Capítulo 3

Bases

Durante[1] o Capítulo 3 denotamos de E um espaço vetorial

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Bases de um espaço vetorial E sao subconjuntos LI as quais geram E no sentido que todo vetor de E pode ser escrito como combinação linear (CL) de elementos da base. Os coeficientes escalares na CL são únicos (propriedade LI) e chamados de coordenadas de um vetor em respeito à base. Quando E admite uma base finita de n elementos chama-se n a dimensão de E. Se escolhemos uma outra base, recebemos uma outra dimensão? Veremos na Seção 3.1.2 que não: Se E admite uma base finita todas as bases tem o mesmo número de elementos.

Então bases são LI, contem suficientemente muitos elementos para que todo vetor pode ser escrito como CL deles, e na dimensão finita bases ainda são conjuntos máximos no sentido que adicionando mais um outro vetor só já recebe-se um conjunto LD.

Definição 3.0.8 (Base)**.** Para um subconjunto $\mathcal{B}$ de E definimos

$$\mathcal{B} \textbf{ base de } E \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ gera } E \\ \mathcal{B} \text{ é LI} \end{cases} .$$

O número de elementos de $\mathcal{B}$ pode ser finito ou infinito. Uma **base ordenada** é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ cujos elementos são enumerados. Equivalentemente podemos escrever uma base ordenada na forma de uma lista ordenada $(\xi_1, \xi_2, \dots)$, finita ou infinita.

A observação chave é essa: Se uma base $\mathcal{B}$ de um espaço vetorial contem exatamente m elementos, então todas as bases contêm exatamente m elementos. Isso será o conteúdo da Proposição 3.1.12. Vamos aproveitar do resultado já:

[1] Cap. 3 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 14 de março de 2024

Definição 3.0.9 (Dimensão)**.** Se um espaço vetorial E admite uma base finita, dizemos $\mathcal{B}$, então o número dos elementos é dito a **dimensão de E**, em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|.$$

Se E não admite uma base finita, então dizemos que E é de **dimensão infinita** e escrevemos $\dim E = \infty$.

Comentário 3.0.10 (Dimensão do espaço vetorial trivial)**.** O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial trivial $E = \{\mathcal{O}\}$, Exemplo 1.3.4, assim $\dim\{\mathcal{O}\} = 0$.

Exemplo 3.0.11. Sejam $u = (1, 1)$ e $v = (2, 0)$. Os conjuntos $\{e_1, u\}$ e $\{u, v\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$. Ambos conjuntos são LI segundo Exercício 1.3.8 3. (os elementos não são múltiplos um do outro, veja Teorema 3.1.1) e por isso geram $\mathbb{R}^2$ (Lema C.2.1). Um exemplo para LD é o conjunto $\{e_1, v\}$, no qual um elemento é múltiplo do outro.

Exercício 3.0.12 (Para soma direta a união de bases é base)**.** Seja $E = F_1 \oplus F_2$.
a) Mostre que uma união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de bases de F_1 e F_2 é uma base de E.

[Dica: a) União LI – ideia de (C.2.1).]

Exemplo 3.0.13 (Bases canônicas e dimensões)**.** Análogo para corpos gerais $\mathbb{K}$.

a) **Listas.** A base canônica $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$ e assim

$$\dim \mathbb{R}^n := |\mathcal{E}^n| = n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Caso $n \geq 1$: Exercício 1.3.8 confirma LI, Exercício 2.2.6 diz que gera $\mathbb{R}^n$. Caso $n = 0$: Note que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ é o espaço vetorial trivial. O conjunto vazio $\mathcal{E}^0 = \emptyset$ é LI (Comentário 1.3.4) e gera o espaço trivial (Definição 2.2.1).

b) **Sequências.** A base canônica $\mathcal{E}^\infty := \bigcup_{j=1}^\infty \{e_j\}$ é base de $\mathbb{R}^\infty_0$ e assim

$$\dim \mathbb{R}^\infty_0 := |\mathcal{E}^\infty| = \infty.$$

Base de $\mathbb{R}^\infty_0$, não de $\mathbb{R}^\infty$: O conjunto $\mathcal{E}^\infty$ é LI em $\mathbb{R}^\infty_0$ e em $\mathbb{R}^\infty$ (Exercício 1.3.8). Mas enquanto $\mathcal{E}^\infty$ gera $\mathbb{R}^\infty_0$, não gera $\mathbb{R}^\infty$, veja Exemplo 2.2.6.

