|a_n|} e^n$. Этим определено отображение $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C} \colon p \mapsto w(p)$.

Теорема 2.G. *Отображение w есть гомоморфизм кольца многочленов $\mathbb{C}[X]$ в мультиполе тропических комплексных чисел $\mathbb{C}_{\top, \times}$, т.е. $w(p+q) \in w(p) \top w(q)$ и $w(pq) = w(p)w(q)$ для любых $p, q \in \mathbb{C}[X]$.*

Доказательство. То, что w является мультипликативным гомоморфизмом, очевидно. Действительно, значение w на многочлене равно его значению на старшем члене этого многочлена, старший член произведения многочленов есть произведение старших членов сомножителей, а для одночлена $p(X) = aX^n$ значение отображения w вычисляется по формуле $\frac{p(e)}{|p(1)|}$, очевидно определяющей мультипликативный гомоморфизм.

Докажем, что $w(p+q) \in w(p) \top w(q)$ для любых $p, q \in \mathbb{C}[X]$. Если степени старших членов многочленов p и q различны, то старший член многочлена $p+q$ равен старшему члену того из многочленов p и q, у которого показатель больше, откуда немедленно следует, что в этом случае $w(p+q) = w(p) \top w(q)$.

Если степени старших членов многочленов p и q одинаковы и эти члены имеют непротивоположные коэффициенты и потому не сокращаются при сложении, то старший член многочлена $p+q$ равен сумме старших членов многочленов p и q. Его показатель равен показателям старших членов многочленов p и q, коэффициент равен сумме старших коэффициентов многочленов p и q, а вот аргумент его коэффициента не определяется аргументами старших коэффициентов многочленов p и q, поскольку аргумент суммы двух комплексных чисел не определяется аргументами слагаемых. Однако он может принимать все значения в открытом интервале между аргументами слагаемых. В частности, он принимает значения в множестве аргументов чисел из $w(p) \top w(q)$.

Если степени старших членов многочленов p и q одинаковы и эти члены имеют противоположные коэффициенты и, значит, могут сократиться при сложении, то старший член

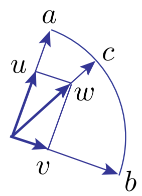


Рис. 5. Построение по $a, b, c \in \mathbb{C}$ таких $u, v, w \in \mathbb{C}$, что $A = uX^r$, $B = vX^r$, $C = wX^r$ с $r = \log|a|$ и $w(A) = a$, $w(B) = b$ и $w(C) = c$, $A + B = C$

многочлена $p + q$ либо равен сумме старших членов многочленов p и q, либо получается из членов младших степеней и не может быть вычислен по старшим членам. Единственное, что о нем можно сказать, зная лишь $w(p)$ и $w(q)$ (т.е. зная аргументы старших коэффициентов и их степени), это то, что его степень не больше степеней слагаемых, но в рассматриваемом случае из этого следует, что $w(p + q) \in w(p) \top w(q)$. $\square$

2.11. Тропические комплексные числа и комплексные многочлены с вещественными показателями. Образ гомоморфизма w состоит лишь из тех комплексных чисел, модули которых являются степенями числа e. Однако аналогичная конструкция способна доставить и отображение на все $\mathbb{C}$. Для этого достаточно заменить обычные многочлены многочленами с произвольными вещественными показателями, т.е. начать не с $\mathbb{C}[X]$, а с групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$ аддитивной группы вещественных чисел. Элемент этой алгебры можно представлять как $\sum_k a_k X^{r_k}$, где $a_k \in \mathbb{C}$, $r_k \in \mathbb{R}$. Формальная переменная X символизирует здесь переход от аддитивной формы записи сложения в $\mathbb{R}$ к мультипликативной форме записи в $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$, где аддитивные обозначения используются для формальной суммы.

Элементы алгебры $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$ можно интерпретировать как функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Для этого, заменяя X на e^T, превратим $\sum_k a_k X^{r_k}$ в сумму показательных функций $\sum_k a_k e^{r_k T}$.

Отображение $w\colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ продолжается на $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$ очевидным образом: выберем из суммы $\sum_k a_k X^{r_k}$ слагаемое с наибольшим показателем, скажем, $a_n X^{r_n}$ и применим к нему ту же формулу $\frac{a_n}{|a_n|} e^{r_n}$. Полученное отображение является эпиморфизмом кольца $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$ на мультиполе тропических комплексных чисел $\mathbb{C}_{\top,\times}$. Доказательство того, что это гомоморфизм, дословно повторяет доказательство теоремы 2.G.

Эта конструкция показывает, как тропическое сложение комплексных чисел получается из обычного сложения многочленов. При этом необходимость многозначности демонстрируется исчерпывающим образом. Для комплексных чисел a и b с $|a| = |b|$, но $a \neq -b$ и любого c из открытой дуги $(a \top b) \setminus \{a, b\}$ можно найти такие $A, B, C \in \mathbb{C}[\mathbb{R}]$, что $w(A) = a$, $w(B) = b$ и $w(C) = c$ (см. рис. 5). Противоположные комплексные числа (т.е. такие $a, b \in \mathbb{C}$, что $a + b = 0$) представляются как образы при w многочленов $A, B \in \mathbb{C}[\mathbb{R}]$, главные члены которых противоположны друг другу и потому сокращаются при сложении этих многочленов. Главный член суммы $A + B$ никак не контролируется главными членами слагаемых A и B, если не считать того, что его порядок не превосходит порядка главных членов слагаемых.

3. ТРОПИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА КАК РЕЗУЛЬТАТ ДЕКВАНТОВАНИЯ

3.1. Субтропическая деформация поля комплексных чисел. Для любого положительного вещественного h пусть $S_h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — отображение, определяемое формулой

$$z \mapsto \begin{cases} |z|^{\frac{1}{h}} \dfrac{z}{|z|} & \text{при } z \neq 0, \\ 0 & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

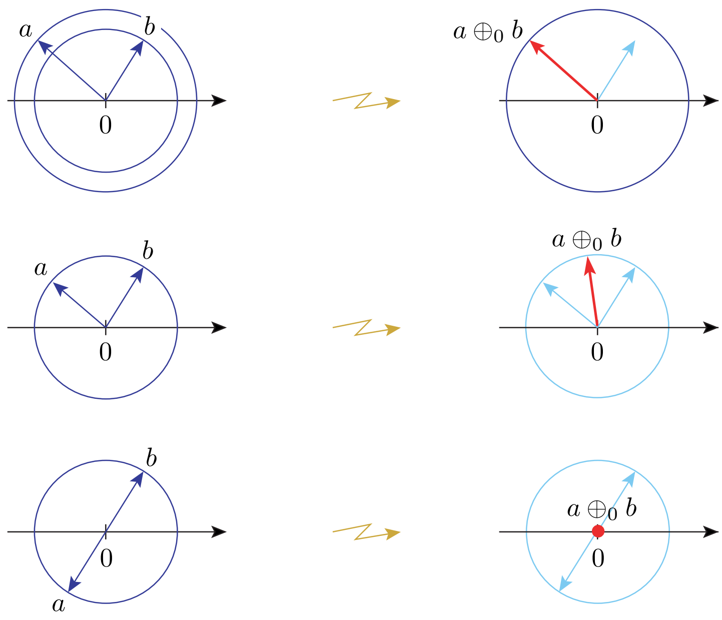


Рис. 6. Предел $a \oplus_0 b$ сумм $a \oplus_h b$ при $h \to 0$

Это обратимое отображение. Обратное отображение задается формулой

$$S_h^{-1}\colon\ z \mapsto \begin{cases} |z|^h \dfrac{z}{|z|} & \text{при} \quad z \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad z = 0. \end{cases}$$

Очевидно, отображение S_h является изоморфизмом относительно умножения: $S_h(ab) = S_h(a)S_h(b)$. Однако оно неперестановочно со сложением. Для того чтобы сделать отображение S_h изоморфизмом и относительно сложения, переопределим сложение на области задания этого отображения, т.е. индуцируем бинарную операцию на множестве комплексных чисел:

$$a \oplus_h b = S_h^{-1}(S_h(a) + S_h(b)).$$

Таким образом, мы получаем поле $\mathbb{C}_h = \mathbb{C}_{\oplus_h,\times}$ (которое есть не что иное, как копия поля $\mathbb{C}$) и изоморфизм $S_h\colon \mathbb{C}_h \to \mathbb{C}$.

Замечание. Похожая деформация, но не поля $\mathbb{C}$, а комплексного тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ использовалась Михалкиным, в частности, для установления связей между тропической и комплексной алгебраической геометриями (см. [19, Sect. 6]).

3.2. Предел сложения при субтропической деформации. Легко убедиться в том, что при h, стремящемся к нулю, $a \oplus_h b$ стремится к некоторому пределу. А именно:

- если $|a| > |b|$, то $\lim_{h\to 0}(a \oplus_h b) = a$;
- если $|a| = |b|$ и $a + b \neq 0$, то $\lim_{h\to 0}(a \oplus_h b) = |a|\frac{a+b}{|a+b|}$;
- если $a + b = 0$, то $\lim_{h\to 0}(a \oplus_h b) = 0$.

Обозначим $\lim_{h\to 0}(a \oplus_h b)$ через $a \oplus_0 b$ (см. рис. 6).

Операция $(a, b) \mapsto a \oplus_0 b$ обладает рядом приятных свойств. Она коммутативна, дистрибутивна относительно обычного умножения комплексных чисел, нуль ведет себя как подобает: $a \oplus_0 0 = a$ для любого $a \in \mathbb{C}$. Наконец, для любого $a \in \mathbb{C}$ имеется единственное комплексное число b такое, что $a \oplus_0 b = 0$, и это b есть не что иное, как $-a$.

