# СРАВНЕНИЕ ПО МОДУЛЮ 8 ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ СТЕПЕНИ 9

О. Я. Виро, С. Ю. Оревков

**1. Введение и формулировка результата.** Пусть $A$ – неособая вещественная алгебраическая кривая степени $m$ в $\mathbb{RP}^2$. Ее компоненты связности – вложенные окружности. Те из них, дополнение которых в $\mathbb{RP}^2$ несвязно, называются *овалами.* Говорят, что овал $u$ лежит *внутри* овала $v$, если $u$ содержится в ориентируемой компоненте дополнения овала $v$. Объединение $d$ овалов $v_1, \dots, v_d$ таких, что $v_i$ лежит внутри $v_{i+1}$, $1 \leqslant i < d$, называется *гнездом глубины* $d$. Овал называется *внешним*, если он не лежит внутри никакого другого овала; овал называется *пустым*, если внутри него нет других овалов. Овал называется *четным*, если он содержится внутри четного числа других овалов, и *нечетным* в противном случае. Обозначим через $p$ и $n$ число четных и нечетных овалов соответственно. Кривая $A$ называется $M$*-кривой*, если она имеет максимально возможное число компонент связности, равное $M(m) = (m-1)(m-2)/2 + 1$. Если $A$ имеет $M(m) - i$ компонент связности, то она называется $(M-i)$*-кривой.* Пусть $\mathbb{C}A$ – комплексификация кривой $A$. Если $\mathbb{C}A \setminus A$ несвязно, то $A$ – кривая *типа* I; если $\mathbb{C}A \setminus A$ связно, то $A$ – кривая *типа* II.

У кривых четной степени $m = 2k$ в ряде случаев разность $p - n$ удовлетворяет сравнениям. Так, например,

| | |
|---|---|
| для $M$-кривых имеет место *сравнение Гудкова–Рохлина* | $p - n \equiv k^2 \bmod 8$, |
| для $(M-1)$-кривых – *сравнение Гудкова–Крахнова–Харламова* | $p - n \equiv k^2 \pm 1 \bmod 8$, |
| для $(M-2)$-кривых типа II – *сравнение Харламова–Марэна* | $p - n \not\equiv k^2 + 4 \bmod 8$, |
| для кривых типа I – *сравнение Арнольда* | $p - n \equiv k^2 \bmod 4$. |

Эти формулировки не переносятся на кривые *нечетных* степеней. Так, для $M$-кривой любой нечетной степени $2k+1$ с $k \geqslant 3$ вычет $p - n \bmod 8$ может принимать любые значения, сравнимые с $k \bmod 2$. Следующая теорема является, насколько нам известно, первым результатом такого рода для кривых нечетных степеней.

Теорема 1. *Пусть $A$ – кривая степени $m = 2k+1 = 4d+1$, имеющая 4 попарно непересекающихся гнезда глубины $d$. Тогда*:

$$\begin{array}{ll} \text{если } A \text{ – это } M\text{-кривая, то} & p - n \equiv -k \bmod 8; \\ \text{если } A \text{ – это } (M-1)\text{-кривая, то} & p - n \equiv -k \pm 1 \bmod 8; \\ \text{если } A \text{ – это } (M-2)\text{-кривая типа II, то} & p - n \not\equiv -k + 4 \bmod 8; \\ \text{если } A \text{ – это кривая типа I, то} & p - n \equiv -k \bmod 4. \end{array} \tag{1}$$

Очевидно, сравнение (1) при $d = 2$ эквивалентно тому, что число внешних пустых овалов $M$-кривой степени 9 с 4 гнездами делится на 4. Этот факт был сформулирован в качестве гипотезы Корчагиным [1]. Теорема 1 выводится ниже, в п. 4, из теоремы Виро–Харламова [2], обобщающей классические сравнения на случай особых кривых четной степени.

**2. Инвариант Брауна–ван дер Блия.** Под *квадратичным пространством* мы понимаем тройку $(V, \circ, q)$, составленную из векторного пространства $V$ над полем $\mathbb{Z}_2$, билинейной формы $V \times V \to \mathbb{Z}_2$, $(x, y) \mapsto x \circ y$, и функции $q\colon V \to \mathbb{Z}_4$, квадратичной относительно $\circ$ в том смысле, что $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2x \circ y$. Квадратичное пространство определяется своей *матрицей Грама* относительно какого-либо базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства $V$, т.е. матрицей $Q = (q_{ij})$, где $q_{ii} = q(e_i)$ и $q_{ij} = e_i \circ e_j$ при $i \neq j$ (диагональные элементы определены mod 4, остальные – mod 2; заметим, что $q(x) \equiv x \circ x \bmod 2$). Легко видеть, что элементарными заменами базиса матрицу Грама можно привести к блочно-диагональному виду $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_t) \oplus Q_1 \oplus \dots \oplus Q_s$, где каждый блок $Q_i$ – это либо $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, либо $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Если все $d_i \neq 2$, будем говорить, что форма $q$ *информативна*, и в этом случае определим ее *инвариант Брауна–ван дер Блия* $B(q) = \sum B(d_i) + \sum B(Q_i) \mod 8$, где $B(1) = 1$, $B(-1) = -1$, $B(0) = 0$, $B\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$ и $B\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 4$.

