ГИПОТЕЗА ВОЛОДИНА—КУЗНЕЦОВА—ФОМЕНКО О ДИАГРАММАХ ХЕГОРА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЫ НЕ ВЕРНА

О. Я. Виро, В. Л. Кобельский

1. Недавно в УМН была опубликована статья И. А. Володина, В. Е. Кузнецова и А. Т. Фоменко [2], в которой был предложен способ упрощения диаграмм Хегора [1]) трехмерных многообразий и высказана гипотеза, что в результате применения этого способа к любой диаграмме Хегора трехмерной сферы получается ее стандартная диаграмма. В той же статье сообщалось об эксперименте по проверке этой гипотезы, осуществленном на ЭВМ БЭСМ -6 и не приведшем к ее опровержению, хотя были испытаны 10^6 диаграмм Хегора трехмерной сферы, род которых менялся от 2 до 32, а число пересечений — от 3 до 16 000.

В настоящей заметке указывается нестандартная диаграмма Хегора трехмерной сферы, неупрощаемая способом Володина — Кузнецова — Фоменко. Это — диаграмма рода три с девятью пересечениями, изображенная на рисунке 1.

В ее построении решающую роль сыграла известная связь между диаграммами зацеплений и диаграммами Хегора их двулистных разветвленных накрывающих, см., например, [1]. Эта связь позволяет строить диаграммы Хегора трехмерной сферы по диаграммам тривиального узла. С другой стороны, по диаграмме узла легко понять, можно ли упростить соответствующую диаграмму Хегора его двулистного разветвленного накрывающего способом Володина — Кузнецова — Фоменко. Тем же методом легко построить и другие контрпримеры к гипотезе Володина — Кузнецова — Фоменко, составляющие, как нам кажется, значительную часть диаграмм Хегора трехмерной сферы.

Мы глубоко признательны М. Л. Старцу за стимулирующие обсуждения.

2. *Изображенная на рис.* 1 *диаграмма Хегора* (Φ, α, β), *где*

$$\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \text{ и } \beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3,$$

не упрощается способом Володина — Кузнецова — Фоменко. Проследить за этим легче по рис. 2, на котором показан результат разрезания этой диаграммы по кривым β_1, β_2, β_3.

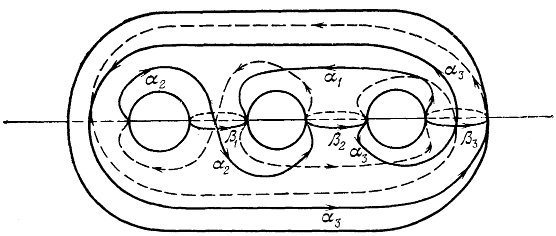

Рис. 1.

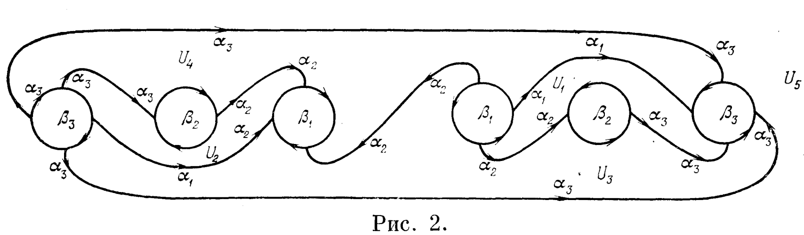

Рис. 2.

По нему хорошо видно, что $\Phi \setminus (\alpha \cup \beta)$ состоит из пяти компонент — $U_1, \ldots, U_5$ — и что ни одна из них не является отмеченной в смысле определения 1.4.1 статьи [2]. Для того же, чтобы алгоритм Володина — Кузнецова — Фоменко упростил диаграмму (Φ, α, β), необходимо, чтобы одна из них была отмеченной (см. [2], § 2).

[1]) называемых в [2] сетями.

3. *Определяемое диаграммой Хегора* (Φ, α, β) *трехмерное многообразие X гомеоморфно сфере* S^3.

Прежде чем доказывать это, заметим, что, вычислив непосредственно по (Φ, α, β) группу $\pi_1(X)$, читатель без труда может доказать ее тривиальность, т. е. доказать, что либо X гомеоморфно S^3, либо является контрпримером к гипотезе Пуанкаре.

Для того чтобы доказать, что многообразие X гомеоморфно S^3, докажем, что оно гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему тривиального узла.

Каждый меридиан диаграммы (Φ, α, β) при симметрии относительно прямой l (см. рис. 1) — переходит в себя с обращением ориентации. Фактор-пространство F поверхности Φ по этой симметрии гомеоморфно сфере S^2, проекция $\Phi \to F$ является двулистным разветвленным накрытием, а образами меридианов при этой проекции являются дуги, соединяющие точки ветвления. Расположение этих дуг показано на рис. 3.

В силу теоремы 4.5 статьи [1] многообразие X гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему трехмерной сферы с ветвлением над зацеплением, определяемым этими дугами. Последние составляют часть диаграммы (DS-диаграмму — см. [1], п. 3.5)

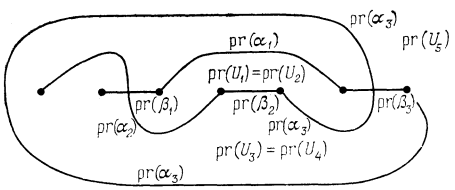

Рис. 3.

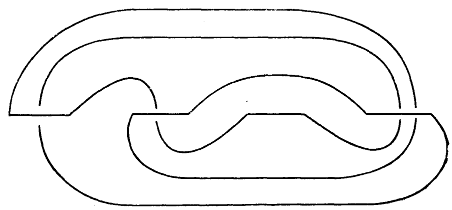

Рис. 4.

этого зацепления, получающуюся из диаграммы в результате выбрасывания одного перехода и одного прохода. На рис. 4 показана диаграмма зацепления, восстановленная по этой части. Очевидно, это зацепление гомеоморфно тривиальному узлу. Следовательно, X гомеоморфно S^3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Я. Виро, Двулистные разветвленные накрытия трехмерной сферы, Зап. научн. семинаров ЛОМИ 36 (1973), 6—39.

[2] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко, О проблеме алгоритмического распознавания трехмерной сферы, УМН 29:5 (1974), 71—168.

Поступило в Правление общества 16 января 1976 г.