Однако операция $(a,b) \mapsto a \oplus_0 b$ далеко не совершенна: во-первых, как функция переменных a и b она не является непрерывной, во-вторых, она неассоциативна. Чтобы убедиться в последнем, сравним $(-1 \oplus_0 i) \oplus_0 1$ и $-1 \oplus_0 (i \oplus_0 1)$:

$$(-1 \oplus_0 i) \oplus_0 1 = \Big(\exp(\pi i) \oplus_0 \exp\Big(\frac{\pi i}{2}\Big)\Big) \oplus_0 1 = \exp\Big(\frac{3\pi i}{4}\Big) \oplus_0 \exp(0) = \exp\Big(\frac{3\pi i}{8}\Big).$$

С другой стороны,

$$-1 \oplus_0 (i \oplus_0 1) = \exp(\pi i) \oplus_0 \Big(\exp\Big(\frac{\pi i}{2}\Big) \oplus_0 \exp(0)\Big) = \exp(\pi i) \oplus_0 \exp\Big(\frac{\pi i}{4}\Big) = \exp\Big(\frac{5\pi i}{8}\Big).$$

Тропическое сложение, введенное выше в п. 2.6, лишено этого недостатка. Оно ассоциативно (см. лемму 2.B). Правда, оно многозначно. К его достоинствам следует отнести и своего рода непрерывность. Оно, так же как и $\oplus_0$, является пределом операций $\oplus_h$. Однако, в каком смысле оно является пределом и в каком смысле оно непрерывно, нуждается в разъяснении, поскольку соответствующие общетопологичские определения и теоремы необщеизвестны (см. разд. 4).

3.3. Субтропическая деформация и асимптотики. В процессе субтропической деформации точка z двигается по прямой с экспоненциально изменяющейся скоростью:

$$z \mapsto \frac{z}{|z|}|z|^{\frac{1}{h}},$$

где h можно рассматривать как время. Этот закон движения можно переписать как

$$T \mapsto ae^{rT},$$

где $a = \frac{z}{|z|}$ и $e^{rT} = |z|^{\frac{1}{h}}$, т.е. $rT = \frac{1}{h}\log|z|$, $T = \frac{1}{h}$ и $r = \log|z|$. Движение задается двумя параметрами: комплексным числом a, определяющим направление движения, и вещественным параметром r, определяющим темп. Число z восстанавливается по ним так: $z = ae^r$.

Операция $\oplus_h$ с этой точки зрения выглядит следующим образом: отправляясь от чисел $z = ae^r$ и $w = be^s$, мы строим ae^{rT} и be^{sT}, складываем их и ищем такие c и t, что $ae^{rT} + be^{sT} = ce^{tT}$. Тогда $z \oplus_{\frac{1}{T}} w = ce^t$.

Поскольку параметры c и t определяют движение и мы рассматриваем это движение при больших T, речь идет об асимптотике кривой $T \mapsto ae^{rT} + be^{sT}$ с точки зрения шкалы сравнения $T \mapsto ae^{rT}$. Ответ на вопрос об асимптотике суммы дается операцией $\oplus_0$. Однако эта операция не непрерывна, а значит, ответ неустойчив и имеет смысл посмотреть, что происходит с асимптотикой суммы при возмущениях слагаемых.

В качестве возмущения функции $T \mapsto ae^{rT}$ можно рассмотреть кривую, определяемую произвольным экспоненциальным многочленом

$$T \mapsto \sum_k a_k e^{r_k T} \qquad (3)$$

с произвольными комплексными коэффициентами a_k и вещественными r_k. В шкале сравнения $T \mapsto ae^{rT}$ асимптотика функции (3) определяется ее старшим членом, т.е. членом суммы (3) с наибольшим r_k. Более того, роль абсолютной величины коэффициента старшего члена ничтожна, если мы не пытаемся усовершенствовать нашу шкалу сравнения. Однако асимптотика суммы не всегда определяется асимптотиками слагаемых и множество асимптотик, которые возникают при сложении функций с заданными асимптотиками, определяет бинарную операцию на множестве асимптотик. Таким образом, мы возвращаемся к материалу п. 2.11 и видим, что для того, чтобы говорить об асимптотике суммы, нужно обратиться к гомоморфизму w.

4. ТОПОЛОГИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Невозможно получить в качестве предела семейства однозначных функций $f_h\colon X \to Y$ многозначную функцию, оставаясь в каком бы то ни было пространстве *однозначных функций* $X \to Y$. Однако это можно сделать, заменив функции их графиками, рассматриваемыми как подмножества пространства $X \times Y$. Для того чтобы говорить о пределах графиков семейства функций, правда, нужна топологическая структура в пространстве подмножеств пространства $X \times Y$.

В множестве всех подмножеств топологического пространства имеются различные естественные топологические структуры, но среди них нет такой, которая была бы хороша во всех отношениях. Наиболее классическими среди них являются три топологические структуры, введенные Виеторисом [27] в 1922 г. В нашей ситуации для перехода к пределу ни одна из них не пригодна, но модификация, предложенная Феллом [8], срабатывает и дает график тропического сложения. Тропическое сложение оказывается непрерывным относительно верхних топологий Виеториса и Фелла, и это доставляет важные свойства тропических полиномиальных функций.

4.1. Топологии Виеториса. *Верхней топологией Виеториса* в множестве 2^X всех подмножеств топологического пространства X называется топология, порождаемая множествами вида $2^U \subset 2^X$, где U открыто в X. Окрестность множества $A \subset X$ в верхней топологии Виеториса должна содержать все подмножества некоторого множества U, открытого в X и содержащего множество A.

Это несколько непривычная топология. Например, она далеко не хаусдорфова: пересекающиеся множества не могут в ней обладать непересекающимися окрестностями. Поэтому пределы в верхней топологии Виеториса, как правило, неединственны. Во всяком случае, увеличивая предел (т.е. добавляя к нему новые точки), мы получаем другие пределы. Этим, по-видимому, и мотивировано слово *верхняя* в названии топологии.

Имеется также *нижняя* топология Виеториса. *Нижней топологией Виеториса* в множестве 2^X всех подмножеств топологического пространства X называется топология, порождаемая множествами вида $2^X \setminus 2^C$, где C — замкнутое подмножество пространства X. Другими словами, нижняя топология Виеториса порождается множествами вида $\{Y \subset X\colon Y \cap U \neq \varnothing\}$, где U — открытое множество пространства X. В нижней топологии Виеториса замкнутые множества образуются из замкнутых множеств исходного пространства наиболее непосредственно, замкнутое множество $C \subset X$ дает множество $2^C \subset 2^X$, замкнутое в нижней топологии Виеториса. Напомню, что в верхней топологии Виеториса открытые множества порождаются точно так же открытыми множествами исходного пространства. Окрестность множества $A \in 2^X$ в нижней топологии Виеториса должна содержать все множества, пересекающиеся с несколькими открытыми множествами $U_1, \dots, U_n \subset X$, пересекающимися с A. Предел в нижней топологии Виеториса тоже обычно неединствен, но по противоположной причине: он остается пределом при уменьшении (т.е. при удалении точек).

Топология, порождаемая верхней и нижней топологиями Виеториса, называется просто *топологией Виеториса*.

4.2. Чем нехороши топологии Виеториса. Возьмем в качестве X плоскость $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим подмножество P пространства 2^X, элементами которого служат прямые, параллельные оси абсцисс: $P = \{L_a \subset \mathbb{R}^2\colon L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y = a\}\}$. Естественно ожидать, что пространство P с любой разумной топологической структурой гомеоморфно прямой.

Однако верхняя топология Виеториса пространства 2^X индуцирует в P дискретную топологию. Действительно, на плоскости у прямой L_a имеется окрестность $\{(x,y)\colon |x(y-a)| < 1\}$, которая содержит лишь одну горизонтальную прямую. Соответствующая окрестность прямой L_a

в 2^X пересекается с P только в точке L_a. Значит, каждая точка множества P открыта в индуцированной топологии.

Поскольку топология Виеториса содержит верхнюю топологию Виеториса, она тоже индуцирует дискретную топологию в P. В сущности такова же причина, т.е. слишком большой запас открытых множеств, того, что графики операций $\oplus_h$ не сходятся к графику тропического сложения в верхней топологии Виеториса пространства $\mathbb{C}^3$. График тропического сложения комплексных чисел можно представить как пересечение всех пределов графиков операций $\oplus_h$ при $h \to 0$ в верхней топологии Виеториса. Другой естественный подход — ослабить топологию. Подходящее естественное ослабление — верхняя топология Фелла обсуждается в добавлении 2 настоящей работы. Однако наиболее важные средства для работы с объектами комплексной тропической геометрии доставляет верхняя топология Виеториса.

Нижняя топология Виеториса, как нетрудно видеть, индуцирует в P ожидаемую топологию прямой. Однако она обладает недостатком, куда более существенным с точки зрения настоящей работы, о котором речь пойдет ниже в теореме 4.A

4.3. Полунепрерывность тропического сложения. Говорят, что многозначное отображение $X \multimap Y$

- *полунепрерывно сверху*, если соответствующее отображение $f^\uparrow\colon X \to 2^Y$ непрерывно относительно верхней топологии Виеториса в 2^Y;
- *полунепрерывно снизу*, если $f^\uparrow\colon X \to 2^Y$ непрерывно относительно нижней топологии Виеториса в 2^Y;
- *непрерывно*, если $f^\uparrow\colon X \to 2^Y$ непрерывно относительно топологии Виеториса в 2^Y (т.е. $X \multimap Y$ полунепрерывно и сверху, и снизу).

Напомню, что множество $\{a \in X\colon f(a) \subset B\}$ называется *верхним прообразом* множества B при f, а множество $\{a \in X\colon f(a) \cap B \neq \varnothing\}$ называется *нижним прообразом* множества B при f.

Нетрудно видеть, что $f\colon X \multimap Y$ полунепрерывно сверху (соответственно снизу) тогда и только тогда, когда верхний (соответственно нижний) прообраз любого множества, открытого в Y, открыт в X.

