Introdução

Notações

Para uma lista extensiva dos símbolos usados veja o Índice Remissivo C.4.

Comentário 0.0.1 (Números)**.** Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}\}$	racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ "a reta real"	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ "o plano complexo"	complexos

Denotamos de U subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$. Denotamos a função seno do símbolo inglês sin.

Com $|\alpha|$ denotamos o absoluto de um número real α. Denotamos **intervalos** fechados de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e abertos de $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Usamos os símbolos

$\forall$ "para todos os" $\quad$ $\exists$ "existe um" $\quad$ $\exists!$ "existe um único"

O símbolo $\vee$ significa 'ou' e $\wedge$ significa 'e'. A notação $A := B$ significa que A **é definido** pelo lado direito B. Escrevendo $\dim E = n$ ou $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ indica sem ser mencionado explicitamente que n e k são números naturais, particularmente têm valor **finito**.

Conjuntos são introduzidos na Seção C.1. "Sejam $x_1, \dots, x_\ell$ elementos de um conjunto X" é uma frase encontrada frequentemente e depois quer-se trabalhar com o conjunto composto destes elementos. Um ponto útil é que não é proibido que uns dos elementos, ainda todos, são iguais. O jeito certo de escrever o conjunto correspondente é assim $\{x_1\} \cup \dots \cup \{x_\ell\}$. Para este conjunto usa-se também a notação $\{x_i \mid i = 1, \dots, \ell\}$. Veja Definição C.1.2.

Convenções

Tem grande diferença entre funções de uma variável e funcoes de duas variáveis, mas não entre duas e $k > 2$ variáveis. Para não dificultar legibilidade, **usamos geralmente funções de <u>duas</u> variáveis na apresentação**.

Cor cinza. Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada ou informação adicional não parte do Currículo. Palavras individuais ou trechos curtos em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.

Parte I

Derivadas Parciais

Capítulo 1

Funções de Várias Variáveis

Tem[1] grande diferença entre funções de uma variável e funcoes de duas variáveis, mas não entre duas e $k > 2$ variáveis. Para não dificultar legibilidade, **usamos geralmente funções de <u>duas</u> variáveis na apresentação**.

1.1 O espaço $\mathbb{R}^n$

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as listas ordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de n membros números reais. A lista nula $\mathcal{O} := (0, \ldots, 0)$ é chamada de **origem**. Adiciona-se dois listas $x + y$ membro-por-membro e multiplica-se uma lista x com um numero real $\alpha \in \mathbb{R}$ também membro-por-membro, em símbolos

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ é munido de duas funções, o **produto escalar** de duas listas

$$x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R} \tag{1.1.1}$$

e a função **norma** $|x| := \sqrt{x \cdot x} \in [0, \infty)$ representando a distancia da origem.

Matrizes

Escrevendo uma lista ordenada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ na forma $[x_1, \ldots, x_n]$ trata-se de uma matriz $1 \times n$, ou seja 1 linha e n colunas. Também podemos escrever x como matriz $n \times 1$. A diferença aparece quando multiplicar matrizes. Seja $\mathrm{Mat}(m \times n)$ o conjunto das **matrizes** de m linhas, n colunas, entradas reais

$$\boldsymbol{a} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[1] Cap. 1 de MA211 2024-1, autor Joa Weber: 6 de março de 2024

onde a entrada a_{ij} encontra-se na i-ésima linha e j-ésima coluna. O **produto matriz** é uma aplicação

$$\mathrm{Mat}(m \times k) \times \mathrm{Mat}(k \times n) \to \mathrm{Mat}(m \times n), \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{ab} = (c_{ij})$$

onde a entrada $c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{k} a_{i\nu} b_{\nu j}$ é o produto escalar (1.1.1) da i-ésima linha da primeira matriz $\boldsymbol{a}$ com a j-ésima coluna da segunda matriz $\boldsymbol{b}$.

Observe que o produto escalar (1.1.1) de fato é um produto matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = x \cdot y.$$

Veremos em (4.4.2) que a derivada $df(a)v$ de uma função f também é.

Quando aplicamos uma matriz $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ a uma lista $v \in \mathbb{R}^n$ pensamos de v silenciosamente como matriz coluna $n \times 1$ e $\boldsymbol{a}v$ significa produto matriz.

