НЕПРОЕКТИРУЮЩИЕСЯ ИЗОТОПИИ И УЗЛЫ С ГОМЕОМОРФНЫМИ НАКРЫВАЮЩИМИ

О.Я.Виро

В настоящей работе строятся новые примеры негомеоморфных узлов и зацеплений, обладающих для некоторых r гомеоморфными циклическими r-листными разветвленными накрывающими. Построение этих примеров основано на одной общей конструкции перестройки циклического разветвленного накрытия, не изменяющей ни накрывающего, ни базы. Она довольно проста и не является самой общей; возможно, она и не нова. Однако, с ее помощью удается построить обширный класс неизвестных ранее одномерных примеров и любопытные многомерные примеры, обобщающие зимановские узлы. В частности, удается доказать гомеоморфность двулистных разветвленных накрывающих двух негомеоморфных узлов с одиннадцатью пересечениями и многочленами Александера, равными I, и гомеоморфность циклических разветвленных накрывающих некоторых зимановских узлов.

В первых двух параграфах описываются и обсуждаются все эти примеры, после чего в § 3 излагается основная конструкция и объясняется, как с ее помощью доказать сформулированные ранее результаты. При желании чтение статьи можно начать и с § 3.

Все термины в настоящей статье, относящиеся к топологии многообразий, можно понимать в смысле любой из трех категорий: дифференциальной, кусочно-линейной или топологической. В последних двух случаях термин *подмногообразие* будет означать локально плоское подмногообразие. *Узлом размерности* n будет называться пара (S^{n+2}, K), состоящая из сферы S^{n+2} и ее подмногообразия K, гомеоморфного S^n.

§ I. Одномерные зацепления с гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими

Двулистные разветвленные накрытия сыграли и, возможно, еще сыграют важную роль в решении задач классификации одномерных узлов и зацеплений. Например, Шуберт [9] получил полную топологическую классификацию зацеплений с двумя мостами, доказав, что такие зацепления гомеоморфны, тогда и только тогда, когда их двулистные разветвленные накрывающие гомеоморфны. Строящиеся в этом параграфе примеры негомеоморфных одномерных зацеплений с гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими показывают ограниченность этого метода.

1.1. <u>Результаты, имеющиеся в литературе</u>. В отличие от многомерной ситуации (по поводу которой см., например, следующий параграф), существуют одномерные зацепления, определяемые (с точностью до гомеоморфизма) в классе в с е х одномерных зацеплений топологическими типами своих двулистных разветвленных накрывающих. Например, из теоремы Вальдхаузена [16], утверждающей, что всякая pl -инволюция сферы S^3 с одномерным множеством неподвижных точек сопряжена стандартной, следует, что всякое зацепление, двулистное разветвленное накрывающее которого гомеоморфно S^3, гомеоморфно тривиальному узлу. Аналогично, из результатов Толефсона [11] об инволюциях многообразия $S^1 \times S^2$ следует, что всякое зацепление, двулистное разветвленное накрывающее которого гомеоморфно $S^1 \times S^2$, гомеоморфно тривиальному двухкомпонентному зацеплению.

С другой стороны, в работе автора [15, п.3.7] были указаны негомеоморфные зацепления с гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими. Построение этих зацеплений было основано на двух явлениях. Во-первых, циклическое разветвленное накрывающее связной суммы двух зацеплений гомеоморфно связной сумме циклических разветвленных накрывающих слагаемых; во-вторых, связная сумма связных ориентированных многообразий определяется слагаемыми, тогда как для зацеплений это, вообще говоря, не так. Например, нетривиальный узел и двухкомпонентное зацепление, компоненты которого представляют собой негомеоморфные узлы, можно связно сложить по меньшей мере двумя разными способами - см.рисунок 1.

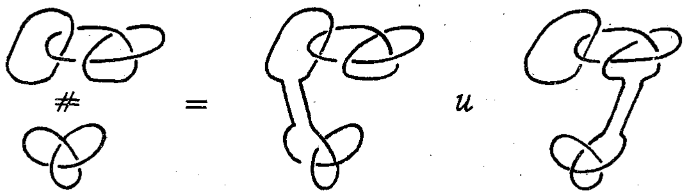

Рис.1.

Получившиеся суммы и являются негомеоморфными зацеплениями, циклические r -листные разветвленные накрывающие которых гомеоморфны для любого r .

Аналогичным образом можно построить и негомеоморфные узлы с гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими. Дело в том, что топологический тип связной суммы **неориентированных** узлов не определяется, вообще говоря, слагаемыми (в отличие от топологического типа связной суммы ориентированных узлов), а двулистное разветвленное накрытие не зависит от ориентации узла. Поэтому связная сумма двух необратимых ориентированных узлов и связная сумма одного из них с переориентированным вторым обладают гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими. Сами эти связные суммы узлов негомеоморфны в силу теоремы единственности разложения ориентированного узла в связную сумму неприводимых ориентированных узлов.

