Apêndice A

Revisão de matrizes e sistemas lineares

Seja[1] $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

Comentário A.0.9 (Corpos gerais $\mathbb{K}$)**.** As construções neste Apêndice A para matrizes e listas cujas entradas são números reais funcionam do mesmo jeito para entradas num corpo geral $\mathbb{K}$. Veja por exemplo [Lan93, Chap. VIII].

A.1 Matrizes

Para alunos da matemática recomendo o tratamento excelente [Art91, Chapter 1], para os outros alunos recomendo [San12, Capítulos 1 e 2].

Definição A.1.1 (Matrizes $m \times n$)**.** Uma **matriz**, mais detalhado uma **matriz** $\boldsymbol{m \times n}$, é um quadro numérico de m linhas e n colunas

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde os a_{ij} são números reais chamado de **entradas da matriz**. Por definição a entrada a_{ij} está localizada na i-ésima linha e j-ésima coluna, para memorizar

$$a_{\text{linha}\,\text{coluna}}$$

Uma **matriz quadrada** é uma matriz do tipo $n \times n$. Denotamos de

$$\mathrm{M}(m \times n) := \left\{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R},\, i = 1, \dots m,\, j = 1, \dots, n \right\}$$

[1] Ap. A de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 25 de março de 2024

o conjunto de todas as matrizes reais $\mathbf{a} = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$. Definimos a **adição** de duas matrizes entrada por entrada, ou seja

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \qquad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

Definimos a **multiplicação escalar** de uma matriz por um número real γ, chamado de **escalar** por tradição, também entrada por entrada, ou seja

$$\gamma\mathbf{a} = \gamma\,(a_{ij}) := (c_{ij}), \qquad c_{ij} := \gamma a_{ij}$$

A matriz cujas entradas todas são o número nulo 0 é chamada de **matriz nula**, símbolo $\mathbf{0}$. Se na matriz nula $n \times n$ colocamos o número 1 ao longo da diagonal obtemos a **matriz identidade** $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$. Denotamos de $-\mathbf{a} := (-1)\mathbf{a}$ a matriz cujas entradas são os negativos $-a_{ij}$ das entradas a_{ij} da matriz $\mathbf{a}$. Como $-\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ dizemos que $-\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}$ são **inversos aditivos** um do outro.

Definição A.1.2 (Matriz transposta)**.** A **transposta** de uma matriz $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n)$ é a matriz $\mathbf{a}^t$ com entradas $(\mathbf{a}^t)_{ij} = a_{ji}$. Ou seja, a transposta de uma matriz tem como linhas as colunas da matriz original.

Definição A.1.3 (Linhas e colunas de matrizes)**.** Seja $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n)$ uma matriz $m \times n$. Note-se que o primeiro índice i de uma entrada a_{ij} indica a linha e o segundo j a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a ***k*-ésima coluna**, respectivamente a ***ℓ*-ésima linha**, de uma matriz $\mathbf{a}$ com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} := \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_{\ell \bullet} := \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & \dots & a_{\ell n} \end{bmatrix} \tag{A.1.1}$$

Temos escolhido o símbolo $\bullet$ para sugerir "este índice é aberto" – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependente se $\bullet$ fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz $\mathbf{a}$ nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\bullet 1} & \dots & \mathbf{a}_{\bullet n} \end{bmatrix}$$

Definição A.1.4 (Espaço-coluna e espaço-linha)**.** Seja $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n)$ uma matriz $m \times n$. O **espaço-coluna** é o conjunto de todas as somas das colunas $\mathbf{a}_{\bullet k}$ da matriz decorado com fatores escalares $\gamma_k \in \mathbb{R}$, em símbolos

$$\text{Esp-col}(\mathbf{a}) := \{\gamma_1 \mathbf{a}_{\bullet 1} + \dots + \gamma_n \mathbf{a}_{\bullet n} \mid \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{M}(m \times 1)$$