Ainda que não temos na mão uma base de $\mathbb{R}^\infty$ no Lema 3.1.16 mostramos

$$\dim \mathbb{R}^\infty = \infty.$$

Isso é baseado no fato que $\mathbb{R}^\infty$ possui um subespaço de dimensão infinita.

c) **Matrizes.** Seja $\mathbf{e^{ij}} \in \mathrm{M}(m \times n)$ a matriz com todas entradas nulas exceto a ij-ésima entrada a qual é $(\mathbf{e^{ij}})_{ij} = 1$. A base canônica de $\mathrm{M}(m \times n)$ é

$$\mathcal{E}^{m\times n} := \{\mathbf{e^{ij}} \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathrm{M}(m \times n).$$

Como a base canônica tem $|\mathcal{E}^{m\times n}| = mn$ elementos obtemos

$$\dim \mathrm{M}(m \times n) = mn.$$

d) **Polinômios reais.** Base canônica de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ – os monômios $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

Gerando: Por definição de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. LI: **Versão 1.** Para uma prova elementar baseada no determinante só veja Teorema B.1.2. **Versão 2.** Vamos usar que um polinômio sobre um corpo infinito, por exemplo $\mathbb{R}$, e de grau n tem no máximo n raízes. Uma CL p de monômios representando a função nula é um polinômio com um numero infinito de raízes. Assim todos coeficientes devem se anular.

Analogamente $\{1, x, \dots, x^n\}$ é uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Consequentemente

$$\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty, \qquad \dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.0.1}$$

e) **Hiperplanos.** Dado uma lista $\alpha \in \mathbb{R}^n$ com $\alpha_n \neq 0$, o hiperplano

$$\mathrm{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

tem como base o conjunto $\mathcal{B}_\alpha := \{\xi_1, \dots \xi_{n-1}\}$ no qual a lista

$$\xi_i := \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\tfrac{\alpha_i}{\alpha_n}\right) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n-1$$

tem todos membros nulos exceto o i-ésimo e o último. É óbvio que $\mathcal{B}_\alpha$ é LI, que gera $\mathbb{R}^n$ podemos ver assim: Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\begin{aligned}
&x \in \mathrm{H}_\alpha \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \\
\Leftrightarrow\quad & x_n = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \cdots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \cdots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^n \\
\Leftrightarrow\quad & x = x_1 \xi_1 + \cdots + x_{n-1} \xi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\dim \mathrm{H}_\alpha = n - 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \neq \mathcal{O}$$

Note que $\dim \mathrm{H}_{\mathcal{O}} = n$.

A parte **hiper** em hiperplano refere-se ao fato do que na dimensão falta 1 para a dimensão do espaço vetorial ambiente, no caso presente $\mathrm{H}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$.

Comentário 3.0.14 (Corpo geral $\mathbb{K}$)**.** Todas afirmações no Exemplo 3.0.13 ficam verdadeiro se em vez do corpo $\mathbb{R}$ usa-se um corpo geral $\mathbb{K}$ – exceto a parte d) sobre polinômios a qual fica valida para *corpos infinitos*; veja Apêndice B.

Exercício 3.0.15 (Produto cartesiano)**.** Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e seja F um espaço vetorial de dimensão m. Mostre que o produto cartesiano $F^{\times n}$, veja (1.1.2), é um espaço vetorial sob as operações de adição e multiplicação escalar, ambas componente-por-componente, e que $\dim F^{\times n} = mn$.

[Dica: Dimensão – escolha uma base de F e use para definir uma base de $F^{\times n}$.]

3.1 Aplicações

3.1.1 Coordenadas de um vetor

Teorema 3.1.1. *Seja $X \subset E$ um subconjunto tal que $|X| \geq 2$. Então*

a) *X é LI $\Leftrightarrow$ nenhum elemento de X é CL de outros elementos de X.*

b) *X é LD $\Leftrightarrow$ existe um elemento de X que é CL de outros elementos de X.*

Demonstração. a) '$\Rightarrow$' Seja X LI, suponha por absurdo que um elemento $u \in X$ fosse CL $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ de outros elementos v_j (tem outros como $|X| \geq 2$). Adicionando $-u$ em ambos lados obtemos $\mathcal{O} = (-1)u + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. Como $-1 \neq 0$ trata-se de uma CL não-trivial em X representando o vetor nulo. Assim X é LD. Contradição.
'$\Leftarrow$' Suponha por absurdo X fosse LD. Então existe uma CL não-trivial em X

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$$

representando o vetor nulo. Pelo menos um dos α_i é não-nulo. Renomeando podemos supor $\alpha_1 \neq 0$. Caso $k = 1$. Então $\alpha_1 v_1 = \mathcal{O}$ e assim $v_1 = \alpha_1^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Contradição. Caso $k \geq 2$. Então $v_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_1^{-1}\alpha_k v_k$ é CL de outros elementos de X. Contradição. b) é equivalente à parte a). $\square$

Corolário 3.1.2 (Unicidade dos coeficientes de CL's em conjuntos LI)**.** *Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ um subconjunto LI de E, então*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k.$$

Em palavras, se duas CL's num conjunto LI representam o mesmo vetor, então os coeficientes escalares coincidem.