Все зацепления в этих примерах - приводимые с числом мостов $\geqslant$ 4. Поэтому естественно возникает вопрос (ср [15]): существуют ли неприводимые зацепления или зацепления с тремя мостами, не определяющиеся своими двулистными разветвленными накрывающими. Положительный ответ на этот вопрос дается ниже, в п.1.3.

1.2. <u>Хирургия зацеплений, не действующая на двулистные разветвленные накрывающие</u>. Следующая теорема дает обобщение описанного выше метода построения зацеплений с гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими. Мне неизвестны зацепления с гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими, которые нельзя было бы получить таким образом.*)

ТЕОРЕМА 1. Пусть L_1 и L_2 - компактные одномерные подмногообразия шара D^3 ; и пусть их края, ∂L_1 и ∂L_2, совпадают друг с другом и с пересечениями $L_1 \cap \partial D^3$ и $L_2 \cap \partial D^3$, состоят из четырех точек и инвариантны относительно поворота $s: D^3 \to D^3$ шара D^3 на угол 180^0 вокруг некоторой прямой, не пересекающейся с ними. Если (S^3, L) и (S^3, L') - зацепления, гомеоморфные результатам склеивания пары (D^3, L_1) с парой (D^3, L_2) и пары (D^3, L_1) с парой $(D^3, s(L_2))$ посредством тождественного гомеоморфизма $\partial D^3 \to \partial D^3$, то двулистные разветвленные накрывающие зацеплений (S^3, L) и (S^3, L') гомеоморфны.

Зацепления (S^3, L) и (S^3, L'), удовлетворяющие условиям теоремы 1, будем называть **близнецами**.

То, что теорема 1 действительно обобщает предыдущий метод построения, нетрудно понять, взглянув на рисунок 2.

---

*) После того, как эта статья была написана, М.Л.Старцем и автором замечено, что крендельное зацепление $K(2,2,-2,-3)$ (см.п.1.6) и торическое зацепление типа (9,3), не удовлетворяющие условиям теоремы 1, имеют гомеоморфные двулистные разветвленные накрывающие. В отличие от прежних примеров, у этих зацеплений разное число мостов: у первого - 4, а у второго - 3.

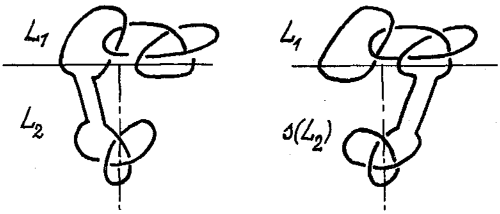

Рис.2.

I.3. Пример негомеоморфных неприводимых узлов с тремя мостами, обладающих гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими. Изображенные на рисунке 3 узлы, удовлетворяют, очевидно,

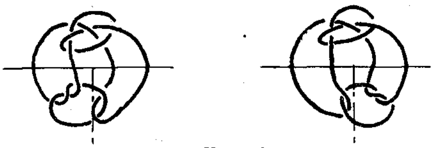

Рис.3.

условиям теоремы I (то есть являются близнецами), и потому их двулистные разветвленные накрывающие гомеоморфны. Левый узел был построен Киноситой и Терасакой [7] , правый был обнаружен Конуэйем [2] при классификации неальтернированных узлов с одиннадцатью пересечениями. Эти два узла замечательны тем, что, как показал Конуэй, они являются единственными узлами с одиннадцатью пересечениями, многочлены Александера которых равны I. Райли [8] доказал, что эти узлы негомеоморфны.

I.4. Удвоения связных сумм необратимых узлов. Другой класс примеров, которые могут быть получены применением конструкции теоремы I, описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. Если K_1 и K_2 - ориентированные необратимые одномерные узлы и K_2' - переориентированный узел K_2 , то удвоения с одинаковыми кручениями *) связных сумм $K_1 \# K_2$ и $K_1 \# K_2'$ являются негомеоморфными неприводимыми узлами с гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими.

Очевидно, эти удвоения являются близнецами, и потому их двулистные разветвленные накрывающие гомеоморфны. Негомеоморфность самих этих удвоений следует из того, что по их типам и даже по

*) Определение этой операции можно найти, например, в [3] .

их группам можно восстановить типы узлов $K_1 \# K_2$ и $K_1 \# K_2'$ (см., например, [17]), а последние не совпадают в силу теоремы единственности разложения ориентированного узла в связную сумму неприводимых ориентированных узлов. Наконец, неприводимость удвоений следует из того, что все удвоения имеют род 1.