Теорема 4.A. *Тропическое сложение $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \multimap \mathbb{C}\colon (a,b) \mapsto a \top b$ не полунепрерывно снизу (т.е. соответствующее отображение $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to 2^{\mathbb{C}}$ не является непрерывным отображением относительно классической топологии в $\mathbb{C}^2$ и нижней топологии Виеториса в $2^{\mathbb{C}}$).*

Доказательство. Для доказательства достаточно предъявить множество, открытое в нижней топологии Виеториса, прообраз которого не открыт в классической топологии пространства $\mathbb{C}^2$. Возьмем, например, множество H, состоящее из множеств A, пересекающих открытый круг радиуса 1 с центром в 0. Его прообраз при нашем отображении есть множество пар комплексных чисел, тропическая сумма которых пересекается с этим кругом. Как легко видеть, этот прообраз состоит из пар комплексных чисел (a,b), удовлетворяющих одному из следующих двух условий: либо $|a| < 1$ и $|b| < 1$, либо $a = -b$. Ясно, что это множество не открыто. $\square$

Теорема 4.B. *Тропическое сложение $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \multimap \mathbb{C}\colon (a,b) \mapsto a \top b$ полунепрерывно сверху (т.е. соответствующее отображение $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to 2^{\mathbb{C}}$ непрерывно относительно классической топологии в $\mathbb{C}^2$ и верхней топологии Виеториса в $2^{\mathbb{C}}$).*

Доказательство. Докажем соответствующую локальную непрерывность, т.е. докажем, что для любой окрестности $V \subset 2^{\mathbb{C}}$ образа $a \top b$ точки (a,b) найдется окрестность $U \subset \mathbb{C}^2$ точки (a,b), образ которой содержится в V. В верхней топологии Виеториса базу окрестностей множества A составляют множества всех подмножеств некоторого открытого множества $W \supset A$, так что действительно достаточно указать для сколь угодно тесной окрестности $W \supset a \top b$ такую окрестность U точки (a,b) в $\mathbb{C}^2$, что $x \top y \subset W$ для любой точки $(x,y) \in U$.

Рассмотрим по отдельности каждый из трех видов образов точки (a,b) при тропическом сложении.

Если $|a| > |b|$, то $a \top b = a$. Любая окрестность множества a содержит открытый круг с центром в точке a. Уменьшим его, если нужно, настолько, чтобы его радиус r оказался меньше, чем $\frac{1}{2}(|a|-|b|)$. Возьмем в качестве W открытый круг $B_r(a)$ радиуса r с центром в точке a. Тогда в качестве U можно взять окрестность $B_r(a) \times B_r(b)$ точки (a,b). Ясно, что $B_r(a) \top B_r(b) \subset B_r(a)$.

Если $|a| = |b|$ и $a+b \neq 0$, то $a \top b$ есть кратчайшая дуга C окружности с центром в нуле, соединяющая a с b. Пусть r — столь малое положительное вещественное число, что круги $B_r(a)$ и $B_r(b)$ не содержат точек, симметричных друг другу относительно нуля. Всякая окрестность дуги C в $\mathbb{C}$ содержит $W = B_\rho(a) \top B_\rho(b)$ с некоторым $\rho \in (0,r)$. Возьмем в качестве U окрестность $B_\rho(a) \times B_\rho(b)$ точки (a,b).

Если $|a| = |b|$ и $a+b = 0$, то $a \top b$ есть замкнутый круг с центром в нуле радиуса $|a|$. Любая окрестность этого круга в $\mathbb{C}$ содержит концентрический открытый круг некоторого радиуса $r > |a|$. Возьмем в качестве U этот круг. Его образ при тропическом сложении, очевидно, равен ему самому. $\square$

4.4. Свойства многозначных отображений, полунепрерывных сверху. Поскольку согласно теореме 4.B тропическое сложение полунепрерывно сверху и нам придется иметь с ним дело, нам понадобятся несколько несложных и общеизвестных свойств отображений, полунепрерывных сверху.

Отметим прежде всего, что для однозначных отображений понятие полунепрерывности сверху эквивалентно обычной непрерывности.

Кроме того, очевидно, композиция отображений, полунепрерывных сверху, полунепрерывна сверху.

Из этих двух утверждений немедленно вытекает, что многозначная функция, определяемая комплексным тропическим многочленом (т.е. тропической суммой одночленов с комплексными коэффициентами), полунепрерывна сверху.

Теорема 4.C. *Пусть X, Y — топологические пространства, $f\colon X \multimap Y$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение и $C \subset Y$ — замкнутое множество. Тогда множество $\{a \in X\colon f(a) \cap C \neq \varnothing\}$ замкнуто.*

Доказательство. Множество $\{B \in 2^Y\colon B \subset Y \setminus C\}$ открыто в верхней топологии Виеториса пространства 2^Y. Поэтому в силу верхней полунепрерывности многозначного отображения f открыт прообраз $\{a \in X\colon f(a) \subset Y \setminus C\}$ этого множества при однозначной версии $X \to 2^Y$ многозначного отображения f. Следовательно, множество $\{a \in X\colon f(a) \cap C \neq \varnothing\} = X \setminus \{a \in X\colon f(a) \subset X \setminus C\}$ замкнуто. $\square$

Следствие 4.D. *Для любого комплексного или вещественного тропического многочлена $\top_{k=(k_1,\dots,k_n)} a_k x_1^{k_1} \dots x_{k_1}^{k_n}$ множество, определяемое условием $0 \in \top_{k=(k_1,\dots,k_n)} a_k x_1^{k_1} \dots x_{k_1}^{k_n}$ в $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$ соответственно, замкнуто.* $\square$

Наконец, приведу без доказательства две хорошо известные теоремы о полунепрерывных сверху отображениях.

Теорема 4.E. *Образ связного множества при полунепрерывном сверху отображении связен, если образы точек при этом отображении связны.* $\square$

Теорема 4.F. *Образ компактного множества при полунепрерывном сверху отображении компактен, если образы точек при этом отображении компактны.* $\square$

Следствие 4.G. *Многозначное отображение, определяемое любым тропическим многочленом $\top_{k=(k_1,\dots,k_n)} a_k x_1^{k_1} \dots x_{k_1}^{k_n}$, полунепрерывно сверху. Оно переводит связные множества в связные и компактные в компактные. В частности, графики тропических многочленов связны.* $\square$

Следствие 4.G применимо как к комплексным, так и к вещественным тропическим многочленам и к определяемым ими многозначным отображениям $\mathbb{C}^n \multimap \mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}$ соответственно.

5. КОМПЛЕКСНЫЕ ТРОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И МНОГООБРАЗИЯ

5.1. Неприводимые подобные члены. Ввиду многозначности сложения в мультиполе привычные рефлексы, приобретенные еще в начальной школе, могут подвести. Мы знаем, что

$$x + 1 + (-1) = x.$$

Так ли это в мультиполе? Имеет ли место равенство

$$x \top 1 \top (-1) = x?$$

Ответ: когда как, это зависит от x! Независимо ни от чего

$$x \in x \top 1 \top (-1),$$

но если $|x| \leq 1$, то

$$x \top 1 \top (-1) = 1 \top (-1) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}.$$

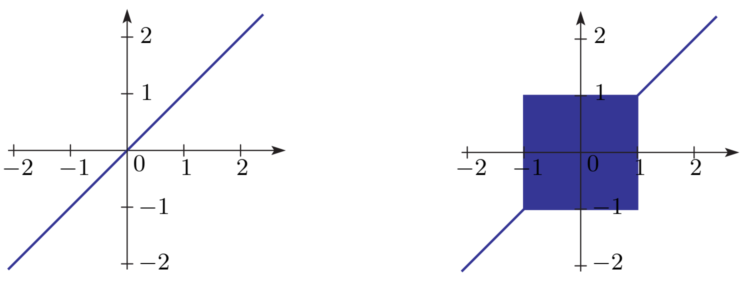
Сравните вещественные графики функций $y = x$ (рис. 7, *а*) и $y = x \top 1 \top (-1)$ (рис. 7, *б*).

Таким образом, привычное с детских лет приведение подобных членов в тропической комплексной и вещественной алгебре требует бдительности и, вообще говоря, может породить ошибки.

Рассмотрим теперь пример, показывающий, что иногда приведение подобных членов все же возможно. Верно ли, что

$$x^2 \top -1 = (x \top 1)(x \top -1)?$$

На первый взгляд, нет, поскольку, раскрывая скобки в правой части этого равенства, мы получаем $x^2 \top x \top (-x) \top (-1)$ и для того, чтобы получить левую часть, хочется сократить подобные члены x и $-x$, а это, как мы уже знаем, опасно. Однако равенство все же имеет место при любом x. Действительно, x^2 является доминирующим слагаемым при $|x| \geq 1$ и тогда слагаемые x и $-x$ никакого вклада в сумму не вносят, а при $|x| \leq 1$ доминирует слагаемое -1,



а *б*

Рис. 7. Вещественные графики функций $y = x$ (*а*) и $y = x \top 1 \top (-1)$ (*б*)

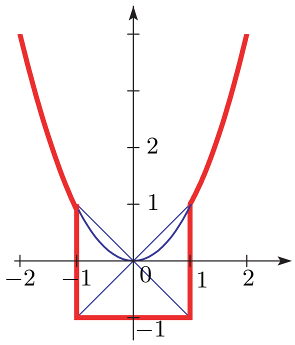


Рис. 8. График функции $x^2 \top x \top (-x) \top (-1) = x^2 \top (-1)$

так что слагаемые x и $-x$ ни при каких значениях x на сумму не влияют и могут быть удалены (рис. 8).

Тропический многочлен называется *чистым*, если в нем нет двух одночленов с одинаковыми показателями. Тропический многочлен называется *очищаемым*, если некоторые его одночлены могут быть удалены без изменения определяемой многочленом многозначной функции так, чтобы он стал чистым. Например, как мы видели, многочлен $x^2 \top x \top (-x) \top (-1)$ очищаем и результат очистки есть $x^2 \top (-1)$.

Кстати говоря, этот пример не изолирован. Если раскрыть скобки в произведении чистых тропических многочленов (что можно делать в силу дистрибутивности), то, как правило, получится не чистый многочлен, но обязательно очищаемый.

5.2. Уравнения над мультиполем. Выражения, в которых участвует многозначное сложение, как правило, определяют многозначные функции. Как следует понимать уравнение, скажем, $f(x,y) = g(x,y)$, в котором с обеих сторон от знака равенства стоят такие выражения? Решить такое уравнение — значит найти значения неизвестных, при которых у многозначных функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ существуют одинаковые значения, но множества всех значений совсем не обязательно совпадают.

В частности, решить уравнение $f(x,y) = 0$ с многозначной функцией $f(x,y)$ в левой части и нулем в правой означает: найти такие значения неизвестных, при которых $0 \in f(x,y)$.