Demonstração. $\alpha_1 - \beta_1 = 0$: Suponha por absurdo $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$. Então o vetor

$$v_1 = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1}\left((\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k\right)$$

é CL de outros elementos. Contradição (Teorema 3.1.1 a)). Análogo para os outros $\alpha_j - \beta_j$. Outro argumento (usando LI): Suponha $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = \mathcal{O}$. LI diz que todos coeficientes são nulos. $\square$

Lema 3.1.3.

a) Um subconjunto Y de um conjunto LI X é LI. (Subconjuntos herdam LI)

b) Um conjunto X contendo um Y LD é LD. (Superconjuntos herdam LD)

c) Um subconjunto LI X num subespaço $F \subset E$, também é LI em E. (LI transfere-se para superespaços)

Demonstração. a) Como X é LI, toda CL em X representando $\mathcal{O}$ tem todos coeficientes nulos. Como $Y \subset X$, toda tal CL em Y é uma em X e assim tem todos coeficientes nulos. b) Como $Y \subset X$, uma CL não-trivial em Y representando $\mathcal{O}$ é uma tal em X. c) Isso resta no fato que o vetor nulo de um subespaço é o vetor nulo do espaço vetorial ambiente, veja Exercício 2.1.3. $\square$

Comentário 3.1.4 (Consequências das duas propriedades de ser base $\mathcal{B}$ de E)**.**
$\langle B\rangle = E$: Assim todo $v \in E$ pode ser escrito como CL em $\mathcal{B}$, com efeito

$$v = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_k\xi_k \tag{3.1.1}$$

para escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e vetores $\xi_j \in \mathcal{B}$ da base.
$\mathcal{B}$ é LI: Assim os coeficientes α_j em cima são únicos (Corolário 3.1.2).

> *Todo vetor $v \in E$ admite coordenadas únicas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ em respeito a uma base ordenada $\mathcal{B}$ de E.*

Definição 3.1.5 (Coordenadas)**.** Suponha $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ é uma base ordenada de um espaco vetorial E. As **coordenadas** de um vetor $v \in E$ em respeito à base $\mathcal{B}$ são os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em (3.1.1). A matriz coluna $n \times 1$ das coordenadas

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \tag{3.1.2}$$

é chamado de **vetor coordenada** de v em respeito à base $\mathcal{B}$. Abreviamos $[v] := [v]_{\mathcal{E}^m}$ no caso de $E = \mathbb{K}^m$ munido da base canônica $\mathcal{E}^m$.

Lema 3.1.6. *Duas bases ordenadas $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E são iguais se e somente se cada um elemento de E tem o mesmo vetor coordenada em respeito a $\mathcal{B}$ e a $\widetilde{\mathcal{B}}$. Em símbolos*

$$[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\widetilde{\mathcal{B}}} \quad \forall v \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{B}}.$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" A hipótese para $v := \xi_1$ diz que $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = [\xi_1]_{\widetilde{\mathcal{B}}}$. Note-se que $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, \ldots, 0)$. E assim $[\xi_1]_{\widetilde{\mathcal{B}}} = (1, 0, \ldots, 0)$. Mas isso signífica que $\xi_1 = 1 \cdot \tilde{\xi}_1 + 0 \cdot \tilde{\xi}_2 + \cdots + 0 \cdot \tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_1$. Repita para $v = \xi_2, \ldots, \xi_n$. "$\Leftarrow$" óbvio. $\square$

Exercício 3.1.7. Seja $E = \mathbb{R}^2$ munido da base canônica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ e da base ordenada $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2\}$ onde $\xi_1 = (1, 1)$ e $\xi_2 = (-1, 1)$. Determine $[e_1]_{\mathcal{B}}$, $[e_2]_{\mathcal{B}}$, $[e_1]$, $[e_2]$ e também $[\xi_1]_{\mathcal{B}}$, $[\xi_2]_{\mathcal{B}}$, $[\xi_1]$, $[\xi_2]$.

Exercício 3.1.8. Mostre que os polinômios 1, $x - 1$, e $x^2 - 3x + 1$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como CL nessa base.

3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial

Teorema 3.1.9. *Se um conjunto finito gera E, então qualquer conjunto $Y \subset E$ com mais elementos é LD.*

Corolário 3.1.10. *Suponha um conjunto finito X gera E, então*

$$Y \subset E \text{ } LI \qquad \Rightarrow \qquad |Y| \leq |X|.$$

Para provar Teorema 3.1.9 vamos usar o seguinte resultado sobre SLH's.

Teorema 3.1.11 (Existência de soluções não-triviais de um SLH)**.** *Dado uma matriz* $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$*. Se a matriz tem menos linhas como colunas* ($m < n$)*, então o SLH* $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$*, compare (A.3.1), admite soluções não-triviais* $x = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$*.*

Demonstração. Indução sobre o número m de linhas. Veja Teorema C.3.1. □

Demonstração de Teorema 3.1.9. Suponha que o conjunto $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E e seja $Y \subset E$ um outro subconjunto com mais elementos, ou seja $|Y| > m$. Para mostrar que Y é LD, basta mostrar segundo Lema 3.1.3 b) que um subconjunto $U = \{u_1, \dots, u_{m+1}\} \subset Y$ de $m+1$ elementos é LD. Como X gera E e cada um u_j pertence a E existem escalares a_{ij} tal que

$$u_j = a_{1j} v_1 + \cdots + a_{mj} v_m \qquad (*_j)$$

para $j = 1, \dots, m+1$.