1.5. <u>Проблема различения узлов-близнецов</u>. Негомеоморфность некоторых зацеплений-близнецов доказывается очень легко. Например, для доказательства негомеоморфности зацеплений, изображенных на рисунке 2, достаточно заметить, что их компоненты заузлены по-разному: слева это два трилистника, а справа это тривиальный узел и бабушкин узел.

Доказать негомеоморфность каких-либо узлов-близнецов, как правило, гораздо труднее. Дело в том, что узлы-близнецы не различаются "классическими" инвариантами теории узлов такими, как многочлены Александера, гомологические группы и формы коэффициентов зацепления конечнолистных циклических разветвленных накрывающих, единицы Минковского и сигнатуры. Действительно, если (S^3, L), (S^3, L') – узлы-близнецы, то на L и L' нетрудно натянуть в S^3 такие ориентированные компактные поверхности F и F' и выбрать такие базисы групп $H_1(F)$ и $H_1(F')$, чтобы матрицы Зейферта S и S' поверхностей F и F' в этих базисах либо совпадали, либо имели вид

$$S' = \begin{pmatrix} A & C & 0 \\ C^T & a & D^T \\ 0 & D & B \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S' = \begin{pmatrix} A & C & 0 \\ C^T & a & D^T \\ 0 & D & B^T \end{pmatrix},$$

где A и B – квадратные матрицы, C и D – матрицы-столбцы, a – число и значок T означает транспонирование. Все перечисленные выше "классические" инварианты узлов вычисляются по матрице Зейферта таким образом, что различие между матрицами S и S' на них не отражается.

Для доказательства негомеоморфности узлов-близнецов можно воспользоваться классами S – эквивалентности матриц Зейферта (см.Троттер [12] , [13]), или гомоморфизмами групп узлов в неабелевы группы и гомологическими инвариантами соответствующих неабелевых накрывающих, неразветвленных и разветвленных (см., например, Райли [8] , где последним способом была доказана негомеоморфность узлов, изображенных на рисунке 3). Применение этих инвариантов обычно связано с громоздкими вычислениями.

Разумеется, узлы-близнецы могут быть гомеоморфными. Так будет, например, если для i = 1 или 2 существует гомеоморфизм $(\mathbb{D}^3, L_i) \longrightarrow (\mathbb{D}^3, s(L_i))$, тождественный на $\partial \mathbb{D}^3$. Нетрудно доказать, что если пара $(\mathbb{D}^3, L_i)$ тривиальна (то есть, если L_i состоит из двух дуг, ограничивающих вместе с двумя расположенными в $\partial \mathbb{D}^3$ дугами два непересекающихся диска в $\mathbb{D}^3$), то такой гомеоморфизм существует. Однако, как показывает пример, изображенный на рисунке 4, отсутствие таких гомеоморфизмов недостаточно для негомеоморфности узлов-близнецов.

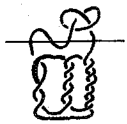

Рис.4.

1.6. <u>Обобщенные крендельные зацепления</u>. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – целые числа. О б о б щ е н н ы м   к р е н д е л ь н ы м   з а ц е п л е н и е м $K(p_1, \ldots, p_n)$ будем, следуя Троттеру [13], называть зацепление, образованное краем поверхности $F(p_1, \ldots, p_n)$, состоящей из двух горизонтальных дисков, расположенных друг над другом как основания вертикального цилиндра, и из соединяющих эти диски n закрученных, но не заузленных вертикальных полосок, из которых i-ая по порядку примыкания к дискам закручена на $|p_i|$ полуоборотов, правых или левых в зависимости от знака p_i. На рисунке 5 показан обобщенный крендельный узел $K(7,-5,3,-5,3)$.

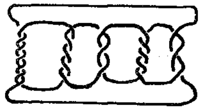

Рис.5.

ТЕОРЕМА 3. Топологический тип двулистного разветвленного накрывающего обобщенного крендельного зацепления $K(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ не зависит от порядка чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Действительно, перестановку двух расположенных рядом полосок поверхности $F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ можно осуществить при помощи конструкции теоремы 1. Для этого нужно повернуть на 180° вокруг горизонтальной оси шар, пересекающийся с поверхностью $F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ по этим полоскам и прилегающим к ним частям горизонтальных дисков.

Изображенные на рисунке 2 зацепления гомеоморфны обобщенным крендельным зацеплениям $K(3,-2,3,0)$ и $K(3,3,-2,0)$, показанным на рисунке 6. Вероятно, при помощи техники, развитой Троттером [12], [13], можно доказать, что и среди обобщенных крендельных у з л о в имеются негомеоморфные близнецы

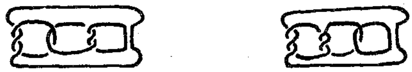

Рис.6.