Последняя аксиома мультигруппы означает, что уравнения $f(x,y) = g(x,y)$ и $f(x,y) \top \top (-g(x,y)) = 0$ равносильны, что согласуется с опытом обращения с обычными уравнениями. Однако, как мы видели в предыдущем пункте, более общее преобразование уравнения, состоящее в прибавлении к обеим частям одного и того же выражения, не работает в случае многозначных функций. Действительно, уравнение $x = 0$ имеет единственное решение, тогда как уравнение $x \top 1 = 1$ имеет много решений: решением является каждое x с $|x| \le 1$. Вот уравнения $x \top 1 = 1$ и $x \top 1 \top (-1) = 0$ равносильны.

Мы будем рассматривать, как правило, лишь уравнения, имеющие вид $f(x,y,\dots) = 0$. Как уже было сказано, такое уравнение следует понимать как $0 \in f(x,y,\dots)$. В силу теоремы 4.C множество решений такого уравнения с полунепрерывной сверху многозначной функцией f замкнуто.

5.3. Одночлены. Тропический многочлен есть тропическая сумма обычных одночленов. Одночлен не имеет корней в комплексном торе $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ и представляет собой однозначную функцию $(\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{C}\colon z \mapsto m(z) = az_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$. Его удобно рассматривать вместе с функцией $\log|m(z)|$, которая пропускается через отображение

$$\mathrm{Log}\colon\ (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{R}^n\colon\ (z_1,\dots,z_n) \mapsto \bigl(\log|z_1|,\dots,\log|z_n|\bigr)$$

и дает линейную функцию

$$\operatorname{Log} m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon (x_1,\dots,x_n) \mapsto \log|a| + \sum_{i=1}^n k_i x_i.$$

На слое отображения Log, который естественно отождествляется с тором $(S^1)^n$, одночлен определяет характер $(z_1,\dots,z_n) \mapsto z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$, домноженный на константу (коэффициент a).

5.4. Двучленные уравнения. Двучленное уравнение

$$m_1(z) \top m_2(z) = 0,$$

где $m_1(z)$ и $m_2(z)$ — одночлены, эквивалентно, как было замечено выше в п. 5.2, уравнению $m_1(z) = -m_2(z)$. Тропическое сложение при этом переходе исчезло, так что мы имеем дело с обычным уравнением над полем комплексных чисел.

Равенство $m_1(z) = -m_2(z)$ может быть выполнено только при тех значениях переменной z, для которых $|m_1(z)| = |m_2(z)|$. Следовательно, тропическая гиперповерхность, определяемая уравнением $az_1^{p_1}\dots z_n^{p_n} \top bz_1^{q_1}\dots z_n^{q_n} = 0$, содержится в прообразе при Log гиперплоскости

$$\log|a| + \sum_{i=1}^n p_i x_i = \log|b| + \sum_{i=1}^n q_i x_i.$$

Посмотрим, что происходит в слое расслоения $\operatorname{Log}\colon (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{R}^n$ над точкой этой гиперплоскости. Точки слоя $\operatorname{Log}^{-1}(x)$ представляются как

$$z = (z_1,\dots,z_n) = (e^{x_1+i\varphi_1},\dots,e^{x_n+i\varphi_n}).$$

Исходное уравнение превращается в линейное соотношение между двумя характерами

$$az_1^{p_1}\dots z_n^{p_n} = -bz_1^{q_1}\dots z_n^{q_n}.$$

В фазовых координатах φ_k это уравнение линейно:

$$\alpha + (p_1-q_1)\varphi_1 + \dots + (p_n-q_n)\varphi_n = 0 \mod 2\pi, \tag{4}$$

где $-\frac{a/b}{|a|/|b|} = e^{i\alpha}$.

Вектор, нормальный к гиперплоскости, определяемой уравнением (4), есть разность $p-q$ векторов $p=(p_1,\dots,p_n)$ и $q=(q_1,\dots,q_n)$, составленных из показателей степеней в одночленах. Если вектор $p-q$ примитивен, т.е. если его координаты взаимно просты, то уравнение (4) определяет гипертор (т.е. подтор коразмерности 1) в торе $\operatorname{Log}^{-1}(x_1,\dots,x_n)$. Если же $p-q = mv$, где m — натуральное число и v — примитивный целочисленный вектор, то уравнение (4) определяет m параллельных гиперторов тора $\operatorname{Log}^{-1}(x_1,\dots,x_n)$.

Гиперторы, возникающие таким образом в разных слоях, отождествляются друг с другом посредством естественной тривиализации расслоения Log фазовыми координатами. Действительно, в уравнении (4) координаты точки x не участвуют.

5.5. Главная часть тропического многочлена в точке. Пусть $p(z_1,\dots,z_n) = \top_{k=(k_1,\dots,k_n)\in I} a_k z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$ — чистый тропический многочлен с комплексными коэффициентами, и пусть $w=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{C}^n$. Обозначим через $p_{(w)}$ тропический многочлен, составленный из тех одночленов тропического многочлена p, которые в точке w принимают значения, наибольшие по абсолютной величине среди абсолютных величин всех одночленов тропического многочлена p. Формульно

$$p_{(w)}(z) = \top_{k=(k_1,\dots,k_n)\in I_{(w)}} a_k z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n},$$

где $I_{(w)} = \{k \in I\colon |a_k w_1^{k_1}\dots w_n^{k_n}| = \max_{j\in I}|a_j w_1^{j_1}\dots w_n^{j_n}|\}$.

Очевидно, $p(w) = p_{(w)}(w)$. Более того, существует такая окрестность U точки w, что многозначные функции $z \mapsto p(z)$ и $z \mapsto p_{(w)}(z)$ совпадают на U. Поэтому при локальном анализе гиперповерхности, заданной уравнением $p(z) = 0$, можно заменить уравнение $p(z) = 0$ более простым уравнением $p_{(w)}(z) = 0$.

Назовем число одночленов в $p_{(w)}$ *размером* тропического многочлена p в точке w, а многогранник Ньютона тропического многочлена $p_{(w)}$ — его *многогранником Ньютона в точке* w. Будем обозначать размер тропического многочлена p в точке w через $r_p(w)$. Ясно, что если $0 \in p(w)$, то $r_p(w) \ge 2$.

Заметим, что набор одночленов, входящих в $p_{(w)}$, зависит только от абсолютных величин координат точки w и потому не меняется в пределах слоя расслоения Log.

5.6. Амебы комплексных тропических многообразий. Напомню, что *амеба* многообразия $V \subset (\mathbb{C}\setminus 0)^n$ — это образ многообразия V при отображении

$$\mathrm{Log}\colon (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{R}^n\colon (z_1,\dots,z_n) \mapsto (\log|z_1|,\dots,\log|z_n|).$$

Ясно, что это понятие применимо не только к классическим комплексным многообразиям, но и к множествам, заданным комплексными тропическими уравнениями.

Назовем *амебой* чистого комплексного тропического многочлена

$$p(z_1,\dots,z_n) = \top_{k=(k_1,\dots,k_n)\in I} a_k z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$$

с комплексными коэффициентами $\mathbb{R}_{\max,+}$-многочлен

$$\max\{\log|a_k| + k_1x_1 + \dots + k_nx_n\colon k \in I\}.$$

Будем обозначать этот $\mathbb{R}_{\max,+}$-многочлен символом $\mathrm{Log}\,p$. (В частном случае одночленов это обозначение было введено выше в п. 5.3.)

Напомню, что тропическая гиперповерхность, которая определяется $\mathbb{R}_{\max,+}$-многочленом $\max\{b_k + k_1x_1 + \dots + k_nx_n\colon k \in I\}$, есть множество точек, в которых не менее двух из линейных функций $b_k + k_1x_1 + \dots + k_nx_n$ равны $\max\{b_k + k_1x_1 + \dots + k_nx_n\colon k \in I\}$.

Обозначим через V_p комплексную тропическую гиперповерхность $\{z \in (\mathbb{C}\setminus 0)^n\colon p(z) = 0\}$, определяемую комплексным тропическим многочленом p.

Теорема 5.A. *Пусть*

$$p(z) = \top_{k=(k_1,\dots,k_n)\in I} a_k z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$$

— чистый тропический многочлен с комплексными коэффициентами. Тогда амеба $\mathrm{Log}(V_p)$ *комплексной тропической гиперповерхности* V_p *есть тропическая гиперповерхность, определяемая амебой* $\mathrm{Log}\,p$ *тропического комплексного многочлена* p.

Доказательство. То, что $\mathrm{Log}(V_p)$ содержится в тропической гиперповерхности, определяемой амебой $\mathrm{Log}\,p$ тропического комплексного многочлена p, ясно. Действительно, в точках пространства $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$, которые при отображении Log не попадают в тропическую гиперповерхность T, определяемую $\mathbb{R}_{\max,+}$-многочленом $\mathrm{Log}\,p$, размер тропического многочлена p

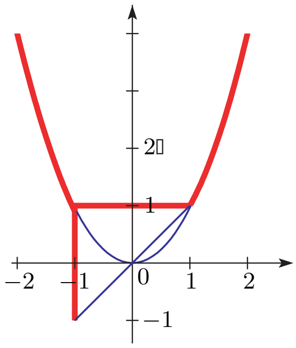


Рис. 9. График функции $1 \top x \top x^2$

равен 1 (абсолютная величина одного из одночленов, входящих в p, больше абсолютных величин остальных его одночленов) и потому тропическая сумма всех одночленов не может содержать нуля.

Докажем, что каждая точка тропической гиперповерхности T принадлежит $\mathrm{Log}(V_p)$. Пусть $x \in T$ и $S = \mathrm{Log}^{-1}(x) \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Выберем два одночлена из главной части p в точках слоя S. Это возможно, поскольку на $\mathrm{Log}^{-1}(T)$ размер тропического многочлена p больше 1. Как мы видели в п. 5.2, в S существует точка, в которой сумма этих одночленов равна нулю. Тогда и тропическая сумма всех одночленов содержит нуль. $\square$

5.7. Корни комплексных тропических многочленов одной переменной. Пусть $p(z) = \top_{k=0}^{n} a_k z^k$ — чистый комплексный тропический многочлен одной переменной, w — комплексное число, в котором размер тропического многочлена p больше 1. Посмотрим, каково множество решений уравнения $p(z) = 0$ в окружности $C = \mathrm{Log}^{-1}\mathrm{Log}(w)$.

Не умаляя общности, можно считать, что $p = p_w$. Если число одночленов этого тропического многочлена равно двум, то ответ на интересующий нас вопрос легко извлекается из результатов п. 5.4: число корней уравнения $p(z) = 0$ в C равно разности показателей одночленов, а сами корни равномерно распределены на окружности C.