**3. Сравнение Виро–Харламова для нодальных кривых.** Пусть $A$ – кривая в $\mathbb{RP}^2$ степени $2k$, заданная уравнением $f=0$, и пусть каждая ее особая точка есть точка трансверсального пересечения двух гладких вещественных локальных ветвей. Говорят, что $A$ является кривой *типа* I (*$M$-кривой*), если нормализация любой ее неприводимой компоненты является кривой типа I (имеет $g+1$ вещественных компонент, где $g$ – род этой нормализации). Кривая, не принадлежащая типу I, относится к типу II. Пусть $x_1,\dots,x_s$ – особые точки и $\Gamma_A$ – объединение содержащих их компонент связности кривой $A$. Пусть $b=0$, если множество $\mathbb{RP}^2_+=\{f\geqslant 0\}$ стягиваемо в $\mathbb{RP}^2$, и $b=(-1)^k$ в противном случае.

В случае связного $\Gamma_A$ определим квадратичное пространство $(V,\circ,q)$ следующим образом. Пусть $C_1,\dots,C_r$ – ориентируемые компоненты множества $\mathbb{RP}^2\setminus\Gamma_A$, на которых $f>0$ вблизи от $\Gamma_A$. Пусть $(V_0,\circ,q_0)$ – квадратичное пространство с ортогональным базисом $e_1,\dots,e_s$, на элементах которого $q_0$ равно $-1$. Пусть $c_i=\sum_{j\in\alpha_i}e_j$, где $\{x_j\}_{j\in\alpha_i}$ – особые точки, через которые $\partial C_i$ проходит ровно один раз. Если $\Gamma_A$ либо стягиваемо, либо содержит ветвь (т.е. образ компоненты множества вещественных точек неособой модели кривой $A$), не гомологичную нулю в $\mathbb{RP}^2$, то $V$ определяется как подпространство пространства $V_0$, порожденное векторами $c_1,\dots,c_r$, а $q=q_0|_V$. В противном случае, т.е. если $\Gamma_A$ не стягиваемо и не содержит такой ветви, нужно выбрать простую замкнутую кривую $L$ в $\Gamma_A$, не стягиваемую в $\mathbb{RP}^2$, и расширить $V_0$ до квадратичного пространства $V_0'$, добавив к базисным векторам $e_1,\dots,e_s$ вектор $e_0$, на котором квадратичная форма принимает значение $(-1)^k$ и который ортогонален таким и только таким $e_j$, что $L$ проходит через $x_j$, реализуя нуль группы $H_1(\mathbb{RP}^2_+,\mathbb{RP}^2_+\setminus x_j;\mathbb{Z}_2)$. В этом случае $V$ определяется как подпространство пространства $V_0'$, порожденное векторами $c_1,\dots,c_r$, и $e_0+\sum_{j\in\alpha_0}e_j$, где $\alpha_0=\{j\mid [L]\neq 0\in H_1(\mathbb{RP}^2_-,\mathbb{RP}^2_-\setminus x_j;\mathbb{Z}_2)\}$.

В случае несвязного $\Gamma_A$ квадратичное пространство $(V,\circ,q)$ определяется как ортогональная сумма квадратичных пространств, ассоциированных описанным выше образом с каждой компонентой множества $\Gamma_A$.

Теорема 2. *Предположим, что для каждой ветви кривой $A$ число точек, в которых она пересекает объединение прочих ветвей, сравнимо по модулю 4 с 0, если эта ветвь гомологична нулю в $\mathbb{RP}^2$, и с $(-1)^{k+1}$ в противном случае. Тогда если $A$ есть $M$-кривая, то $\chi(\mathbb{RP}^2_+)\equiv k^2+B(q)+b \bmod 8$. Имеют место также соответствующие аналоги сформулированных выше сравнений Гудкова–Крахнова–Харламова, Харламова–Марэна и Арнольда.*

Теорема 2 является следствием теоремы (3.B) о кривых с произвольными особенностями из статьи Харламова и Виро [2]. Она приведена здесь, поскольку в обсуждении соответствующего частного случая (4.I), (4.J) теоремы (3.B) в [1] форма $q$ описана неправильно.

**4. Доказательство теоремы 1.** Выберем любые три попарно непересекающихся гнезда глубины $d$ и внутри самого внутреннего овала каждого из них выберем по точке. Теорема 1 вытекает из теоремы 2, примененной к объединению кривой $A$ и трех прямых, соединяющих выбранные точки попарно. Действительно, объединение этих прямых и нестягиваемой ветви кривой $A$ делит $\mathbb{RP}^2$ на 4 треугольника и 3 четырехугольника (криволинейных). Выберем знак многочлена $f$ так, чтобы он был положителен на четырехугольниках и отрицателен на треугольниках. Все овалы, не принадлежащие трем выбранным гнездам, лежат в четырехугольниках (иначе нашлась бы коника, имеющая слишком много общих точек с $A$). Поэтому $\chi(\mathbb{RP}^2_+)=\chi\big(\bigcup\overline{C}_j\big)-p'+n'$, где $p'$ и $n'$ – число четных и нечетных овалов, не принадлежащих трем выбранным гнездам. $B(q)$ несложно вычислить согласно п. 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] A. B. Korchagin // Lecture Notes in Math. 1991. V. 1524. P. 407–426. [**2**] V. M. Kharlamov, O. Ya. Viro // Lecture Notes in Math. 1988. V. 1346. P. 357–406.

ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург,
Уппсальский Университет, Уппсала, Швеция;
МИ им. В. А. Стеклова РАН, Москва,
Университет им. Поля Сабатье, Тулуза, Франция

Принято редколлегией
01.06.2001