Analogamente no **espaço-linha** usa-se as linhas da matriz $\mathbf{a}$, ou seja

$$\text{Esp-lin}(\mathbf{a}) := \{\gamma_1 \mathbf{a}_{1\bullet} + \dots + \gamma_n \mathbf{a}_{n\bullet} \mid \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{M}(1 \times n)$$

Produto matriz

Para duas matrizes **a** de tipo $m \times n$ e **b** de tipo $k \times p$ pode-se definir o chamado **produto matriz** no caso que os índices $n = k$ coincidem:

$$\mathrm{M}(m \times n) \times \mathrm{M}(n \times p) \to \mathrm{M}(m \times p), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{ab} := (c_{ij}) \tag{A.1.2}$$

onde

$$c_{ij} := \underbrace{\mathbf{a}_{i\bullet}}_{1\times n} \underbrace{\mathbf{b}_{\bullet j}}_{n\times 1} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

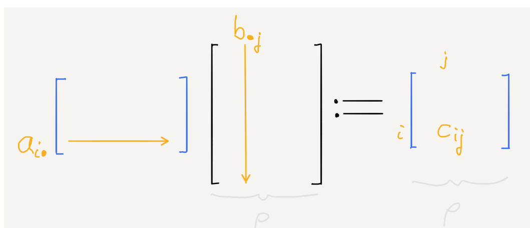

Figura A.1: Produto matriz – o número de colunas de **a** iguale o de linhas de **b**

Lema A.1.5 (Umas propriedades do produto matriz)**.** *Vale o seguinte*

(i) $(\mathbf{cb})\mathbf{a} = \mathbf{c}(\mathbf{ba})$

(ii) $\mathbf{c}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{ca} + \mathbf{cb}$ *e* $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$

(iii) $\mathbf{a}\mathbb{1}_n = \mathbf{a}$ *e* $\mathbb{1}_m\mathbf{a} = \mathbf{a}$ $\qquad \mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n)$

(iv) $\mathbf{b}(\gamma\mathbf{a}) = \gamma(\mathbf{ba})$

para todos $\gamma \in \mathbb{R}$ *e matrizes* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *tal que as operacoes fazem sentido.*

Definição A.1.6 (Matriz inversa)**.** Uma matriz *quadrada* $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(n \times n)$ admite uma inversa se existe uma matriz quadrada **b** tal que $\mathbf{ab} = \mathbb{1}_n$.[2] Neste caso tal **b** é único e usa-se o símbolo $\mathbf{a}^{-1}$ para denotar **b**; veja Seção 6.4.1.

Definição A.1.7 (Matrizes quadradas comutando)**.** Dizemos que duas matrizes quadradas $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{M}(n \times n)$ **comutam** se $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.

[2] No caso se matrizes *quadrada* a condição $\mathbf{ab} = \mathbb{1}_n$ é equivalente à condição $\mathbf{ba} = \mathbb{1}_n$.

A.2 Escalonamento de matrizes segundo Gauss

Definição A.2.1 (Operações elementares (oe))**.** Pode-se aplicar para as linhas de uma matriz três tipos de operações, as chamadas **operações elementares**:

(oe1)$_\updownarrow$ trocar duas linhas

(oe2)$_\cdot$ multiplicar uma linha com um escalar α

(oe3)$_+$ adicionar uma linha para uma outra

Teorema A.2.2. *O espaço linha não muda quando aplicar* (oe)*'s a uma matriz.*

Demonstração. Óbvio da Definição A.1.4 de Esp-lin. □

Processo de escalonamento – método de Gauss (*1777 †1855)

Chama-se uma matriz **escalonada** se em cada linha o primeiro elemento não-nulo está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da próxima linha. Exemplos

$$\text{escalonadas:}\quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{não é:}\quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Numa matriz *escalonada* os primeiros elementos não-nulos das linhas são chamados de **pivôs** da matriz escalonada.