Если число одночленов больше двух, то корни всегда имеются. Дело в том, что если тропическая сумма двух одночленов содержит нуль, то тропическое прибавление к ней новых одночленов, имеющих ту же абсолютную величину, не изменит суммы. А тропическая сумма двух одночленов с одинаковой абсолютной величиной на слое C расслоения Log корень имеет (ср. доказательство теоремы 5.A).

Здесь, однако, мы сталкиваемся с новым явлением: у суммы более двух слагаемых, как правило, корней на таком слое бесконечно много и множество корней имеет непустую внутренность в C. Я знаю лишь одно (с точностью до несложных преобразований) отступление от этого правила: тропический многочлен $1 \top z \top -z^2$ на окружности $|z| = 1$ имеет всего два корня ($z = \pm 1$).

Бесконечные множества корней с непустой внутренностью в C появляются следующим образом. Если три одночлена с одинаковыми абсолютными величинами на C в некоторой точке $z_0 \in C$ имеют значения, внутренность выпуклой оболочки которых содержит нуль, то и их тропическая сумма содержит нуль (см. следствие 2.E) и в некоторой окрестности точки z_0 на C в силу непрерывности одночленов нуль по-прежнему принадлежит выпуклой оболочке значений одночленов и тропической сумме этих трех одночленов.

Например, у тропического многочлена $1 \top z \top z^2$ на окружности $|z| = 1$ во всех точках с неположительной вещественной частью имеется нулевое значение. Это, впрочем, и все корни этого комплексного тропического многочлена. На рис. 9 показан вещественный график этого многочлена. Он связен (как и должно быть по теореме 4.G), пересекает ось абсцисс всего в одной точке (остальные корни мнимые), но аномален в другом смысле — он не является одномерным многообразием.

Таким образом, корни комплексного тропического многочлена одной переменной могут быть устроены совсем не так, как у обычных комплексных многочленов. Однако комплексные тропические многочлены одной переменной, у которых наблюдается это явление, т.е. у которых размер в некоторой точке больше 2, весьма вырожденны. В невырожденной ситуации размер комплексного тропического многочлена одной переменной в точке не превышает 2 и тогда число его корней равно степени, как и в классическом случае.

Замечу также, что у вещественных тропических многочленов одной переменной число корней конечно, поскольку вещественный аналог окружности $|z| = \mathrm{const}$ состоит из двух точек.

5.8. Комплексная тропическая прямая. Рассмотрим трехчленное уравнение

$$z \top w \top 1 = 0. \tag{5}$$

Согласно теореме 5.A амеба множества, задаваемого уравнением (5), есть тропическая прямая (см. рис. 1).

Над внутренними точками лучей главная часть тропического многочлена $z \top w \top 1$ состоит из двух членов: над точками горизонтального луча это $w \top 1$, над точками вертикального луча это $z \top 1$ и над точками наклонного луча это $z \top w$. Пересечение тора $\mathrm{Log}^{-1}(x, y)$ с комплексной тропической кривой над точками этих лучей описывается в координатах $\varphi = -i \log \frac{z}{|z|}$, $\psi = -i \log \frac{w}{|w|}$ соответственно уравнениями $\psi = \pi$, $\varphi = \pi$ и $\varphi = \psi \pm \pi$. Таким образом, над каждой точкой горизонтального луча висит параллель $\psi = \pi$ тора, над каждой точкой вертикального луча — меридиан $\varphi = \pi$ и над каждой точкой наклонного луча — диагональная окружность $\varphi = \psi \pm \pi$. В квадратной развертке тора эти окружности выглядят, как показано на рис. 10, *а*. Над общей начальной точкой всех трех лучей уравнение (5) задает область, состоящую из двух треугольников (рис. 10, *б*).

Рисунок 11 доставляет доказательство того, что на рис. 10, *б* действительно изображена часть нашей тропической прямой, лежащая над начальной точкой трех лучей.

Нетрудно убедиться в том, что объединение трех цилиндров, проектирующихся на лучи, с этими двумя треугольниками составляет штаны (т.е. сферу с тремя дырами).

Мы изучили часть комплексной тропической прямой $z \top w \top 1 = 0$, доступную для изучения при помощи ее амебы. Это часть, содержащаяся в комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^2$, на котором отображение Log определено. Уравнение $z \top w \top 1 = 0$ имеет смысл и во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$. На координатных осях $z = 0$ и $w = 0$ оно определяет по одной точке: на оси $z = 0$ это точка $(0, 1)$, на оси $w = 0$ точка $(1, 0)$. Добавление этих двух точек к штанам превращает штаны в плоскость (точки заполняют две дыры, т.е. зашивают штанины).

Можно пойти дальше и рассмотреть комплексную тропическую проективную прямую. Для этого, как и в классической геометрии, следует перейти к проективным однородным координатам $(z_0 : z_1 : z_2)$ и однородному варианту $z_1 \top z_2 \top z_0 = 0$ уравнения $z \top w \top 1 = 0$. Это добавляет к нашей прямой последнюю точку, превращая ее в сферу.

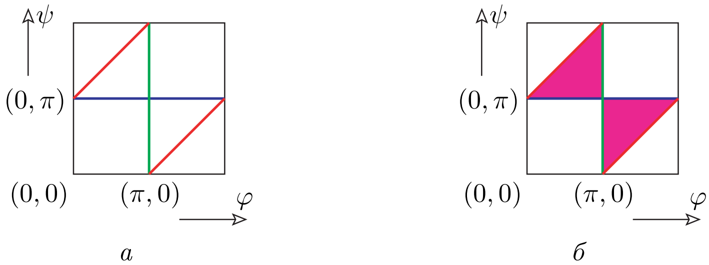


Рис. 10. Множества точек, отвечающих уравнению (5), в квадратной развертке тора

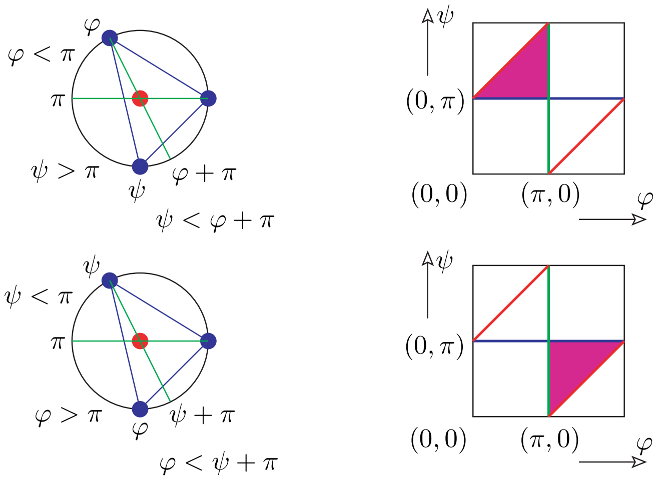


Рис. 11. Пояснение к тому, как получается рис. 10, *б*

Заметим, что топология всех трех видов комплексной тропической прямой — торической в $(\mathbb{C} \setminus 0)^2$, аффинной в $\mathbb{C}^2$ и проективной в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ — ничуть не отличается от топологии соответствующих видов классической комплексной прямой. Геометрия отличается: тропическая прямая негладкая, у нее есть углы.

5.9. Классические пространства в комплексной тропической геометрии. До конца предыдущего пункта мы рассматривали множества нулей комплексного тропического многочлена либо в аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$, либо в комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$. Однако в конце предыдущего пункта появилась комплексная проективная тропическая прямая.

Тропические многочлены бывают однородны, т.е. составлены из одночленов одинаковой степени. При умножении всех переменных на одно и то же число значение тропической суммы одночленов одной степени умножается на степень этого числа, и если уж это значение содержало нуль, то и будет содержать. Таким образом, уравнение $p(z_0, \dots, z_n) = 0$, где p — тропический однородный многочлен, определяет множество в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Это множество естественно называть *тропической комплексной проективной гиперповерхностью*. Комплексная тропическая проективная плоская прямая, появившаяся в предыдущем пункте, — простейший пример.

Комплексные проективные пространства являются представителями более широкого класса комплексных алгебраических многообразий — комплексных торических многообразий, на которых тропические многочлены могут быть уравнениями. Дело в том, что торическое многообразие может быть задано атласом локальных систем координат, функции перехода между которыми не требуют для своего определения операции сложения — они чисто мономиальны. Поэтому тропический многочлен, определенный в одной из этих локальных систем координат, при переходе в другую естественно остается тропическим многочленом. Просто каждый из составляющих его одночленов преобразуется отдельно.

Хотя множества точек комплексного торического многообразия остаются те же, что и в классической комплексной алгебраической геометрии, структурный пучок заменяется на совсем другой, поскольку в тропической геометрии роль сложения играет тропическое сложение, роль многочленов — тропические многочлены.

Запас основных пространств при переходе от классической комплексной к комплексной тропической геометрии тоже меняется. Например, к ним добавляется комплексная тропическая прямая, рассмотренная выше.

Комплексные торические многообразия удобны с тропической точки зрения еще и тем, что они покрываются комплексными торами, а в каждом комплексном торе определено отображение Log.

5.10. Комплексная тропическая гиперплоскость. Рассмотрим непосредственное обобщение комплексной тропической прямой — множество H, заданное уравнением

$$z_0 \top z_1 \top \ldots \top z_n = 0 \tag{6}$$

в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Нас интересуют прежде всего локальная структура и топология этого множества.

Теорема 5.B. *Подпространство H пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ является топологическим многообразием размерности $2n-2$.*

Детальное доказательство этой теоремы автор планирует опубликовать отдельно. Ограничимся здесь лишь несколькими замечаниями о структуре множества H.

В каждой точке $w = (w_0\colon w_1\colon \ldots\colon w_n) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ тропический многочлен $p(z) = z_0 \top z_1 \top \ldots \top z_n$ имеет главную часть $p_{(w)}(z) = z_{k_1} \top z_{k_2} \top \ldots \top z_{k_m}$ и размер m. Напомню, что главная часть тропического многочлена в точке w — это тропическая сумма тех его одночленов, которые в точке w имеют значения наибольшей абсолютной величины среди всех одночленов этого тропического многочлена. Размер тропического многочлена в точке w — это число одночленов его главной части в этой точке.