1.1.1 Subconjuntos

A **bola aberta** de raio $r > 0$ em torno de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é denotado

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}.$$

Abreviamos $B_r := B_r(\mathcal{O})$ a bola em torno da origem $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.1. Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos os subconjuntos:

(i) O **complemento** de A

$$A^{\mathrm{C}} := \{b \in \mathbb{R}^n \mid b \notin A\}$$

(ii) O **interior** de A

$$\mathring{A} := \{a \in A \mid \text{existe uma bola aberta } B_r(a) \text{ contida em } A\}.$$

(iii) A **fronteira** de A

$$\dot{A} := \{b \in \mathbb{R}^n \mid \text{toda bola } B_r(b) \text{ contem elementos de } A \text{ e do complemento } A^{\mathrm{C}}\}.$$

(iv) A **fechadura** de A é obtido através de adicionar a fronteira

$$\bar{A} := \{b \in \mathbb{R}^n \mid \text{toda bola } B_r(b) \text{ contem elementos de } A\}.$$

Chamamos um subconjunto A de **aberto** se $A = \mathring{A}$, de **fechado** se $A = \bar{A}$, de **limitado** se A é contido em alguma bola aberta, e de **compacto** se A é limitado e fechado.

Para obter o interior $\mathring{A} = A \setminus \dot{A}$ só precisar subtrair a fronteira. Para obter a fechadura $\bar{A} = A \cup \dot{A}$ só precisar adicionar a fronteira. Um subconjunto é aberto (fechado) se e somente se seu complemento é fechado (aberto).

1.1.2 Coordenadas cartesianas e polares no plano

Usando um sistema de **coordenadas cartesianas** OXY[2] identifica-se os pontos P de um plano Π com os elementos (x, y) do conjunto $\mathbb{R}^2$ de todas as listas ordenadas de dois números reais. Dado um ponto $P \neq O$, obtemos

a) a distancia $r > 0$ entre P e a origem e

b) um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ do eixo-X para o segmento OP.

O par $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ obtido assim é chamado de **coordenadas polares** do ponto P. Usando as definições geométricas de seno e coseno e o Teorema de Pitágoras obtemos que as relações entre os pares (x, y) e (r, θ) descrevendo o mesmo ponto P do plano são assim[3]

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \tfrac{y}{x}. \tag{1.1.2}$$

1.2 Básicos úteis

Definição 1.2.1 (Fatorial)**.** Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $n! := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Define-se $0! := 1$ e $x^0 := 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2.2 (Coeficientes binomiais)**.** Dado $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ o **coeficiente binomial** correspondente é definido assim

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Definição 1.2.3 (Raíz)**.** A raíz de um numero real $x \geq 0$ é a solução não-negativa $y \geq 0$ da equação $y^2 = x$.

Assim a raíz de x^2 é o modulo de x, em símbolos

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x|.$$

Definição 1.2.4 (Exponencial e logaritmo)**.** O **número de Euler** (1707-1783) é definido pela soma, equivalentemente pelo limite, seguinte

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = 2.781\dots$$

A função exponencial é definida por

$$e\colon \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad r \mapsto e^r,$$

[2] Dado um plano Π, fixe um ponto e denomina-o de **origem**, símbolo O. Escolhe dois pontos X e Y diferente de O tal que os segmentos OX e OY são ortogonais, em símbolos $OX \perp OY$. Chama-se a reta orientada passando O e depois X o **eixo-X**; análogo **eixo-Y**.

[3] a última relação vale se P não está no eixo-Y ($x \neq 0 \Leftrightarrow \theta$ não múltiplo ímpar de $\frac{\pi}{2}$)

e a sua função inversa

$$\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \ln(x) = r \;\Leftrightarrow\; e^r = x,$$

é chamada de **logaritmo** (naturalis). Observe que $\ln(1) = 0$ como $e^0 = 1$.

1.3 Funções

Definição 1.3.1. Uma **função de k variáveis** é uma regra, denotada

$$f\colon \mathbb{R}^k \supset D \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto f(x_1, \ldots, x_k),$$

que associa a cada lista ordenada $x = (x_1, \ldots, x_k)$ composta de números reais e elemento do subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, um valor real, denotado $f(x_1, \ldots, x_k)$ e chamado de **imagem do elemento** $(x_1, \ldots, x_k) \in D$ sob f. O subconjunto D é chamado de **domínio** de f, símbolo $D = \operatorname{dom} f$.

Usamos o símbolo U para domínios abertos.

O conjunto de todas as imagens de f é chamado de **imagem da função** f, em símbolos $\operatorname{im} f = \{f(x) \mid x \in D\}$.