Definição A.2.3. Uma matriz pode ser transformada numa matriz escalonada aplicando operações elementares. O processo é repetir os três passos seguintes:

1. Localiza a primeira coluna não-nula e nela o primeiro elemento não-nulo, dizemos a. Troca a linha de a e a primeira linha.
2. Embaixo de a anulamos todo elemento não-nulo, dizemos b: Multiplique a linha de b com $-a/b$, depois adiciona a linha de a. Continue até todos os elementos embaixo de a são nulos.
3. Esqueça a linha e a coluna de a e trata a matriz restante começando de novo com passo 1.

O processo de escalonar uma matriz $\mathbf{a}$ termina com *uma* matriz escalonada – não é única – denotada $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ e ilustrada na Figura 3.1 onde $*$ simboliza entradas qualquais, nulos ou não-nulos.

Exemplo A.2.4. Ilustramos o escalonamento. Seja Li a i-ésima linha.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L2]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{4}L3]{2.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[adic.L1]{2.naL3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[e\ col.de\ 2]{3.esq.linha} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

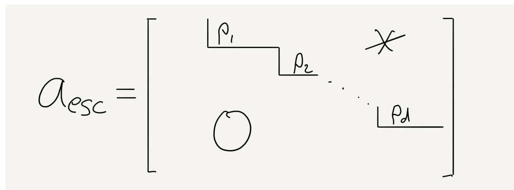

Figura A.2: Uma matriz escalonada $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$ com pivôs $p_1, \dots, p_d \neq 0$

e agora começamos de novo com passo 1 tratando a matriz reduzida

$$\xrightarrow[L2\leftrightarrow L2]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{1}L3]{2.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[adic.L2]{2.naL3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz escalonada reduzida

O processo de escalonar uma matriz $\mathbf{a}$ não lida a um resultado único: por exemplo, se $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$ é uma matriz escalonada, então $7\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$ também é.

Definição A.2.5 (A matriz escalonada reduzida)**.** Chama-se uma matriz escalonada **reduzida**, símbolo $\mathbf{a}_{\mathrm{esc-red}}$, se cada um pivô é 1 e as entradas acima dele são nulos. A matriz nula já é escalonada reduzida.

A matriz escalonada reduzida é única: Se uma matriz $\mathbf{a}$ não possui pivô, então trata-se da matriz nula e

$$\mathbf{0}_{\mathrm{esc}} = \mathbf{0}_{\mathrm{esc-red}} = \mathbf{0}$$

Dado então uma matriz não-nula $\mathbf{a}$. Calcule uma forma escalonada $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$. Na matriz $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$ multiplique a primeira linha com $1/p_1$ onde p_1 é o pivô da primeira linha. Se a linha 2 não é nula, então faça o mesmo na linha 2. Depois aplique operações elementares à linha 2 para anular cada uma entrada acima do pivô dois. Continue até não tem mais linhas não-nulas.

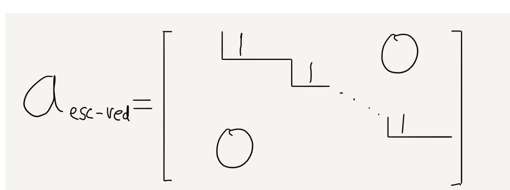

Figura A.3: A matriz escalonada reduzida $\mathbf{a}_{\mathrm{esc-red}}$

Exercício A.2.6. Suponha que $\mathbf{a}$ é uma matriz quadrada $n \times n$ e uma matriz escalonada $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$ possui n pivôs. Neste caso a matriz escalonada reduzida $\mathbf{a}_{\mathrm{esc-red}} = \mathbb{1}_n$ é a matriz identidade.

A.2.1 Aplicações de escalonamento

Matrizes

(i) **Base e dimensão do subespaço gerado por m vetores.** Seção 3.1.3

Dado m vetores $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, colocamo-los como as linhas de uma matriz $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n)$ e calculamos uma forma escalonada $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$. As linhas não-nulas, dizemos $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_d$ como na Figura 3.1, formam uma base do espaco-linha de $\mathbf{a}$ cuja dimensão é consequentemente d. Assim o subespaço

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}) \overset{\text{Teor.A.2.2}}{=} \text{Esp-lin}(\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}) \subset \mathbb{R}^n$$

tem como base as linhas não-nulas $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$ da matriz escalonada $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$.