В каждой точке $w \in H$ главная часть $p_{(w)}$ тропического многочлена p равна нулю, и согласно теореме 2.D из этого следует, что в $p_{(w)}$ имеется не более трех одночленов, тропическая сумма которых равна нулю. Обозначим через $s(w)$ наименьшее число таких одночленов. Для каждой $w \in H$ это число равно 2 или 3. Для $w \in H$ положим $d(w) = r_p(w) - s(w)$. Обозначим через H_d множество точек $w \in H$, в которых $d(w) = d$.

Лемма 5.C. *Множество H_0 является гладким подмногообразием пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ размерности $2n-2$, оно открыто и всюду плотно в H.*

Доказательство. Пусть $w \in H_0$. Если $s(w) = 2$, то $w_i = -w_j$ для некоторых i, j и $|w_k| < |w_i|$ для любого $k \neq i, j$. Тогда на некоторой окрестности точки w в H уравнение $z_i = -z_j$ определяет H и эта окрестность содержится в H_0. Мы видим, что в окрестности такой точки $H = H_0$ является открытым множеством комплексной гиперплоскости.

Если $s(w) = 3$, то $|w_i| = |w_j| = |w_k|$ и $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{Conv}(w_i, w_j, w_k)$ для некоторых i, j, k и $|w_m| < |w_k|$ для любого $m \neq i, j, k$. Тогда на некоторой окрестности точки w в H уравнения $|z_i| = |z_j| = |z_k|$ определяют H и эта окрестность содержится в H_0. Мы видим, что в окрестности такой точки $H = H_0$ является открытым множеством в вещественном гладком алгебраическом подмногообразии вещественной коразмерности 2.

Пусть теперь w — произвольная точка множества H. В ней $p(w) = 0$. Следовательно, согласно теореме 2.D в $p_{(w)}$ имеется не более трех одночленов, тропическая сумма которых равна нулю. Каждый из одночленов в p есть одна из координат. В сколь угодно малой окрестности точки w найдется точка, в которой $s(w)$ координат из $p_{(w)}$ имеют нулевую тропическую сумму (это координаты с теми же номерами, что и координаты точки w с нулевой тропической суммой), а остальные координаты имеют слегка меньшие абсолютные величины. Эта точка принадлежит H_0. Этим доказано, что H_0 плотно в H. $\square$

Множество H_0 разбивается на непересекающиеся открытые множества, в каждом из которых главная часть многочлена p своя. Мы будем называть эти открытые множества *главными стратами* множества H. Как следует из леммы 5.C, замыкания главных стратов покрывают все H.

Замыкания главных стратов устроены очень просто. Это полуалгебраические множества без особенностей, являющиеся гладкими многообразиями с краем и с углами вдоль края. Они локально диффеоморфны произведению нескольких экземпляров прямой $\mathbb{R}$ и полупрямой $\mathbb{R}_{\geq 0}$. В точке края множество касательных векторов, направленных внутрь страта, есть конус, изоморфный такому произведению. Это нетрудно показать, используя почти те же рассуждения, что и в доказательстве леммы 5.C, но мы сделаем предварительную смену декораций, поскольку это будет полезно и для последующего локального анализа всего множества H.

Заметим, что главная часть уравнения (6) в какой угодно точке выглядит так же, как и все уравнение, но содержит меньше координат. В окрестности точки комплексная тропическая гиперплоскость определяется главной частью уравнения и потому локально гомеоморфна произведению окрестности точки комплексной тропической гиперплоскости в пространстве меньшей размерности на комплексное аффинное пространство подходящей размерности. Поэтому при изучении локальной структуры комплексной тропической гиперплоскости и ее стратов можно ограничиться точками, в которых размер уравнения максимален, т.е. в случае комплексной тропической гиперплоскости пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ равен $n+1$. Точки, в которых размер многочлена p равен $n+1$, заполняют тор T, определяемый уравнениями $|z_0| = |z_1| = \ldots = |z_n|$. (Конечно, не все точки тора T принадлежат H.)

Итак, пусть $w \in H$ и $p_{(w)} = p$. Тогда определенно $w \notin H_0$, но $w \in \operatorname{Cl} H_0$. Однородные координаты $w_0, w_1, \ldots, w_n$ точки w имеют одинаковые абсолютные величины. Нам будет удобно рассуждать о них как о конфигурации точек на окружности. Обозначим эту конфигурацию через W. В ее терминах мы будем описывать и страты множества H, примыкающие к w, и конусы в касательном пространстве, составленные из векторов, направленных внутрь этих стратов.

Перечислим прежде всего главные страты, примыкающие к w. Они бывают двух типов: с $s=3$ и $s=2$.

Главные страты множества H, примыкающие к w, на которых $s=3$, находятся во взаимно однозначном соответствии с тройками точек w_i, w_j, w_k таких, что $0 \in \operatorname{Conv}(w_i, w_j, w_k)$. Точки z замыкания главного страта $H_0^{i,j,k}$, отвечающего тройке w_i, w_j, w_k, и близкие к w имеют однородные координаты, близкие к соответствующим однородным координатам точки w и удовлетворяющие следующим условиям: $|z_i| = |z_j| = |z_k| = |w_i|$, $|z_m| \leq |w_i|$ при $m \neq i, j, k$. Касательные векторы, направленные внутрь этого страта, составляют выпуклый конус, аффинно изоморфный произведению пространства $\mathbb{R}^n$ на конус над симплексом размерности $n-3$.

Главные страты множества H, примыкающие к w, на которых $s=2$, находятся во взаимно однозначном соответствии с парами точек w_i, w_j таких, что $w_i = -w_j$. Точки z замыкания главного страта $H_0^{i,j}$, отвечающего паре w_i, w_j, и близкие к w имеют однородные координаты, близкие к соответствующим однородным координатам точки w и удовлетворяющие следующим условиям: $z_i = -z_j$, $|z_m| \leq |z_i|$. Касательные векторы, направленные внутрь этого страта, составляют выпуклый конус, аффинно изоморфный произведению пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ на конус над симплексом размерности $n-2$.

Заметим, что страты $H_0^{i,j,k}$ сохраняются при малом возмущении точки w, тогда как страты $H_0^{i,j}$ появляются при исключительных w, а именно если пара точек w_i, w_j состоит из антиподов. Аналогичное описание допускают и страты положительных коразмерностей.

Количество треугольников, охватывающих нуль, с вершинами в множестве W (а значит, и число конусов, локально покрывающих H) зависит от расположения точек $w_0, w_1, \ldots, w_n$ на окружности. Самое простое расположение возникает, если имеется такой диаметр, что две из этих точек, скажем w_i и w_j, расположены по одну сторону от него близко к его противоположным концам, а остальные точки — по другую сторону диаметра и не очень близко от его концов. Такая конфигурация точек возникает, когда конфигурация точек на окружности, выпуклая оболочка которых не содержит нуля, деформируется и одна из сторон выпуклой оболочки пересекает нуль.

Тогда все треугольники с вершинами в W, охватывающие нуль, имеют вершины w_i и w_j, тогда как третья вершина может быть любой из оставшихся $n-1$ точек. Любые два такие треугольника имеют общую сторону $[w_i w_j]$, так что соответствующие конусы пересекаются по грани старшей размерности. В целом все конусы составляют структуру, изоморфную структуре граней симплекса размерности $n-2$. Рассматриваемая точка входит в границы $n-1$ стратов $H_0^{i,j,k}$. Каждый из этих стратов локально представляет собой конус над симплексом размерности $n-3$, умноженным на $\mathbb{R}^n$, а их объединение — конус над границей симплекса размерности $n-2$, умноженной на $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в точках рассматриваемого типа множество H локально евклидово.

Для того чтобы разобраться в том, как оно устроено в других точках, достаточно изучить, как меняется его локальная стратификация при движении точки w. Легко видеть, например, что при прохождении одной из точек w_i через $-w_j$ происходит преобразование Пахнера [23] разбиения касательного конуса к H в точке w на главные страты. В момент прохождения возникает страт типа $H_0^{i,j}$, который тут же исчезает. Однако топологический тип касательного конуса к H в точке w при этом сохраняется. Сходные рассуждения относительно более глубоких вырождений конфигурации W и доказывают теорему 5.B.

5.11. Неособые комплексные тропические гиперповерхности. Чистый тропический комплексный многочлен от n переменных называется *неособым*, если в каждой точке пространства $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ многогранник Ньютона его главной части есть примитивный симплекс размерности $\le n$. Симплекс с вершинами в точках с целочисленными координатами называется *примитивным*, если векторы, соединяющие одну из его вершин с остальными вершинами, составляют базис пересечения целочисленной решетки с минимальным аффинным пространством, содержащим этот симплекс.

Теорема 5.D. *Множество X, задаваемое в $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ неособым тропическим комплексным многочленом p, является топологическим многообразием размерности $2n-2$.*

Редукция к линейному уравнению. Пусть $w\in(\mathbb{C}\setminus 0)^n$ — точка, принадлежащая множеству X, и пусть

$$p_{(w)}(z)=\mu_0(z)\top\mu_1(z)\top\ldots\top\mu_m(z)$$

— главная часть тропического многочлена p в точке w. В силу условия неособости отношения одночленов $u_i=\frac{\mu_i(z)}{\mu_0(z)}$ с $i=1,\ldots,m$ определяют субмерсию $(\mathbb{C}\setminus 0)^n\to(\mathbb{C}\setminus 0)^m$. Дополним ее, добавив к $u_1,\ldots,u_m$ какие-нибудь одночлены $u_{m+1},\ldots,u_n$, до диффеоморфизма $(\mathbb{C}\setminus 0)^n\to(\mathbb{C}\setminus 0)^n$. Этот диффеоморфизм мы будем рассматривать как локальную систему координат в окрестности точки w. Хотя координаты и определены глобально, они нужны для локального исследования множества X в окрестности точки w, где $p=p_{(w)}$ и множество X совпадает с множеством, заданным уравнением $p_{(w)}=0$. Обозначим это множество через Y.

В координатах $u_1,\ldots,u_n$ множество Y задается уравнением $1\top u_1\top\ldots\top u_m=0$, а точка w имеет абсолютные величины первых m координат, равные 1. Значения последних $n-m$ координат несущественны, поскольку они не входят в уравнение и множество Y локально устроено как цилиндрическое множество с $(n-m)$-мерными образующими, параллельными последним $n-m$ комплексным координатным осям.