1.7. Близнецы узлов Киноситы-Терасаки. Узел, изображенный на рисунке 3 слева – это простейший в бесконечной серии узлов с тремя мостами и с единичными многочленами Александера, построенной Киноситой и Терасакой [7]. Конструкцию теоремы 1 можно применить к каждому из узлов этой серии, в результате чего получится новая серия узлов с теми же свойствами и с теми же двулистными разветвленными накрывающими. Обе эти серии изображены на рисунке 7 : слева – общий вид узла Киноситы-Терасаки, справа – общий вид перестроенного узла. У меня нет доказательства негомеоморфности этих узлов, но я думаю, что они негомеоморфны. По-видимому, при помощи техники, развитой Райли [8], можно доказать, что многие из них негомеоморфны.

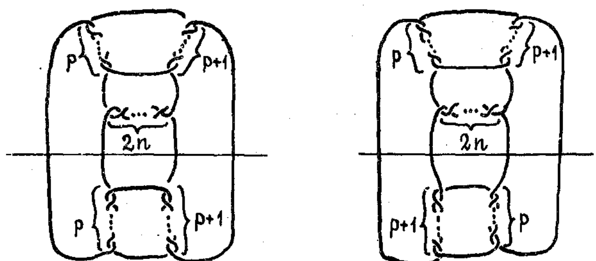

Рис.7.

1.8. Распространенность зацеплений, определяющихся своими двулистными разветвленными накрывающими. Двулистное разветвленное накрывающее любого зацепления (S^3, L), удовлетворяющего условиям теоремы 1, содержит тор – прообраз сферы, вдоль которой склеивались пары (D^3, L_1) и (D^3, L_2). Можно доказать, что если зацепления (S^3, L), (S^3, L') негомеоморфны, то или двулистное разветвленное накрывающее зацепления (S^3, L) приводимо, или этот тор несжимаем. Это обстоятельство делает правдоподобной следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Если ориентированное замкнутое неприводимое трехмерное многообразие, не содержащее несжимаемого тора гомеоморфно двулистным разветвленным накрывающим двух зацеплений, то эти зацепления гомеоморфны.

Из справедливости этой гипотезы следовало бы, в частности, что зацепления с двумя мостами определяются своими двулистными разветвленными накрывающими в классе всех зацеплений.

§ 2. Обобщение зимановского подкручивания и циклические разветвленные накрывающие подкрученных узлов

2.1. Подкручивание. Обозначим через τ_θ поворот сферы S^n вокруг $\mathbb{R}^{n-1}$ на угол θ. Обозначим через Φ гомеоморфизм $S^n\times S^1 \to S^n\times S^1$, определяемый формулой $\Phi(x,e^{i\theta}) = (\tau_\theta(x), e^{i\theta})$.

Пусть M – многообразие размерности $n+2$, и пусть L – его n-мерное подмногообразие. Пусть $f: S^n\times D^2 \to M$ – вложение, трансверсальное к L, и пусть $f^{-1}(L)=S^{n-2}\times D^2$. Обозначим через M_0 многообразие $M\setminus \operatorname{int} f(S^n\times D^2)$, а через L_0 – его подмногообразие $L\setminus \operatorname{int} f(S^{n-2}\times D^2)$.

Пусть q – целое число. Обозначим через $M_{(q)}$ результат приклеивания к многообразию M_0 многообразия $S^n\times D^2$ посредством отображения $(f|_{S^n\times S^1})\circ\Phi^{-q}: S^n\times S^1 \to \partial M_0$; обозначим через $L_{(q)}$ его подмногообразие, получающееся при этом из L и $S^{n-2}\times D^2$. Будем говорить, что пара $(M_{(q)}, L_{(q)})$ получается из (M,L) в результате q - к р а т н о г о п о д к р у ч и в а н и я в д о л ь $f(S^n\times 0)$.

Так как отображение $S^1 \to SO(n+1)$, определяемое формулой $e^{i\theta}\longmapsto \tau_\theta$, представляет образующую группы $\pi_1(SO(n+1))$, изоморфной $\mathbb{Z}_2$ при $n\geqslant 2$, то отображение $\Phi^q: S^n\times S^1 \to S^n\times S^1$ изотопно тождественному при $n\geqslant 2$ и четных q. Отсюда следует, что при $n\geqslant 2$ и четном q многообразие $M_{(q)}$ гомеоморфно M. Многообразие $L_{(q)}$, очевидно, гомеоморфно L при любых n и q.

Если гомеоморфизм $f(S^n\times S^1)\to f(S^n\times S^1)$, определяемый гомеоморфизмом Φ, продолжается до гомеоморфизма $M_0\to M_0$, то многообразия $M_{(q)}$ и M гомеоморфны независимо от того, каковы n и q. Так бывает, например, когда $M=S^{n+2}$ и $f|_{S^n\times 0}$ определяется включением S^n в S^{n+2}.