Para U é LD resta mostrar: existem escalares não-nulos $x_1, \dots, x_{m+1}$ tal que

$$x_1 u_1 + \cdots + x_{m+1} u_{m+1} = \mathcal{O}. \qquad (3.1.3)$$

Para este fim considere o SLH de m equações de $n = m+1$ incógnitas x_j

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1,m+1} x_{m+1} = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{m,m+1} x_{m+1} = 0 \end{cases} \qquad \text{(SLH)}$$

o qual tem uma solução não-trivial $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$ segundo Teorema 3.1.11 como $m < n$. Obtemos (3.1.3) assim: usando $(*_1 - *_{m+1})$ temos

$$\begin{aligned} & x_1 u_1 + \cdots + x_{m+1} u_{m+1} \\ &= x_1 \left(a_{11} v_1 + \cdots + a_{m1} v_m\right) \\ &\quad + x_2 \left(a_{12} v_1 + \cdots + a_{m2} v_m\right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_{m+1} \left(\alpha_{1,m+1} v_1 + \cdots + \alpha_{m,m+1} v_m\right) \\ &= v_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{1j} x_j}_{=0 \ (\mathrm{SLH})_1} + \cdots + v_m \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{mj} x_j}_{=0 \ (\mathrm{SLH})_m} \\ &= \mathcal{O}. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.12. *Se uma base* $\mathcal{B}$ *de um espaço vetorial contem exatamente* m *elementos, então todas bases contêm exatamente* m *elementos.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ bases de E.
1) $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ e $Y := \tilde{\mathcal{B}}$ LI implicam (Corolário 3.1.10) $\ell := |\tilde{\mathcal{B}}| \leq |\mathcal{B}| = m < \infty$.
2) Analogamente como $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle = E$ e $Y := \mathcal{B}$ é LI, temos que $m = |\mathcal{B}| \leq |\tilde{\mathcal{B}}| = \ell$. □

A nocao de dimensão é baseada nessa proposição: Se um espaço vetorial E admite uma base finita, dizemos $\mathcal{B}$, então o número dos elementos é dito a **dimensão de E**, em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|.$$

Caso E não admite nenhuma base finita dizemos que E é de **dimensão infinita** e escrevemos $\dim E = \infty$.

Lema 3.1.13 (Aumentando conjuntos LI)**.** *Seja $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ um subconjunto LI e seja $u \in E \setminus \langle X \rangle$ um vetor de E mas não em $\langle X \rangle$. Então o conjunto extendido $\{v_1, \ldots, v_k, u\}$ também é LI.*

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então $u \notin \langle \emptyset \rangle = \{\mathcal{O}\}$, assim $u \neq \mathcal{O}$ e $\{u\}$ é LI segundo Corolário 1.3.4. Se $X \neq \emptyset$, suponha por absurdo que $\{v_1, \ldots, v_k, u\}$ fosse LD. Assim existe uma CL não-trivial $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta u = \mathcal{O}$. Caso $\beta = 0$, entao $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots, 0)$ e $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$. Assim $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é LD. Contradição. Caso $\beta \neq 0$, então $u = -\beta^{-1} (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) \in \langle X \rangle$. Contradição. □

Exercício 3.1.14. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ subconjuntos LI de um espaço vetorial E.

1. Caso são encaixados $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$, prove que $X = \bigcup X_n$ é LI.
2. Se cada X_n tem n elementos, prove que existe um conjunto LI $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ com $x_j \in X_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.
3. Supondo $E = \mathbb{R}^\infty$ e as hipóteses em 1. e 2., é verdadeiro que $X = \bigcup X_n$ seja uma base de E?

Corolários do Teorema 3.1.9

Nos corolários seguintes $n \in N_0$, particularmente é um número, assim finito.