Таким образом, утверждение теоремы свелось к тому, что комплексное линейное тропическое уравнение $1\top u_1\top\ldots\top u_m=0$ определяет топологическое многообразие (вещественной) размерности $2n-2$ в пространстве $(\mathbb{C}\setminus 0)^n$. Это следует из теоремы 5.B. $\square$

5.12. Гипотеза Жаркова–Итенберга–Михалкина о тропических пределах структур Ходжа. Комплексные тропические гиперповерхности, как и более сложные комплексные тропические многообразия, оставшиеся за рамками этой работы, обладают естественным амебным отображением на соответствующие тропические многообразия (над $\mathbb{R}_{\max,+}$) (см. выше п. 5.6). Последние, будучи полиэдрами, обладают естественными остовами. Прообразы остовов при амебной проекции составляют естественную фильтрацию комплексного тропического многообразия. Она дает фильтрацию его гомологических групп.

Пусть X — комплексное тропическое многообразие и X_q — прообраз q-мерного остова тропического многообразия при амебной проекции. Определим $H_n^q(X) = \Im(\mathrm{in}_*\colon H_n(X_q) \to H_n(X))$ и положим $H_{p,q}(X) = H_{p+q}^q(X)/H_{p+q}^{q-1}(X)$. Согласно гипотезе, сформулированной в несколько других (и, по-видимому, более общих) предположениях Итенбергом, Жарковым и Михалкиным, группа $H_{p,q}(X)\otimes\mathbb{C}$ изоморфна группе Ходжа $H^{p,q}(X_h)$ комплексного многообразия, вырождающегося в X.

Добавление 1. ДРУГИЕ ТРОПИЧЕСКИЕ СЛОЖЕНИЯ

Д1.1. Тропическое сложение кватернионов. Обозначим через $\mathbb{H}$ тело кватернионов $\{x+y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+t\mathbf{k}\colon x,y,z,t\in\mathbb{R}\}$. Пусть $a,b\in\mathbb{H}$. По аналогии с конструкцией п. 2.7 положим

$$a \top b = \begin{cases} \{a\}, & \text{если } |a|>|b|,\\ \{b\}, & \text{если } |a|<|b|,\\ \begin{array}{l}\text{Множество точек кратчайшей дуги гео-}\\ \text{дезической, соединяющей кватернионы}\\ a \text{ и } b \text{ в сфере } \{c\in\mathbb{H}\colon |c|=|a|\},\end{array} & \text{если } |a|=|b|,\ a+b\neq 0,\\ \text{Шар } \{c\in\mathbb{H}\colon |c|\le|a|\}, & \text{если } a+b=0. \end{cases}$$

Множество $a\top b$ будем называть *тропической суммой* кватернионов a и b.

Теорема Д1.А. *Множество $\mathbb{H}$, снабженное тропическим сложением, является коммутативной мультигруппой.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.А. □

Нетрудно видеть, что умножение кватернионов дистрибутивно относительно тропического сложения, так что перед нами *мультитело.*

Д1.2. Векторные пространства. Конструкция тропического сложения кватернионов является частным случаем более общей конструкции. В произвольном нормированном векторном пространстве V над $\mathbb{C}$ определим операцию $(a,b)\mapsto a\top b$:

$$a \top b = \begin{cases} \{a\}, & \text{если } |a|>|b|,\\ \{b\}, & \text{если } |a|<|b|,\\ \mathrm{Cl}\Big\{\dfrac{|a|}{|\alpha a+\beta b|}(\alpha a+\beta b)\in V\colon \alpha,\beta\in\mathbb{R}_{>0}\Big\}, & \text{если } |a|=|b|,\ a+b\neq 0,\\ \{c\in V\colon |c|\le|a|\}, & \text{если } a+b=0. \end{cases}$$

Эта операция превращает V в мультигруппу и дистрибутивна относительно умножения векторов на комплексные числа. При этом $av\top bv=(a\top b)v$. Другими словами, V становится векторным пространством над мультиполем тропических комплексных чисел $\mathcal{T}\mathbb{C}$ в смысле следующего определения.

Пусть F — мультиполе. Множество V с многозначной бинарной операцией $(v,w)\mapsto v\top w$ и с действием $(a,v)\mapsto av$, $a\in F$, $v\in V$, мультипликативной полугруппы мультиполя F называется *векторным пространством* над F, если

- операция $\top$ определяет в V структуру коммутативной мультигруппы;
- $(ab)v=a(bv)$ для любых $a,b\in F$ и $v\in V$;
- $1v=v$ для любого $v\in V$;
- $a(v\top w)=av\top aw$ для любых $a\in F$ и $v,w\in V$;
- $(a\top b)v=av\top bv$ для любых $a,b\in F$ и $v\in V$.

Разумеется, любое мультиполе является векторным пространством над самим собой. Копии этого векторного пространства содержатся в любом векторном пространстве над мультиполем. Действительно, если V — векторное пространство над мультиполем F и $w\in V$, то подмножество $W=\{aw\colon a\in F\}$ является в очевидном смысле векторным подпространством пространства V и отображение $F\to V\colon a\mapsto aw$ отображает изоморфно F, рассматриваемое как векторное пространство над мультиполем F, на W.

Как и в категории векторных пространств над полем, декартово произведение $V\times W$ векторных пространств V, W над мультиполем F естественным образом наделяется структурой векторного пространства над F:

$$(v_1,w_1)\top(v_2,w_2)=\{(v,w)\colon v\in v_1\top v_2,\ w\in w_1\top w_2\},\qquad a(v,w)=(av,aw).$$

Заметим, однако, что в отличие от векторных пространств над полем векторное пространство над мультиполем, порожденное конечным числом своих элементов, не обязательно изоморфно декартову произведению своих подпространств, каждое из которых порождено одним элементом. Действительно, векторное пространство над $\mathcal{T}\mathbb{C}$, построенное указанным выше способом по двумерному нормированному векторному пространству над $\mathbb{C}$, неизоморфно $\mathcal{T}\mathbb{C}\times\mathcal{T}\mathbb{C}$.

Д1.3. Поля одночленов. Следующий пример вдохновлен работой Бретта Паркера [24], тоже мотивированной желанием понять тропические вырождения комплексных структур.

Что если применить ту же конструкцию, что и в п. 2.11, но не игнорировать абсолютную величину одночлена? Рассмотрим множество одночленов at^r с комплексными коэффициентами $a\neq 0$ и вещественными показателями r. Присоединим к этому множеству нуль. Формально это $(\mathbb{C}\setminus 0)\times\mathbb{R}\cup\{0\}$. Обозначим его через P и определим в нем арифметические операции.

Умножение определяется как обычное умножение одночленов. Множество ненулевых одночленов является абелевой группой относительно умножения, которая естественно изоморфна произведению мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел на аддитивную группу всех вещественных чисел.

Сложение многозначно и определяется следующими формулами:

$$at^r\top bt^s=\begin{cases} at^r, & \text{если } r>s,\\ bt^s, & \text{если } s>r,\\ (a+b)t^r, & \text{если } s=r,\ a+b\neq 0,\\ \{ct^u\colon u<r\}\cup\{0\}, & \text{если } s=r,\ a+b=0,\end{cases}\qquad 0\top x=x.$$

Ясно, что это сложение коммутативно, дистрибутивно относительно умножения, обладает нейтральным элементом 0 и для каждого одночлена x имеется единственный y такой, что $x\top y\ni 0$. Проверим ассоциативность.

Если одно из трех слагаемых равно нулю, то ассоциативность имеет место и доказательство выглядит совсем просто: $(x\top 0)\top y=x\top y=x\top(0\top y)$.

Рассмотрим три ненулевых одночлена at^u, bt^v и ct^w. Следующий список исчерпывает все возможности:

(1) показатель одного из одночленов больше показателей двух других, скажем $u > v, w$;

(2) два показателя, скажем u и v, равны, а третий меньше и при этом $a + b \neq 0$;

(3) два показателя, скажем u и v, равны, а третий меньше и при этом $a + b = 0$;

(4) все три показателя равны и при этом

 (а) ни одна из сумм $a + b$, $b + c$, $a + b + c$ не равна нулю;

 (б) сумма двух из коэффициентов равна нулю, скажем $a + b = 0$ (но $a + b + c \neq 0$);

 (в) $a + b + c = 0$.

Докажем ассоциативность в каждом из этих случаев.

(1) Сумма равна слагаемому с наибольшим показателем независимо от порядка выполнения операций — при любом порядке это слагаемое мажорирует другие и оказывается окончательным результатом. $\square$

(2) $(at^u \top bt^u) \top ct^w = (a+b)t^u \top ct^w = (a+b)t^u$, с другой стороны, $at^u \top (bt^u \top ct^w) = at^u \top bt^u = (a + b)t^u$. $\square$

(3) Имеем

$$(at^u \top -at^u) \top ct^w = (\{xt^r : r < u\} \cup \{0\}) \top ct^w =$$
$$= \begin{pmatrix} \{xt^r : w < r < u\} \cup \\ \{xt^r : r = w,\, x \neq -c\} \cup \\ \{-ct^w\} \cup \\ \{xt^r : r < w\} \cup \{0\} \end{pmatrix} \top ct^w = \begin{pmatrix} \{xt^r : w < r < u\} \cup \\ \{xt^w : x \neq 0,\, x \neq c\} \cup \\ \{xt^r : r < w\} \cup \{0\} \cup \\ \{ct^w\} \end{pmatrix} = \{xt^r : r < u\} \cup \{0\}.$$

С другой стороны,

$$at^u \top (-at^u \top ct^w) = at^u \top (-at^u) = \{xt^r : r < u\} \cup \{0\}. \quad \square$$

(4а) $(at^u \top bt^u) \top ct^u = (a + b)t^u \top ct^u = (a + b + c)t^u$ и $at^u \top (bt^u \top ct^u) = at^u \top (b + c)t^u = (a + b + c)t^u$. $\square$

(4б) Если $a + b = 0$ и ни одна из сумм $b + c$, $a + b + c$ не равна нулю, то $(at^u \top -at^u) \top ct^u = (\{xt^r : r < u\} \cup \{0\}) \top ct^u = ct^u$. С другой стороны, $at^u \top (-at^u \top ct^u) = at^u \top (-a+c)t^u = ct^u$. $\square$

(4в) Если все три показателя равны и $a + b + c = 0$, то

$$(at^u \top bt^u) \top ct^u = (a + b)t^u \top ct^u = (-c)t^u \top ct^u = \{xt^r : r < u\} \cup \{0\},$$

с другой стороны,

$$at^u \top (bt^u \top ct^u) = at^u \top (b + c)t^u = at^u \top (-a)t^u = \{xt^r : r < u\} \cup \{0\}. \quad \square$$

Замечание. Имеются многочисленные варианты конструкции, рассмотренной выше. Например, в определении тропического сложения одночленов все неравенства можно заменить на противоположные неравенства. Другая возможность — ограничиться одночленами, у которых показатели принимают только рациональные или только целые значения. Более общо, показатели могут браться из любой линейно упорядоченной абелевой группы.