2.2. Подкручивание и разветвленные накрывающие. Как показывает следующая теорема, подкручивание не изменяет некоторые разветвленные накрывающие.

ТЕОРЕМА 4. Пусть M - многообразие размерности $\geqslant 4$, и пусть L - его подмногообразие коразмерности 2. Если пара (M', L') получается из (M, L) в результате q-кратного подкручивания и если $q \equiv 0 (mod\, 2r)$, то всякое циклическое r-листное разветвленное накрывающее многообразия M с ветвлением над L гомеоморфно некоторому циклическому r-листному разветвленному накрывающему многообразия M' с ветвлением над L'.

Теорема 4 является специальным случаем следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть L - подмногообразие размерности $n \geqslant 2$ многообразия M размерности $n+2$, и пусть $f: S^n \times S^1 \to M$ - вложение с тривиальным нормальным пучком, трансверсальное к L, с $f^{-1}(L) = S^{n-2} \times S^2$. Пусть M' - многообразие, получающееся из M в результате взрезывания вдоль $f(S^n \times S^1)$ и последующего склеивания краев разреза посредством гомеоморфизма, определяемого гомеоморфизмом $\Phi^q: S^n \times S^1 \to S^n \times S^1$. Пусть L' - подмногообразие многообразия M', получающееся из L. Если $q \equiv 0 (mod\, 2r)$, то всякое циклическое r-листное разветвленное накрывающее многообразия M с ветвлением над L гомеоморфно некоторому циклическому r-листному разветвленному накрывающему многообразия M' с ветвлением над L'.

Размерностное ограничение в теоремах 4 и 5 неустранимо. Действительно, торический узел типа $(2q+2, 2)$ получается из торического узла типа $(1, 2)$ - то есть из тривиального узла - q-кратным подкручиванием; все циклические разветвленные накрывающие тривиального узла гомеоморфны S^3, тогда как r-листное циклическое разветвленное накрывающее торического узла типа $(2q+1, 2)$ является многообразием Брискорна $M(2q+1, 2, r)$ и негомеоморфно сфере при $q > 0$ и $r > 1$, см., например, [6].

2.3. <u>Конструкции Артина и Зимана и подкручивание</u>. В 1926 году Артин [1] предложил конструкцию, которая по каждому $(n-1)$-мерному узлу строит узел размерности n. Если $(n-1)$-мерный узел $K = (S^{n+1}, k)$ гомеоморфен результату склеивания стандартной пары (D^{n+1}, D^{n-1}) с парой (D^{n+1}, ℓ) посредством тождественного гомеоморфизма $\partial D^{n+1} \to \partial D^{n+1}$, то конструкция Артина ставит в соответствие узлу K узел размерности n, гомеоморфный результату склеивания пары $(D^{n+1} \times S^1, \ell \times S^1)$ с парой

$(S^n \times D^2, S^{n-2} \times D^2)$ посредством тождественного гомеоморфизма $S^n \times S^1 \to S^n \times S^1$. Этот n-мерный узел будем называть **о б о р о т о м** узла K.

В 1965 году Зиман [18] обобщил конструкцию Артина, предложив конструкцию, которая по каждому целому числу и каждому $(n-1)$-мерному узлу строит узел размерности n. Это обобщение сводится к тому, что пара $(D^{n+1} \times S^1, \ell \times S^1)$ приклеивается к $(S^n \times D^2, S^{n-2} \times D^2)$ не посредством тождественного гомеоморфизма, как это было в конструкции Артина, посредством итераций гомеоморфизма Φ, ср. Джиффен [4, стр.189]. Для обозначения узла, гомеоморфного результату приклеивания пары $(D^{n+1} \times S^1, \ell \times S^1)$ к $(S^n \times D^2, S^{n-2} \times D^2)$ посредством гомеоморфизма $\Phi^q: S^n \times S^1 \to S^n \times S^1$. Зиман использовал термин q-twist spun K. Ясно, что этот узел получается из оборота узла K в результате q-кратного подкручивания вдоль $S^n \times 0$. Будем называть его **q - п о д к р у ч е н н ы м о б о р о т о м** узла K и обозначать символом $Z(q, K)$.

Ясно, что $Z(0, K)$ - это оборот узла K, и что узел $Z(\tilde{p}+q, K)$ можно получить из $Z(p, K)$ в результате q-кратного подкручивания.

2.4. <u>Циклические разветвленные накрывающие подкрученных оборотов узла</u>. Следующая теорема представляет собой специальный случай теоремы 4.