Corolário 3.1.15. *$Y \subset E$, $|Y| > n := \dim E \;\Rightarrow\; Y$ LD .*

Demonstração. Como $\dim E = n$ existe uma base $\mathcal{B}$ de E com n elementos. □

Lema 3.1.16. *A dimensão de $\mathbb{R}^\infty$ é infinito.*

Demonstração. Suponha por absurdo que é finita a dimensão $k := \dim \mathbb{R}^\infty$. Segundo Corolário 3.1.15 para $Y = \mathcal{E}^\infty$ e $E = \mathbb{R}^\infty$, como $|Y| = |\mathcal{E}^\infty| = \infty > k = \dim \mathbb{R}^\infty$, segue que $\mathcal{E}^\infty$ é LD <u>em $\mathbb{R}^\infty$</u>. Mas $\mathcal{E}^\infty$ é LI <u>em $\mathbb{R}^\infty$</u> segundo Exercício 1.3.8. (Alternativamente, como $\mathcal{E}^\infty$ é LI em $\mathbb{R}^\infty_0$, $\mathcal{E}^\infty$ deve ser LI em $\mathbb{R}^\infty$ segundo parte c) do Lema 3.1.3.) Contradição. □

Corolário 3.1.17. *Se um conjunto Y é LI em E, então $|Y| \leq \dim E$.*

Demonstração. Caso $\dim E = \infty$: verdadeiro trivialmente. Caso $\dim E < \infty$: escolha para X em Corolário 3.1.10 uma base de E para obter $|Y| \le \dim E$. $\square$

Corolário 3.1.18. *Suponha $X \subset E$ tem $n := \dim E$ elementos, então*

$$X \text{ gera } E \qquad \Leftrightarrow \qquad X \text{ é LI.}$$

Demonstração. $\boldsymbol{n = 0}$. Assim $X = \emptyset$, ambos lados valem automaticamente.
$\boldsymbol{n = 1}$. Assim $X = \{v\}$ onde $v \in E$, ambos lados são equivalentes a $v \neq \mathcal{O}$.
$\boldsymbol{n = 2}$. **'⇒'** Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ gera E. Por absurdo suponha que X é LD. Segundo Teorema 3.1.1 b) um elemento de X, dizemos v_n, é CL de outros elementos de X. Então $E = \langle X \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$. Qualquer base $\mathcal{B}$ de E tem n elementos pela hipótese $n = \dim E$ – mais elementos como o conjunto $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ gerando E. Então $\mathcal{B}$ é LD segundo Teorema 3.1.9. Contradição. **'⇐'** Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ é LI. Por absurdo suponha que X não gera E. Então existe $u \in E$ não elemento de $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Assim o conjunto aumentado $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ é LI segundo Lema 3.1.13. Mas um subconjunto com mais elementos $(n + 1)$ como a dimensão (n) é LD segundo Corolário 3.1.15. Contradição. $\square$

Corolário 3.1.19. *Um subconjunto LI com $n = \dim E$ elementos é uma base.*

Demonstração. Tal subconjunto LI gera E segundo Corolário 3.1.18 '⇐'. $\square$

Lema 3.1.20. *Se um conjunto finito X gera E, então $|X| \ge \dim E$.*

Demonstração. Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ gera E.
Caso $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LI: Então X é base e assim $|X| = \dim E$.
Caso $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LD: Assim $X \neq \emptyset$.
Subcaso $m = 1$: Então $v_1 = \mathcal{O}$ e $E = \langle v_1 \rangle = \{\mathcal{O}\}$. Assim $|X| = 1 > 0 = \dim E$.
Subcaso $m \ge 2$: Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LD, pelo menos um elemento, dizemos v_m, deve ser CL de outros. Iterando até chegamos num conjunto LI obtemos que

$$E = \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle = \dots = \langle v_1, \dots, v_\ell \rangle$$

onde $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ é LI e $\ell \ge 1$. Então $\{v_1, \dots, v_\ell\} =: \mathcal{B}$ é base de E e assim $|X| > \ell = |\mathcal{B}| =: \dim E$. $\square$

3.1.3 Escalonamento: Dimensão de um subespaço gerado

Aplicamos o processo de escalonar uma matriz $\mathbf{a}$ – conteúdo do curso MA141 e revisado no Apêndice A.2 – para calcular a dimensão do subespaço gerado por m vetores.

Consideramos m vetores $v_1, \dots, v_m$ do espaço vetorial $\mathbb{K}^n$. (No caso geral de um espaço vetorial E de dimensão n use uma base para chegar em $\mathbb{K}^n \simeq E$.) Escreve as m listas $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$ como linhas de uma matriz $m \times n$, ou seja

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \quad\vdots \\ \leftarrow v_m \end{array} \end{array} .$$

Escalonamento da matriz $\mathbf{a}$, veja Seção A.2, lida à matriz escalonada $\mathbf{a}_{\text{esc}}$. Enumere as linhas não-nulas de $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ de cima para baixo, dizemos $\ell_1, \dots, \ell_d$.