Д1.4. Тропическое сложение p-адических чисел. Конструкция п. 2.11 допускает модификацию, применимую к любому полю с неархимедовым нормированием. В каждом таком поле можно определить тропическое сложение, которое вместе с изначальным умножением составляет структуру тропического поля. Ниже эта схема реализуется лишь в случае поля p-адических чисел. Общий случай будет рассмотрен в другой работе.

Напомню, что p-адическое число определяется как ряд

$$\sum_{n=-v(a)}^{\infty} a_n p^n,$$

где a_n принимает значения в множестве целых чисел из промежутка $[0, p-1]$ и $a_{-v(a)} \neq 0$. Определим тропическую сумму p-адических чисел $a = \sum_{n=-v(a)}^{\infty} a_n p^n$ и $b = \sum_{n=-v(b)}^{\infty} b_n p^n$ следующей формулой:

$$a \top b = \begin{cases} a, & \text{если } \ v(a) > v(b), \\ b, & \text{если } \ v(b) > v(a), \\ a+b, & \text{если } \ v(a) = v(b), \ a_{-v(a)} + b_{-v(b)} \neq p, \\ \{x\colon v(x) < v(a)\}, & \text{если } \ v(a) = v(b), \ a_{-v(a)} + b_{-v(b)} = p. \end{cases} \tag{7}$$

Так же как и в предыдущем пункте, можно доказать, что эта операция ассоциативна и вместе с обычным умножением дает структуру тропического поля в множестве p-адических чисел.

Добавление 2. ВЕРХНЯЯ ТОПОЛОГИЯ ФЕЛЛА

Д2.1. Верхняя топология Фелла. Нетрудно показать, что относительно верхней топологии Виеториса график тропического сложения не есть предел графиков операций $(a,b) \mapsto a \oplus_h b$. Этот недостаток, так же как и некоторые другие недостатки верхней топологии Виеториса, отмеченные выше, устраняется небольшим изменением ее определения.

Верхней топологией Фелла в множестве 2^X всех подмножеств топологического пространства X называется топология, порождаемая множествами вида $2^U \subset 2^X$, где U — дополнение компактного подмножества пространства X.

Топология Фелла определяется как топология, порождаемая верхней топологией Фелла и нижней топологией Виеториса. Она наследует от нижней топологии Виеториса ее недостатки и нас интересовать здесь не будет.

Заметим, что если пространство X компактно и хаусдорфово, то верхняя топология Фелла совпадает с верхней топологией Виеториса. Однако в примере предыдущего пункта верхняя топология Фелла индуцирует топологию, отвечающую ожиданиям.

Более общо, если X — гладкое многообразие и $F_t\colon M \to X$ — гладкая изотопия вложений многообразия M в X, то кривая $t \mapsto F_t(M)$ в пространстве 2^X с верхней топологией Фелла непрерывна. В частности, семейство графиков $\Gamma_h \subset \mathbb{C}^3$ бинарных операций $\oplus_h$ с $h > 0$ представляет собой непрерывное отображение $\mathbb{R}_{>0} \to 2^{\mathbb{C}^3}$.

Нас интересует, однако, во что может выродиться подмногообразие (например, график Γ_h сложения $\oplus_h$) при переходе к пределу относительно верхней топологии Фелла.

Д2.2. Пределы в верхней топологии Фелла. Пусть X — топологическое пространство, $\mathbb{R}_{>0} \to 2^X\colon h \mapsto F_h$ — какое угодно отображение, т.е. произвольное семейство множеств, запараметризованное положительными вещественными числами. Здесь мы не предполагаем какой бы то ни было непрерывности этого семейства относительно какой бы то ни было топологии пространства 2^X.

Несмотря на отсутствие каких бы то ни было предположений, F_h обладает пределом при $h \to 0$, т.е. таким множеством $A \subset X$, что $F_h \to A$ при $h \to 0$ относительно верхней топологии Фелла. Например, $A = X$ является пределом в верхней топологии Фелла для любого семейства F_h подмножеств пространства X. Однако хотелось бы выделить какой-то более интересный специальный предел.

Обозначим через L множество

$$\{a \in X\colon\ \exists h_n \to 0,\ \exists x_n \in F_{h_n},\ x_n \to a\}, \tag{8}$$

т.е. множество пределов сходящихся последовательностей точек из F_h при $h \to 0$.

Теорема Д2.A. *Пусть X — локально компактное регулярное топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Тогда L является наименьшим по включению замкнутым пределом семейства множеств F_h при $h \to 0$ в верхней топологии Фелла.*

Эта теорема непосредственно вытекает из следующих ниже лемм Д2.B, Д2.C и Д2.D.

Лемма Д2.B. *Если пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то множество L замкнуто в X.* $\square$

Лемма Д2.C. *Если пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то L является пределом множеств F_h при $h \to 0$ в верхней топологии Фелла.* $\square$

Лемма Д2.D. *Если пространство X локально компактно и регулярно, то L содержится в любом замкнутом множестве, являющемся пределом семейства множеств F_h при $h \to 0$ в верхней топологии Фелла.* $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bergman G.M.* The logarithmic limit-set of an algebraic variety // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 157. P. 459–469.
2. *Berkovich V.G.* Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. (Math. Surv. and Monogr.; V. 33).
3. *Bieri R., Groves J.R.J.* The geometry of the set of characters induced by valuations // J. reine und angew. Math. 1984. Bd. 347. S. 168–195.
4. *Buchstaber V.M., Rees E.G.* Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Transform. Groups. 1997. V. 2. P. 325–349.
5. *Comer S.D.* Combinatorial aspects of relations // Algebra Univers. 1984. V. 18. P. 77–94.
6. *Dresher M., Ore O.* Theory of multigroups // Amer. J. Math. 1938. V. 60. P. 705–733.
7. *Einsiedler M., Kapranov M., Lind D.* Non-archimedean amoebas and tropical varieties // J. reine und angew. Math. 2006. Bd. 601. S. 139–157; arXiv: math/0408311 [math.AG].
8. *Fell J.M.G.* A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 472–476.
9. *Gathmann A.* Tropical algebraic geometry: E-print, 2006. arXiv: math/0601322 [math.AG].
10. *Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V.* Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
11. *Itenberg I., Viro O.* Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture // Math. Intell. 1996. V. 18, N 4. P. 19–28.
12. *Kapranov M.* Amoebas over non-archimedean fields: Preprint, 2000.
13. *Katz E.* A tropical toolkit: E-print, 2006. arXiv: math/0610878 [math.AG].
14. *Kontsevich M., Soibelman Y.* Homological mirror symmetry and torus fibrations // Symplectic geometry and mirror symmetry, Seoul, 2000. Singapore: World Sci., 2001. P. 203–263; arXiv: math/0011041 [math.SG].
15. *Litvinov G.L., Maslov V.P.* The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications // Idempotency / Ed. by J. Gunawardena. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. P. 420–443.
16. *Marshall M.* Real reduced multirings and multifields // J. Pure and Appl. Algebra. 2006. V. 205. P. 452–468.
17. *Marty F.* Sur une généralisation de la notion de groupe // Särtryck ur Förhandlingar vid Ättonde Skandinaviska Matematikerkongressen, Stockholm, 1934. P. 45–49.

18. *Mikhalkin G.* Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces // Topology. 2004. V. 43, N 5. P. 1035–1065; arXiv: math/0205011v3 [math.GT].
19. *Mikhalkin G.* Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$ // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18, N 2. P. 313–377; arXiv: math/0312530 [math.AG].
20. *Mikhalkin G.* Tropical geometry and its applications // Proc. Intern. Congr. Math., Madrid, 2006. Zürich: Eur. Math. Soc., 2006. V. 2. P. 827–852.
21. *Mikhalkin G.* Introduction to tropical geometry: Notes from the IMPA lectures, Summer 2007: E-print, 2007. arXiv: 0709.1049 [math.AG].
22. *Mikhalkin G., Zharkov I.* Tropical curves, their Jacobians and theta functions: E-print, 2006. arXiv: math/0612267 [math.AG].
23. *Pachner U.* Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten // Abh. Math. Sem. Hamb. 1987. Bd. 57. S. 69–86.
24. *Parker B.* Exploded fibrations // Proc. 13th Gökova Geometry–Topology Conf., 2006. Cambridge, MA: Intern. Press, 2007. P. 52–90; arXiv: 0705.2408 [math.SG].
25. *Richter-Gebert J., Sturmfels B., Theobald T.* First steps in tropical geometry // Idempotent mathematics and mathematical physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. P. 289–317. (Contemp. Math.; V. 377).
26. *Sturmfels B.* Solving systems of polynomial equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. Ch. 9. (CBMS Reg. Conf. Ser. Math.; V. 97).
27. *Vietoris L.* Bereiche zweiter Ordnung // Monatsch. Math. 1922. Bd. 32. S. 258–280.
28. *Виро О.Я.* Склеивание алгебраических гиперповерхностей, устранения особенностей и построения кривых // Тр. Ленинград. Междунар. топологической конф., 1982. Л.: Наука, 1983. С. 149–197.
29. *Viro O.* Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper // 3rd Eur. Congr. Math., Barcelona, 2000. Basel: Birkhäuser, 2001. V. 1. P. 135–146; arXiv: math/0005163 [math.AG].
30. *Wall H.S.* Hypergroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1935. V. 41. P. 36.
31. *Wall H.S.* Hypergroups // Amer. J. Math. 1937. V. 59. P. 77–98.