ТЕОРЕМА 6. Если K - узел размерности $n \geq 1$ и если r - натуральное число и p, q - целые числа с $p \equiv \pm q \pmod{2r}$, то циклические r-листные разветвленные накрывающие узлов $Z(p, K)$ и $Z(q, K)$ гомеоморфны.

Эта теорема дает, в частности, новые примеры нестандартных действий циклической группы любого порядка в сфере любой размерности ≥ 4 с заузленными множествами неподвижных точек, то есть новые контрпримеры к обобщенной гипотезе Смита.

Действительно, поскольку для любого узла K узлы $Z(\pm 1, K)$ тривиальны (см.Зиман [18]), из теоремы 6 следует, что для любого узла K и для любых натуральных q, r с $q \equiv \pm \pmod{2r}$ циклическое r-листное разветвленное накрывающее q-подкрученного оборота узла K гомеоморфно сфере. Действия групп автоморфизмов этих разветвленных накрытий и являются при подходящем выборе K контрпримерами к обобщенной гипотезе Смита.

Многомерные нетривиальные узлы с циклическими разветвленными накрывающими, гомеоморфными сфере, строились и изучались с целью построения контрпримеров к обобщенной гипотезе Смита; см. работы Джиффена [4], Виноградова и Кушельмана [14], Гордона [5] и Самнерса [10]. Поскольку циклические разветвленные накрытия подкрученных оборотов узлов изучались с этой целью Джиффеном [4], интересно сравнить теорему 6 с его результатами.

ТЕОРЕМА ДЖИФФЕНА [4; 3.1, 3.2, 3.4]. Пусть K – узел размерности $\geqslant 1$, и пусть r, s, q – натуральные числа. Если $r \equiv \pm s (\mathrm{mod}\, q)$, то r-листное и s-листное циклические разветвленные накрывающие узла $Z(q, K)$ имеют изоморфные фундаментальные группы и гомологические группы. Если $r \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, q)$, то r-листное циклическое разветвленное накрывающее узла $Z(q, K)$ является гомотопической сферой. Если $r \equiv \pm s (\mathrm{mod}\, 2q)$, то r-листное и s-листное циклические разветвленные накрывающие узла $Z(q, K)$ гомеоморфны.

Из этой теоремы и теоремы 6 легко вывести, что если K – узел и q, r – натуральные числа с наибольшим общим делителем s, то циклическое r-листное разветвленное накрывающее узла $Z(q, K)$ гомеоморфно либо циклическому s-листному разветвленному накрывающему узла $Z(0, K)$, либо s или $2s$-листному циклическому разветвленному накрывающему узла $Z(s, K)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Непосредственно из теоремы Зимана [18] при помощи рассуждений, близких к рассуждениям Джиффена [4], но учитывающих связи между различными циклическими разветвленными накрытиями исходного узла, можно вывести, что для любого узла K размерности n и для любых натуральных чисел q, r с наибольшим общим делителем s фундаментальная группа и гомологические группы размерностей $\leqslant n$ циклического r-листного разветвленного накрывающего узла $Z(q, K)$ и циклического s-листного разветвленного накрывающего узла K изоморфны. Я не знаю, существует ли такой узел K и такие натуральные числа q_1, q_2, r_1, r_2, что наибольший общий делитель чисел q_1, r_1 равен наибольшему общему делителю чисел q_2, r_2, а циклическое r_1-листное разветвленное накрывающее узла $Z(q_1, K)$ негомеоморфно циклическому r_2-листному разветвленному накрывающему узла $Z(q_2, K)$.

§ 3. Основная конструкция

3.1. Исходные данные. Пусть $p: N \to M$ – циклическое

r -листное разветвленное накрытие многообразия M с ветвлением над подмногообразием L. Пусть Q – подмногообразие коразмерности один многообразия M с тривиальным нормальным пучком, трансверсальное подмногообразию L; пусть $P = Q \cap L$ и $R = p^{-1}(Q)$, и пусть $\rho: R \to Q$ – сужение разветвленного накрытия $p: N \to M$.

Пусть $\mu: Q \to Q$ – гомеоморфизм с $\mu(P) = P$, и пусть $\nu: R \to R$ – гомеоморфизм, накрывающий μ.

3.2. <u>Хирургия разветвленного накрытия</u>. Пусть L_0, M_0 и N_0 – многообразия, получающиеся из L, M и N в результате взрезывания по P, Q и R. Пусть $p_0: N_0 \to M_0$ – циклическое r -листное разветвленное накрытие с ветвлением над L_0, определяемое разветвленным накрытием $p: N \to M$. Пусть Q_1, Q_2 – возникшие при взрезывании части края ∂M_0, гомеоморфные Q; и пусть $P_i = Q_i \cap L_0$ и $R_i = p_0^{-1}(Q_i)$ для $i = 1, 2$.