Comentário 1.3.2. Uma função de varias variáveis pode ser descrito

1. numericamente: tabela de valores;
2. algebricamente: fórmula, por exemplo $f(x,y,z) = x^2 + y + \frac{1}{z}$;
3. visualmente no caso de duas variáveis:
   (a) gráfico $\operatorname{gr}(f) \subset D \times \mathbb{R}$;
   (b) curvas de nível $f^{-1}(c) \subset D$.

Se uma função é dada através de uma fórmula, o **domínio máximo** é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^k$ no qual a fórmula faz sentido. Por exemplo, o domínio máximo de $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. A função $\sqrt{x+y+z}$ só faz sentido quando $x + y + z \geq 0$ e $\ln(xy)$ só quando $xy > 0$.

Exercício 1.3.3. Qual domínio máximo e imagem de $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$?
Solução. O argumento da raíz deve ser ≥ 0, equivalentemente $x^2 + y^2 \leq 3^2$, em coordenadas polares $r \leq 3$. Assim o domínio máximo é o disco fechado no plano-xy de raio 3 e centro $(0,0)$. Por definição o valor de uma raíz é ≥ 0 e de outro lado $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq \sqrt{9} = 3$. Todo numero $c \in [0,3]$ é imagem: verifique que $g(\sqrt{9 - c^2}, 0) = c$.

Exercício 1.3.4. Determine domínio máximo D e $f(3,2)$ no caso

a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$;

b) $f(x, y) = x \cdot \ln(y^2 - x)$.

Solução. a) Obtemos $f(3,2) = \sqrt{6}/2$ e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x - 1 \text{ e } x \neq 1\}$$

é o semi-espaço acima e igual da reta $y = -x - 1$ menos a vertical passando eixo-x no ponto 1.

b) Obtemos $f(3,2) = 3 \cdot \ln(1) = 0$, veja Definição **1.2.4**, e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x < 0 \wedge y \in \mathbb{R}) \text{ ou } (x \geq 0 \wedge (y > \sqrt{x} \vee y < -\sqrt{x}))\}$$

1.3.1 Gráfico

Definição 1.3.5. Dado $f\colon \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$, o subconjunto do espaço

$$\mathrm{gr}(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\}$$

é chamado de **gráfico** da função.

A coordenada $z = f(x, y)$ representa a altura do gráfico de f acima do plano-xy, de fato embaixo no caso de um valor negativo.

Exercício 1.3.6. a) Visualize o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ usando um computador ou fazendo Exercício 1.3.9.
b) Verifique que o gráfico de $h(x, y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ é um cone.

Exercício 1.3.7. Esboce $\mathrm{gr}(f)$ para $f(x, y) := 6 - 3x - 2y$.

Solução. A equação $z = f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ representa um plano no $\mathbb{R}^3$. O plano passa o eixo-z na altura $z_0 = 6$. O plano passa o eixo-x num ponto da forma $(x_0, 0, 0)$, assim $0 = 6 - 3x_0 - 2 \cdot 0$, ou seja $x_0 = 2$. O plano passa o eixo-y num ponto da forma $(0, y_0, 0)$, assim $0 = 6 - 3 \cdot 0 - 2y_0$, ou seja $y_0 = 3$. Consequentemente o plano é aquele que contem o triangulo Δ cujos vértices são $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, e $(6, 0, 0)$.

1.3.2 Conjuntos de nível

As mapas para alpinistas mostram curvas de altura constante. A distância entre duas curvas vizinhas indica se uma área é mais plano (distância grande) ou mais inclinada (distância pequena).

Definição 1.3.8. A equação $f(x, y) = c$ determina o subconjunto do domínio dos pontos de valor c, chamada de **curva de nível** e denominada com o símbolo

$$f^{-1}(c) := \{f = c\} := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}.$$

No caso de $k \geq 3$ variáveis não fala-se de curva de nível, mas no caso $k = 3$ de **superfície de nível** e no caso $k > 3$ de **hipersuperfície de nível** (subconjunto do domínio $D \subset \mathbb{R}^k$ de dimensão $k - 1$). Um termo universal para $\{f = c\}$ independente do número de variáveis é **conjunto de nível**.

Para quase todos $c \in \mathbb{R}$ ou $f^{-1}(c) = \emptyset$ é o conjunto vazio ou $f^{-1}(c)$ é uma curva (dimensão 1). Para escolhas excepcionais $f^{-1}(c)$ ou é um ponto (dimensão 0) ou de dimensão 2.

Exercício 1.3.9. Determine as curvas de nível para $c = 0, 1, 2, 3$ no caso a) $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e b) $h(x, y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$; veja Exercício 1.3.6.