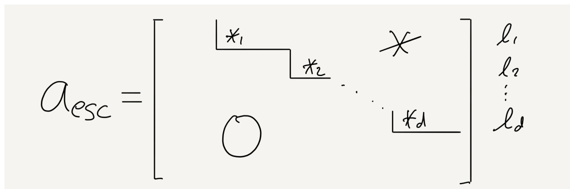

Figura 3.1: Linhas não-nulas $\ell_1, \dots, \ell_d$ da matriz escalonada $\mathbf{a}_{\text{esc}}$

É fácil checar que estas linhas formam um conjunto LI, com efeito

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \dots + \alpha_d \ell_d = \begin{bmatrix} \alpha_1 *_1 \\ \alpha_1 *_1 + \alpha_2 *_2 \\ \vdots \\ \dots \alpha_{d-1} *_{d-1} + \alpha_d *_d \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \Rightarrow \alpha_d = 0 \end{matrix}.$$

Então $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$ é uma base do Esp-lin$(\mathbf{a}_{\text{esc}})$, qual íguale Esp-lin$(\mathbf{a})$ porque operações elementares não mudam o espaço linha, veja Teorema A.2.2. Então

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}) = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}_{\text{esc}}) \subset \mathbb{K}^n$$

é um subespaço com base as linhas não-nulas $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$ da matriz $\mathbf{a}_{\text{esc}}$.

Exercício 3.1.21. Obtenha uma base para o subespaço F de $\mathbb{R}^4$ gerado por

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \qquad v_2 = (3, 4, 7, 10), \qquad v_3 = (2, 1, 3, 5).$$

Determine a dimensão de F.

3.2 Existência e extensão

Teorema 3.2.1. *Seja E da dimensão finita $n \in \mathbb{N}_0$.*

(a) *Todo conjunto gerando E contem uma base de E.* (*Existência de bases*)

(b) *Todo subconjunto LI é contido numa base de E.* (*Extensão de bases*)

(c) *A dimensão de qualquer subespaço de E é $\le n$.* (*Dimensão*)

(d) *Um subespaço F de E da mesma dimensão n é igual a E.*

Demonstração. LI refere-se a E se não especificado diferente. **(a)** Suponha X gera E. Seja $B \subset X$ qualquer subconjunto LI (existe como $B = \emptyset$ mostra), então $|B| \le \dim E =: n$ segundo Corolário 3.1.17. Para $k \in \mathbb{N}_0$ seja

$$\mathcal{C}_k := \{B \subset X \mid B \text{ é LI e } |B| = k\}$$

a família de todos os subconjuntos $B \subset X$ os quais são LI e composto de k elementos. Seja $B_* \subset X$ um subconjunto LI com o número máximo de elementos. Então $B_* \in \mathcal{C}_\ell$ para um $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$. Seja $B_* = \{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$. Considere as quatro inclusões (dois deles sendo igualdades)

$$E = \langle X\rangle \subset \langle\langle B_*\rangle\rangle = \langle B_*\rangle \subset E.$$

Consequentemente o conjunto LI B_* gera E, ou seja B_* é uma base. Resta justificar as quatro inclusões. Inclusão 1. Pela hipótese X gera E.
Inclusão 2. Parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica como $X \subset \langle B_*\rangle$: Suponha por absurdo que existe um vetor $v \in X$ o qual não é CL em B_*, ou seja $v \notin \langle B_*\rangle$. Segundo Lema 3.1.13 o subconjunto aumentado $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell, v\}$ de X ainda é LI, mas contem $\ell + 1$ elementos, então mais como B_*. Contradição.
Inclusão 3. Como $\langle B_*\rangle$ é um subespaço parte (iii) de Lema 2.2.3 aplica.
Inclusão 4. Como $B_* \subset X \subset E$ parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica.

(b) Suponha $X \subset E$ é um subconjunto LI. Como $k := |X| \in \{0, \dots, n\}$, veja Corolário 3.1.17, trata-se de um conjunto finito, ou seja $X = \{v_1, \dots, v_k\}$. Subconjuntos $B \subset E$ LI e contendo X (existem como $B := X$ mostra) são compostos de ℓ elementos para um $\ell \in \{k, \dots, n\}$. Seja B_* um tal subconjunto com o número máximo ℓ_* de elementos. Então B_* é LI e contem $X \subset B_*$. Para B_* é uma base de E, resta mostrar que gera E, ou seja $\langle B_*\rangle = E$:
'$\subset$' trivial como $B_* \subset E$. '$\supset$' Suponha por absurdo que existe um vetor $u \in E$ o qual não pertence a $\langle B_*\rangle$, então o conjunto aumentado $B_* \cup \{u\}$ é LI segundo Lema 3.1.13, contem X porque B_* contem X – mas tem mais elementos como B_*. Contradição.

(c) Suponha F é um subespaço de E. Seja $B \subset F$ qualquer subconjunto LI em respeito a F (existe como $B = \emptyset$ mostra). Note que B é LI em respeito a E segundo Lema 3.1.3 c). Assim $|B| \le n := \dim E$ segundo Corolário 3.1.17. Agora escolha um subconjunto $B_* \subset F$ LI em respeito a F com o número máximo de elementos. Como temos visto $k := |B_*| \le \dim E =: n$. Resta mostrar que B_* é uma base de F (neste caso $\dim F = |B_*|$). Pela escolha B_* é LI em F, então basta mostrar $\langle B_*\rangle = F$:
'$\subset$' trivial como $B_* \subset F$. '$\supset$' Suponha por absurdo que existe um vetor $u \in F$ o qual não pertence a $\langle B_*\rangle$, então o conjunto aumentado $B_* \cup \{u\}$ é LI em F segundo Lema 3.1.13 – mas tem mais elementos como B_*. Contradição.