Пусть L', M' и N' – многообразия, получающиеся из L_0, M_0 и N_0 в результате склеивания P_1 с P_2, Q_1, с Q_2 и R_1 с R_2 посредством гомеоморфизмов $P_1 \to P_2$, $Q_1 \to Q_2$ и $R_1 \to R_2$, определяемых гомеоморфизмами μ и ν. Пусть $p': N' \to M'$ – циклическое r -листное разветвленное накрытие с ветвлением над L', определяемое разветвленным накрытием $p_0: N_0 \to M_0$.

3.3. <u>Условия неизменности базы, накрывающего и расположения подмногообразия ветвления в базе.</u> Имеют место следующие очевидные утверждения.

A. Если гомеоморфизм $\mu: Q \to Q$ изотопен тождественному, то многообразие M' гомеоморфно M.

B. Если гомеоморфизм $\nu: R \to R$ изотопен тождественному, то многообразие N' гомеоморфно N.

C. Если гомеоморфизм $\mu: (Q, P) \to (Q, P)$ изотопен тождественному, то пара (M', L') гомеоморфна (M, L).

3.4. <u>Вывод основных теорем</u>. Основные теоремы первых двух параграфов выводятся из утверждения B.

Для вывода теоремы 4 нужно в качестве $\rho: R \to Q$ взять циклическое r -листное разветвленное накрытие $S^n \times S^1 \to S^n \times S^1$ с ветвлением над $S^{n-2} \times S^1$, являющееся декартовым произведением стандартного r -листного разветвленного накрытия $S^n \to S^n$ с ветвлением над S^{n-2} и тождественного отображения $S^1 \to S^1$, а в качестве μ и ν взять $\Phi^q: S^n \times S^1 \to S^n \times S^1$ и $\Phi^{q/r}: S^n \times S^1 \to S^n \times S^1$. Поскольку $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2r)$, показатель q/r четный. Но, как известно, гомеоморфизм Φ^2 изотопен тождественному. Следовательно, гомеоморфизм $\Phi^{q/r}$ изотопен тождественному, то есть выполнено условие утверждения В.

Для вывода теоремы I нужно в качестве $\rho: R \to Q$ взять двулистное разветвленное накрытие $\pi: T \to S^2$ сферы $S^2 = \partial D^3$ с ветвлением над $\partial L_1 = \partial L_2$, а в качестве $\mu: Q \to Q$ взять сужение $\sigma: S^2 \to S^2$ гомеоморфизма $s: D^3 \to D^3$. Гомеоморфизм σ накрывается двумя гомеоморфизмами, отличающимися друг от друга на автоморфизм разветвленного накрытия π. Один из этих гомеоморфизмов изотопен тождественному. Его и нужно взять в качестве ν.

Заметим, что теорема I допускает следующее обобщение, доказывающееся так же.

ТЕОРЕМА 7. Пусть L – одномерное подмногообразие трехмерного многообразия M, пусть $f: S^2 \to M$ – вложение с тривиальным нормальным пучком, трансверсальное к L, и пусть прообраз $f^{-1}(L)$ состоит из четырех точек и инвариантен относительно поворота $\sigma: S^2 \to S^2$ сферы S^2 на угол 180° вокруг некоторой оси, не пересекающейся с $f^{-1}(L)$. Пусть M' – многообразие, получающееся из M в результате взрезывания вдоль $f(S^2)$ и последующего склеивания краев разреза посредством гомеоморфизма, определяемого гомеоморфизмом σ. Пусть L' – подмногообразие многообразия M', получающееся из L. Тогда всякое двулистное разветвленное накрывающее многообразие M с ветвлением над L гомеоморфно некоторому двулистному разветвленному накрывающему многообразия M' с ветвлением над L'.

3.5. <u>Другие непроектирующиеся изотопии</u>. Другие разветвленные накрытия $\rho: R \to Q$ и гомеоморфизмы $\mu: Q \to Q$ и $\nu: R \to R$ с $\rho \circ \nu = \mu \circ \rho$, удовлетворяющие условиям утверждений А и В и не удовлетворяющие условию утверждения С, могут привести к построению других примеров негомеоморфных зацеплений с гомеоморфными накрывающими. Вероятно, такие наборы $\rho: R \to Q$, μ, ν – довольно распространенное явление при $\dim Q > 2$, хотя и совсем неизученное.