(ii) **Base e dimensão da imagem de uma matriz a.** Seção 4.2

A imagem de uma matriz $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n)$ é igual, veja (4.2.2), a seu espaço-coluna o que coincide com o espaço-linha da matriz transposta $\mathbf{a}^t$ ou seja

$$\mathrm{Im}(\mathbf{a}) = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t) \overset{\text{Teor.A.2.2}}{=} \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t{}_{\mathrm{esc}}) \subset \mathbb{R}^n.$$

Assim as linhas não-nulas de $\mathbf{a}^t{}_{\mathrm{esc}}$ formam uma base de $\mathrm{Im}(\mathbf{a})$. A dimensão da imagem é chamado de **posto** da matriz.

(iii) **Resolução de sistemas lineares $\mathbf{a}x = b$.** Seções A.3 e 6.6

Existência de uma solução x é equivalente a b sendo uma CL das colunas da matriz $\mathbf{a}$. Neste caso segue os passos descrito no Comentário A.3.5.

(iv) **Núcleo de uma matriz a.** Seção 6.6.2

Escalone a matriz estendida $[\mathbf{a} : \mathcal{O}]$ e resolve $[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\mathrm{esc}} = [\mathbf{a}_{\mathrm{esc}} : \mathcal{O}]$ "de baixo para cima", veja Comentário A.3.5.

(v) **Cálculo da matriz inversa (Gauss-Jordan).** Seção A.4

Transformações lineares gerais

Se $A \colon E \to F$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais da dimensão finita escolha bases e calcule a matriz de A correspondente. Aplique as técnicas para matrizes descritos acima.

- Cálculo do posto de uma transformação linear Seção 6.1.
- Cálculo do núcleo e da imagem de uma transformação linear Seção 6.6.
- Resolução de sistemas lineares Seções A.3 e 6.6.
- Cálculo da transformação linear inversa (Gauss-Jordan) Seção A.4.

A.3 Sistemas Lineares

Seja **a** uma matriz $m \times n$ e $b = (b_1, \ldots, b_m)$ uma lista ordenada de m números reais. Agora mesclamos ás n colunas de **a** a lista b como a $(n+1)$-ésima coluna para obter a chamada **matriz aumentada**, notação

$$[\mathbf{a} : b] := \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Definição A.3.1. Suponha uma matriz **a** tipo $m \times n$ e uma lista $b = (b_1, \ldots, b_m)$ são dadas. Queremos saber se existe uma solução $x = (x_1, \ldots, x_n)$ do **sistema linear (SL) de m equações a n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$**

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \tag{A.3.1}$$

ou, equivalentemente, da equação correspondente $\mathbf{a}x = b$ entre matrizes.[3]

É útil chamar a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ o **sistema linear** definido por (A.3.1). A lista $b = (b_1, \ldots, b_m)$ é chamada de **inomogeneidade** do sistema linear. O caso $b = \mathcal{O} = (0, \ldots, 0)$ chama-se de **sistema linear homogêneo (SLH)**.

O sistema linear (A.3.1) pode ser escrito equivalentemente na forma

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{A.3.2}$$

O lado esquerdo é um exemplo de uma chamada "combinação linear" das colunas $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{a}_{\bullet n}$ da matriz **a**, veja (A.1.1), representando o vetor b – um conceito fundamental o qual vamos tratar no próximo parágrafo.

Comentário A.3.2. Note-se que o lado esquerdo de (A.3.2) corre sobre toda a imagem da matriz **a** se variamos x sobre todas as listas. Então um SL $[\mathbf{a} : b]$ tem uma solução se e somente se a lista b é elemento da imagem da matriz **a**.