(d) Seja $F \subset E$ um subespaço de dimensão $n := \dim E$. Pela definição de dimensão existe uma base $\mathcal{B}$ de F com n elementos. Como $\mathcal{B}$ é LI em respeito a F, é LI em respeito a E segundo Lema 3.1.3 c). Como além disso $|\mathcal{B}| = n := \dim E$ o Corolário 3.1.18 diz que $\mathcal{B}$ gera E. Então $E = \langle\mathcal{B}\rangle = F$, onde a segunda igualdade segue porque $\mathcal{B}$ é base de F, então gera F. □

Proposição 3.2.2. *Seja F um espaço vetorial e F_1, F_2 subespaços de dimensões finitas k, ℓ. Então existe uma base finita $\mathcal{B}$ do subespaço $F_1 + F_2$ de F que contem uma base $\mathcal{B}_1$ de F_1, uma base $\mathcal{B}_2$ de F_2, e uma base $\mathcal{B}_{12}$ de $F_1 \cap F_2$. Vale que*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2). \tag{3.2.1}$$

Demonstração. Vamos denotar de (b),(c) as partes correspondentes do Teorema 3.2.1. O subespaço $F_1 \cap F_2 \subset F_1$ tem dimensão finita m (segundo (c) para $E = F_1$) e assim admite uma base finita $\mathcal{B}_{12} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$ (segundo a definição de dimensão). Segundo (b) para $E = F_1$ o conjunto $\mathcal{B}_{12}$ – LI em $F_1 \cap F_2$ e segundo Lema 3.1.3 LI no superespaço F_1 – é contido numa base $\mathcal{B}_1$ de F_1. Analogamente $\mathcal{B}_{12}$ é contido numa base $\mathcal{B}_2$ de F_2. Uma base de $F_1 + F_2$ contendo as bases desejadas é

$$\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_{12}) \,\dot\cup\, \overbrace{\mathcal{B}_{12} \,\dot\cup\, (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12})}^{\mathcal{B}_2} = \mathcal{B}_1 \,\dot\cup\, (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12}) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2.$$

Contando elementos obtemos

$$\dim(F_1 + F_2) := |\mathcal{B}| = (k - m) + m + (\ell - m) = k + \ell - m.$$

Resta checar as duas propriedades de uma base. $\mathcal{B}$ gera $F_1 + F_2$: Os elementos de $F_1 + F_2$ são da forma $f_1 + f_2$ onde $f_1 \in F_1$ (assim é CL em $\mathcal{B}_1$) e $f_2 \in F_2$ (assim é CL em $\mathcal{B}_2$). Consequentemente $f_1 + f_2$ é CL em $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$.
$\mathcal{B}$ é LI em F: Seja $\mathcal{B}_1 = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ e $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12} = \{\eta_1, \ldots, \eta_{\ell-m}\}$. Suponha por absurdo que $\mathcal{B}$ é LD, ou seja existem escalares α_i, β_i não todos nulos tal que

$$\underbrace{\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_k\xi_k}_{=-v_1} + \underbrace{\beta_1\eta_1 + \cdots + \beta_{\ell-m}\eta_{\ell-m}}_{=:v_1} = \mathcal{O}.$$

Não todos β_i's são nulos (caso contrário $\mathcal{B}_1$ é LD, contradição). Assim $v_1 \in F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)$. De outro lado $-v_1$, então v_1, é elemento do subespaço F_1. Assim $v_1 \in (F_1 \cap F_2)$ e $v_1 \notin (F_1 \cap F_2)$. Contradição. □

Corolário 3.2.3. *Sejam $F, G \subset E$ subespaços de dimensões finitas, então:*

$$F \oplus G = E \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\mathcal{O}\} \end{cases}.$$

Demonstração. '⇒' Fórmula (3.2.1) usando que a interseção tem dimensão zero. '⇐' Suponha que $F \cap G = \{\mathcal{O}\}$ e que as dimensões de F e G adicionam à dimensão de E. Segundo Lema 2.3.2 a soma $F + G$ é um subespaço de E. Então $F + G = E$ segundo Teorema 3.2.1 (d). □

Exercício 3.2.4 (Subespaços do espaço $\mathrm{M}(n \times n)$ das matrizes quadradas)**.** [2]

1. Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{S} \subset \mathrm{M}(n \times n)$ os subespaços das matrizes anti-/simétricas.

   (a) Para cada par $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ seja $\mathbf{e}^{\mathbf{ij}}_+$ a matriz $n \times n$ cujos elementos nas posições ij e ji são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base $\{\mathbf{e}^{\mathbf{ij}}_+\}$ para $\mathcal{S}$.