Случай $\dim Q = 2$, напротив, полностью изучен, но в этом случае, как правило, изотопность гомеоморфизмов $\nu, id_R: R \to R$ (то есть выполнение условия утверждения В) влечет изотопность гомеоморфизмов $\mu, id_{(Q,P)}: (Q,P) \to (Q,P)$ (то есть выполнение условия утверждения С) – см., например, Цишанг [19]. Список исключений из этого правила имеется в работе Цишанга [19, стр.16-17]. Из них для построения негомеоморфных зацеплений с гомеоморфными накрывающими пригодно только первое (которое и было использовано в настоящей работе), поскольку в остальных или $\partial Q \neq \emptyset$, или подмногообразие ветвления состоит из нечетного числа точек. Исключения последнего типа (случаи (в),(с) и (d) в таблице Цишанга [19, стр.16-17]) можно использовать для построения негомеоморфных зацеплений в $S^1 \times S^2$ (или в связных суммах многообразия $S^1 \times S^2$ с другими трехмерными многообразиями) с гомеоморфными трилистными, четырехлистными или шестилистными разветвленными накрывающими.

Таким образом, основная конструкция настоящей работы не может дать негомеоморфных одномерных зацеплений с гомеоморфными циклическими разветвленными накрывающими кратности> 2. Построенные в [15, п.3.7] и в пункте 1.1 настоящей работы примеры таких зацеплений не укладываются в ее схему. Открытым остается вопрос, существуют ли негомеоморфные неприводимые одномерные узлы с гомеоморфными циклическими r -листными разветвленными накрывающими для какого-либо $r \geqslant 3$.

Литература

1. Artin E., Zur Isotopie zweidimensionalen Flachen im R^4. - Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 1926, 4, N 1/2, p.174-177.
2. Conway J.H., An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. - Computational problems in abstract algebra, Pergamon Press, N.Y., 1970, p.329-358.
3. Fox R.H. A quick trip through knot theory. - Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice-Hall, Englewood cliffs, N.J., 1962, p. 120-167.
4. Giffen C.H., The generalized Smith conjecture. - Amer. J.Math., 1966, 88, N 1, p.187-198.
5. Gordon C.McA., On the higher-dimensional Smith conjecture. -- Proc.London Math.Soc., 1974, 29, N 1, p.98-110.
6. Milnor J., On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p,q,r)$. - Ann.Math.Stud., 1975, 84, p.175-225.
7. Kinoshita S., Terasaka H., On unions of knots. - Osaka Math.J., 1957, 9, p.131-153.
8. Riley R. Homomorphisms of knot groups on finite groups. - Math.comput, 1971, 25, N 115, p.603-619.

9. S c h u b e r t H. Knoten mit zwei Brücken. - Math.Z., 1956, 65, N 2, p.133-170.

10. S u m n e r s D.W., Smooth $\mathbb{Z}_p$ -actions on spheres which leave knots pointwise fixed. - Trans.Amer.Math.Soc., 1975, 205, p.193-205.

11. T o l l e f s o n J.L., Involutions on $S^1 \times S^2$ and other 3-manifolds. - Trans.Amer.Math.Soc., 1973, 183, p.139-153.

12. T r o t t e r H.F. On S-equivalence of Seifert matrices. - Invent.math. 1973, 20, N 3, p.173-207.

13. T r o t t e r H.F. Some knots spanned by more than one unknotted surface of minimal genus. - Ann.Math.Stud., 1975, 84, p.51-62.

14. В и н о г р а д о в А.М., К у ш е л ь м а н М.С., Обобщенная гипотеза Смита в размерности четыре. - Сиб.мат.ж., 1972, 13, № 1, с.52-62.

15. В и р о О.Я., Зацепления, двулистные разветвленные накрытия и косы. - Мат.сб., 1972, 87, № 2, с.216-228.

16. W a l d h a u s e n F. Über Involutionen der 3-sphare.-Topology, 1969, 8, N 1 p.81-92.

17. W h i t t e n W. Algebraic and geometric characterizations of knots. - Invent.Math., 1974, 26, N 4, p.259-270.

18. Z e e m a n E.C. Twisting spun knots. - Trans.Amer.Math. Soc., 1965, 115, p.471-495.

19. Z i e s c h a n g H. On the homeotopy groups of surfaces. - Math.Ann., 1973, 206, N 1, p.1-21.

Viro O.Ja. Non-projecting isotopies and knots with homeomorphic coverings.

In the work new examples of non-homeomorphic knots and links with homeomorphic, for some r , cyclic r-sheeted branched coverings are constructed. In particular it is proved that the two non-homeomorphic knots with eleven crossings and unit Alexander polynomials have homeomorphic 2-sheeted branched coverings and that, for any knot K , knots p-twis spun K and q-twist spun K have homeomorphic cyclic r-sheeted branched coverings if $p = \pm q \pmod{2r}$. Construction of the examples is based on reglueing of a link along a submanifold of codimension 1 by a homeomorphism which is covered by homeomorphisms isotopic to the identity by non-projecting isotopies only.