Lembramos do curso MA141 "Geometria Analítica" o seguinte

Lema A.3.3. *Uma lista x é solução do sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ se e somente se x é solução do sistema linear associado à matriz escalonada $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$.*

Ideia de demonstração. (Veja por exemplo Artin "Algebra" (1991), p. 13.)
As operações elementares podem ser escrito como matrizes invertíveis **e**. O resultado de uma operação elementar numa matriz **a** então é a matriz **ea**. Assim $\mathbf{a}_{\text{esc}} = \mathbf{pa}$ onde **p** é da forma $\mathbf{p} := \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_k$. Além disso $\mathbf{e}[\mathbf{a} : b] = [\mathbf{ea} : \mathbf{e}b]$, então $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}} = [\mathbf{pa} : \mathbf{p}b]$. '⇒' Se $\mathbf{a}x = b$, então $\mathbf{pa}x = \mathbf{p}b$. '⇐' Use $\mathbf{p}^{-1}$. □

[3] Sempre se escrevemos $\mathbf{a}x = b$ consideramos x e b como matrizes colunas $n \times 1$ e $m \times 1$, respectivamente, e $\mathbf{a}x$ é o produto matriz.

Note-se que no caso especial quando um sistema linear é *homogêneo*, ou seja $b = \mathcal{O}$, vale a relação seguinte

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\mathrm{esc}} = [\mathbf{a}_{\mathrm{esc}} : \mathcal{O}].$$

Corolário A.3.4 (Núcleo)**.** $\mathrm{N}(\mathbf{a}) = \mathrm{N}(\mathbf{a}_{\mathrm{esc}})$.

Demonstração. As soluções de $[\mathbf{a} : \mathcal{O}]$ e $[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\mathrm{esc}}$ são iguais (Lema A.3.3). □

Resolução de um sistema linear usando escalonamento

Comentário A.3.5. Para resolver o SL $\mathbf{a}x = b$

- escalone a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$
- obtendo uma matriz escalonada $[\mathbf{a} : b]_{\mathrm{esc}} =: [\tilde{\mathbf{a}} : \tilde{b}]$.
- Resolve o SL $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$ "de baixo para cima", veja Exemplo A.3.6 que segue.
- Uma lista x é solução de $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$ se e somente se x é solução de $\mathbf{a}x = b$.

Exemplo A.3.6. Para encontrar as soluções $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ do sistema linear

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

primeiro, formamos a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ onde $b = (0, 0, 0) =: \mathcal{O}$, segundo, escalonamos ela, e terceiro, **resolvemos "de baixo para cima"**. Segundo Lema A.3.3 uma solução de $[\mathbf{a} : b]_{\mathrm{esc}}$ também resolve $[\mathbf{a} : b]$, e vice versa.

Exemplo A.2.4 mostra as matrizes $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$.

No Exemplo A.2.4 o lado direito $= [\mathbf{a}_{\mathrm{esc}} : \mathcal{O}]$ desta fórmula representa o SLH

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Resolução "de baixo para cima":

Linha 3. Começamos embaixo com a ultima linha $0x + 0y + 0z = 0$ a qual não representa nenhuma restrição para x, y, z.

Linha 2. Progredimos para cima, ou seja para a linha dois $y + 2z = 0$. Escolha uma variável para ser a variável dependente da(s) outra(s) variáveis, as quais variam livremente no corpo. No nosso caso só tem uma outra e o corpo é $\mathbb{R}$. Escolhemos por exemplo como variável dependente $y = y(z) = -2z$ como função da variável z a qual varia livremente sobre os números reais, ou seja $z \in \mathbb{R}$.

Linha 1. Progredimos para cima, ou seja para a primeira linha

$$0 = 2x + y(z) + z = 2x - 2z + z = 2x - z$$

lembrando que $z \in \mathbb{R}$ é livre. Então $x = x(z) = \frac{1}{2}z$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.

Conclusão. Toda solução do SL é da forma

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $z \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. Então o SL não tem só uma solução – tem uma para cada um número real z. Isso conclui o Exemplo A.3.6.