[2] As dimensões para seu controle: 2. $\dim \mathcal{T} = n(n+1)/2$
3. (a) $2\frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2 - 1$ (b) $n(n-2) + n = n(n-1)$ (c) $(n-1)^2 + n = n^2 - (n-1)$

(b) De modo análogo, obtenha uma base $\{\mathbf{e}_{-}^{\mathbf{ij}}\}$ para $\mathcal{A}$.

(c) Conclua que

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{3.2.2}$$

Calcule $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A}$ e lembre-se que $\dim \mathrm{M}(n \times n) = n^2$. Conclua que

$$\mathrm{M}(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

Antes, no Exercício 2.3.7, tenhamos obtido uma prova alternativa desse.

2. As matrizes quadradas $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n)$ tal que $t_{ij} = 0$ quando $i < j$ chama-se **triangular inferior**. Prove que elas constituem um subespaço $\mathcal{T} \subset \mathrm{M}(n \times n)$. Obtenha uma base para $\mathcal{T}$ e determine a sua dimensão.

3. Obtenha uma base e consequentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $\mathrm{M}(n \times n)$ as quais são composto de

   (a) as matrizes $\mathbf{a} = (a_{ij})$ de **traço** (a soma dos elementos da diagonal)

   $$\mathrm{tr} : \mathrm{M}(n \times n) \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \mapsto \mathrm{tr}\,\mathbf{a} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

   nulo, ou seja $\mathrm{tr}\,\mathbf{a} = 0$;

   (b) as matrizes cuja primeira e última linha são iguais;

   (c) as matrizes cuja primeira linha e primeira coluna são iguais.

C.3 Bases – SLH

Teorema C.3.1 (Teorema 3.1.11)**.** *Dado uma matriz* $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$*. Se tem menos linhas (equações) como colunas (incógnitas), em símbolos* $m < n$*, então o sistema linear homogêneo (SLH)*

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

admite soluções $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *não triviais (não todos* x_j *nulos).*

Demonstração. Se todos os coeficientes a_{ij} são nulos, então todos os elementos $x \in \mathbb{K}^n$ são soluções. Sejam então não todos coeficientes nulos: A prova usa indução sobre o número m de equações.
$\boldsymbol{m = 1}$**:** Em $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$ temos pelo menos dois incógnitas segundo nossa hipótese $n > m = 1$. Além disso, pelo menos um dos coeficientes é não-nulo, dizemos $a_{1n} \neq 0$ (caso fosse um outro renomeamos eles). Então

$$\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 - \cdots - \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}}x_{n-1}\right)$$

é uma solução para cada um $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbb{K}^{m-1}$.
$\boldsymbol{m - 1 \Rightarrow m}$**:** Caso todos os coeficientes da última equação em $(*)$ são nulos, então as primeiras $m-1$ equações tem uma solução não-trivial x pela hipótese da indução (x também resolve a ultima equação: os coeficientes dela são nulos).

Suponha então que pelo menos um coeficiente da última equação em $(*)$ não é nulo, dizemos $a_{mn} \neq 0$. Nas primeiras $n-1$ equações de $(*)$ substitua x_n por

$$x_* := -\frac{a_{m1}}{a_{mn}}x_1 - \cdots - \frac{a_{m,n-1}}{a_{mn}}x_{n-1}$$

para obter um SLH de $m-1$ equações a $\tilde{n} := n-1 > m-1$ incógnitas. O qual tem uma solução $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$ pela hipótese $m-1$ da indução. Verifica-se que $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_*)$ é uma solucao nao-trivial de $(*)$. □

Referências Bibliográficas

[Art91] Michael Artin. *Algebra*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[EHH+92] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, and R. Remmert. *Zahlen*, volume 1 of *Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1992. Edited and with an introduction by K. Lamotke.

[Hir21] Oliver Hirsch. Die Psychologie der Gedankenkontrolle, des Mentizids und der Gehirnwäsche. Zugang pdf, January 2021.

[Koe85] Max Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Grundwissen Mathematik 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Zweite Auflage,

[Lan93] Serge Lang. *Algebra. 3rd ed.* Reading, MA: Addison Wesley, 1993.

[Lim05] Elon Lages Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Segunda Edição, 2005.

[Lim11] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Oitava Edição, 2011.

[Mee56] Joost A.M. Meerloo. *The Rape of the Mind. The Psychology of Thought Control, Menticide, and Brainwashing*. 1956. access pdf.

[Pul12] Petronio Pulino. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Notas da Aula, UNICAMP, 2012. Acessível no site www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA.

[Sal19] Dietmar A. Salamon. *Análise em dimensões superiores*. Tradução de J. Weber de Alemão para Português. 2019. ix+376p. pdf

[San12] Reginaldo J. Santos. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Manuscrito, UFMG, 03 2012.