A.4 Cálculo da matriz inversa – Gauss-Jordan

Esta Seção A.4 aplica só para matrizes *quadradas*.

Proposição A.4.1. *Caso uma matriz $n \times n$ (quadrada) $\mathbf{a}$ admite uma inversa, encontra-se a inversa assim: Considere a matriz $[\mathbf{a} : \mathbb{1}]$ obtida por escrever a matriz identidade $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$ à direita de $\mathbf{a}$. Aplique as três operações elementares* (oe1 – oe3)*, veja Definição A.2.1, até a matriz modificada tem a forma $[\mathbb{1} : \mathbf{c}]$ para uma matriz $\mathbf{c}$. Neste caso $\mathbf{c} = \mathbf{a}^{-1}$ é a inversa buscada.*

$$\left[\mathbf{a} : \mathbb{1}\right] \xrightarrow{\text{(oe)}} \cdots \xrightarrow{\text{(oe)}} \left[\mathbb{1} : \underbrace{\mathbf{c}}_{\mathbf{a}^{-1}}\right]$$

Dica: *É aconselhável escalonar a matriz $\mathbf{a}$ como passo intermediário e chegar numa matriz da forma $[\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathbf{d}]$ onde $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ é um escalonamento de $\mathbf{a}$. Depois elimine todas as entradas acima da diagonal para ao fim chegar em $[\mathbb{1} : \mathbf{c}]$.*

Ideia de demonstração. (Veja por exemplo Artin "Álgebra" (1991), p. 17.)
As operações elementares podem ser escrito como matrizes invertíveis $\mathbf{e}$. O resultado de uma operação elementar numa matriz $\mathbf{a}$ então é a matriz $\mathbf{ea}$. Assim reduzir $\mathbf{a}$ para a matriz identidade $\mathbb{1}$ traduz num produto matriz $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_k \mathbf{a} = \mathbb{1}$. Aplicando $\mathbf{a}^{-1}$ da direita obtemos $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_k \mathbb{1} = \mathbf{a}^{-1}$. Esta identidade diz que aplicando as mesmas operações elementares na mesma ordem à matriz identidade $\mathbb{1}$ obtém-se a matriz inversa a^{-1}. □

Comentário A.4.2 (Matrizes 2×2)**.** Se $ad - bc \neq 0$ a matriz inversa é

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A.4.1 O determinante de matrizes quadradas

Antes de começar o processo descrito na Proposição A.4.1 deve saber que a matriz é invertível. Nas dimensões 2 e 3 a ferramenta mais útil para checar é o determinante.

Definição A.4.3 (Matrizes)**.** Nas dimensões 1, 2, 3 define-se $\det[a_{11}] = a_{11}$ e

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \overbrace{a_{11}a_{22}}^{\text{diagonal}} - \overbrace{a_{21}a_{12}}^{\substack{\text{anti} \\ \text{-diagonal}}}$$

e

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \overbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}^{\text{diagonal}} - \overbrace{a_{31}a_{22}a_{13}}^{\text{anti-diagonal}} \\ +a_{12}a_{23}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} \\ +a_{13}a_{21}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{array}$$

Note como o primeiro índice dos a_{ij}'s embaixo do produto da diagonal / anti-diagonal fica constante e o segundo índice muda ciclicamente.

Exercício A.4.4. Seja $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$. Prove que

1. $\det(\mathbf{am}) = \det \mathbf{a} \cdot \det \mathbf{m}$ [cálculo direto];
2. $\det \mathbf{a} \neq 0 \iff \mathbf{a}$ é invertível;
3. $\det(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{am}) = \det \mathbf{a}$, para todo $\mathbf{m}$ invertível.

Pode-se definir o determinante de matrizes quadradas do qualquer tamanho $n \times n$; veja por exemplo [San12, § 2.2].

Teorema A.4.5. *Seja* $\mathbf{a}$ *uma matriz* $n \times n$ *(quadrada), então são equivalente*

$$\det \mathbf{a} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{a} \text{ invertível } (\mathbf{a}^{-1} \text{ existe})$$

O determinante respeita transposta e produtos, ou seja

$$\det \mathbf{a}^t = \det \mathbf{a}, \qquad \det \mathbf{ba} = (\det \mathbf{b})\,(\det \mathbf{a}) \tag{A.4.1}$$

Em particular, a ordem no produto matriz não importa $\det \mathbf{ba} = \det \mathbf{ab}$.

Para matrizes $\mathbf{c}$ *tipo* $k \times k$, $\mathbf{d}$ *tipo* $(n-k) \times (n-k)$, $\mathbf{e}$ *tipo* $k \times (n-k)$, *vale*

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{c}) \cdot \det(\mathbf{d}) \tag{A.4.2}$$

Demonstração. Veja por exemplo [San12, Teor.2.14 e 2.15] e [Sal19, Thm. D.3.5]. Para matrizes sobre um corpo veja [Lan93, VIII Prop. 4.16]. ☐

O determinante de Vandermonde

Teorema A.4.6 (Vandermonde 1771 ($n = 3$), Cauchy 1815 (caso geral))**.** *Dado elementos* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *de um corpo* $\mathbb{K}$, *então vale*

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 & \dots & {\alpha_1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & {\alpha_2}^2 & \dots & {\alpha_2}^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \alpha_n & {\alpha_n}^2 & \dots & {\alpha_n}^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Demonstração. Para $k = n, n-1, \ldots, 3, 2$ adicione $-\alpha_1$ vezes a $(k-1)$-ésima coluna à k-ésima coluna. Obtemos uma matriz $n \times n$ com $(1, 0, \ldots, 0)$ como primeira linha e

$$\left(1, \alpha_j - \alpha_1, \alpha_j^2 - \alpha_1\alpha_j, \ldots, \alpha_j^{n-1} - \alpha_1\alpha_j^{n-2}\right)$$

como j-esima coluna $(j > 1)$. Desenvolvemos o determinante desta matriz segunda sua primeira linha $(1, 0, \ldots, 0)$ obtemos

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} (\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \ldots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & & & \\ (\alpha_n - \alpha_1) & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \ldots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_2 n - \alpha_1) \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1) \cdots (\alpha_n - \alpha_1) \cdot \Delta(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)\end{aligned}$$

Agora indução finaliza a demonstração. □

A.5 Exercícios

1. Use escalonamento para resolver o sistema linear

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 6y + 9z &= 7 \\ 2x + 8y + 8z &= 6 \end{aligned}$$

   nas incógnitas $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Determine a inversa da matriz $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ caso existisse.[4]

3. Decida quais das matrizes possuem inversa e calcule quando existir:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

[4] $\det \mathbf{a} = 1 \neq 0$ então $\mathbf{a}^{-1}$ existe, resultado $\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Referências Bibliográficas

[Art91] Michael Artin. *Algebra*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[EHH+92] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, and R. Remmert. *Zahlen*, volume 1 of *Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1992. Edited and with an introduction by K. Lamotke.

[Hir21] Oliver Hirsch. Die Psychologie der Gedankenkontrolle, des Mentizids und der Gehirnwäsche. Zugang pdf, January 2021.

[Koe85] Max Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Grundwissen Mathematik 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Zweite Auflage,

[Lan93] Serge Lang. *Algebra. 3rd ed.* Reading, MA: Addison Wesley, 1993.

[Lim05] Elon Lages Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Segunda Edição, 2005.

[Lim11] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Oitava Edição, 2011.

[Mee56] Joost A.M. Meerloo. *The Rape of the Mind. The Psychology of Thought Control, Menticide, and Brainwashing.* 1956. access pdf.

[Pul12] Petronio Pulino. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Notas da Aula, UNICAMP, 2012. Acessível no site www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA.

[Sal19] Dietmar A. Salamon. *Análise em dimensões superiores*. Tradução de J. Weber de Alemão para Português. 2019. ix+376p. pdf

[San12] Reginaldo J. Santos. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Manuscrito, UFMG, 03 2012.