

# *Der Morse-Witten Komplex*

Joa Weber<sup>1</sup>

Februar 1993

Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik  
der Technischen Universität Berlin

Betreut von Prof. Dr. R. Seiler

---

<sup>1</sup>Technische Universität Berlin, Fachbereich Mathematik, Sekr. MA 7-2, Straße des 17. Juni 136,  
W-1000 Berlin 12  
E-mail: joa@math.tu-berlin.de

**Zielsetzung:** Wir konstruieren in dieser Arbeit den Morse-Witten Komplex für eine glatte geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M^n$ . Dieser besteht aus den Kettengruppen  $C_k$  und dem kanonischen Randoperator  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ . Die Kettengruppen werden von den kritischen Punkten einer Morse-Funktion  $f$  frei abelsch erzeugt, d.h.  $C_k \simeq \mathbb{Z}^{\#\text{Crit } f}$ . Der kanonische Randoperator ordnet einem Erzeuger  $x \in \text{Crit } f$  von  $C_k$  vom Morse-Index  $\text{Ind}_f(x) = k$  die Summe aller kritischen Punkte  $y$  vom Morse-Index  $\text{Ind}_f(y) = k - 1$  zu. Die Koeffizienten in dieser Summe hängen von der Anzahl und der Orientierung der isolierten Orbits zwischen  $x$  und  $y$  ab. Wir zeigen, daß  $(C_k, \partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  einen algebraischen Kettenkomplex darstellt, d.h. daß gilt

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \quad .$$

Ich möchte Ruedi Seiler für die Anregung zu dieser Arbeit danken. Für die Unterstützung bei dieser Arbeit, sowie das Ertragen meiner bohrenden Fragen, danke ich Ruedi Seiler, Andreas Knauf, Burkhard Nobbe, Sönke Seifarth, Dietmar Salamon, Marcin Poźniak sowie Matthias Schwarz.

Besonders hervorheben möchte ich die Gastfreundschaft des Mathematischen Instituts der Universität Warwick, insbesondere von Dietmar Salamon und John Jones, sowie von Matthias Schwarz vom Institut für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum.

# Inhalt

|            |   |     |
|------------|---|-----|
|            | <b>Einführung und Übersicht</b>                                 | i   |
| Kapitel 1  | <b>Grundlagen</b>   | 1   |
| 1.1        | Vektorfelder und Flüsse   | 2   |
| 1.2        | Morse-Theorie   | 13  |
| 1.3        | Gradientenfluß und (in)stabile Mannigfaltigkeiten               | 19  |
| Kapitel 2  | <b>Die Orbiträume <math>\widehat{M}_{x,y}</math></b>            | 29  |
| 2.1        | Transversalität   | 30  |
| 2.2        | Kompaktheit   | 41  |
| 2.3        | Glueing   | 51  |
| Kapitel 3  | <b>Konstruktion des Morse-Witten Komplex</b>                    | 66  |
| 3.1        | Orientierung  | 67  |
| 3.2        | Der Randoperator  | 75  |
| Appendix A | <b>Lyapunov-Funktionen und Modifikation der Morse-Funktion</b>  | 80  |
| Appendix B | <b>Kompaktheit von Trajektorienfolgen – analytischer Ansatz</b> | 93  |
| Appendix C | <b>Verträglichkeit von Glueing und Orientierung</b>             | 99  |
|            | Literatur   | 106 |
|            | Verwendete Symbole  | 108 |
|            | Index   | 110 |

# Einführung und Übersicht

In der einfachsten Version der Morse-Theorie haben wir folgende Situation:  $(M^n, g)$  sei eine endlich-dimensionale glatte geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  habe nur nichtdegenerierte kritische Punkte, d.h. für  $p \in M$  mit  $Df(p) = 0$  ist Null kein Eigenwert der Hesse-Form  $H^f := D^2f$ . So eine Funktion heißt Morse-Funktion. Die Anzahl der negativen Eigenwerte von  $H^f$  ist gleich dem Morse-Index  $Ind_f(p)$  von  $p$ . Sei nun  $c_k := Crit_k f$  und  $\beta_k$  bezeichne die  $k$ -te Betti-Zahl von  $M$ , so gelten die starken Morse-Ungleichungen [Mi1, §5]

$$c_k - c_{k-1} + \dots \pm c_0 \geq \beta_k - \beta_{k-1} + \dots \pm \beta_0, \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}.$$

Für  $k = n$  gilt die Gleichheit. Jetzt betrachten wir folgendes algebraische Objekt: Die Kettengruppen  $C_k$  seien von den kritischen Punkten von  $f$  vom Morse-Index  $k$  frei abelsch erzeugt, d.h.  $C_k \simeq \mathbb{Z}^{c_k}$ . Es ist bekannt [Wi], daß die starken Morse-Ungleichungen äquivalent zur Existenz von Gruppenhomomorphismen  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$  sind. Die starken Morse-Ungleichungen liefern jedoch keine kanonische Form für diese.

Witten definierte nun 1982 in [Wi] folgende kanonischen Randoperatoren

$$\begin{aligned} \partial_k: C_k &\rightarrow C_{k-1} \\ [x] \mapsto \partial_k[x] &:= \sum_{y \in Crit_{k-1} f} n(x, y) [y], \quad x \in Crit_k f. \end{aligned}$$

Er erkannte, daß die Familie von Gruppen und Homomorphismen  $(C_k, \partial_k)_k \in \mathbb{N}$ , die einen algebraischen Kettenkomplex darstellt (d.h. es gilt  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ ), die Homologie von  $M$  reproduziert. Diesen Komplex nennen wir im folgenden Morse-Witten Komplex. Er wurde bereits früher, insbesondere von Thom [Th], Smale [Sm2] und Milnor [Mi2] untersucht. Eine schöne Übersicht über verschiedene Aspekte der Morse-Theorie stellt der Artikel von Bott [Bo] dar. In den 80'er Jahren wurde die Idee des Morse-Witten Komplex von Floer aufgegriffen, um ein Analogon auf dem Schleifenraum  $\Omega$  von  $M$  zu konstruieren. Er betrachtet das symplektische Wirkungsfunktional auf  $\Omega$ , sowie dessen kritische Punkte und ordnet diesen relative Morse-Indizes zu. Den Randoperator konstruiert er analog mittels isolierter Orbits. Er erhält so die Floer-Homologiegruppen, welche ebenfalls die Homologie von  $M$  reproduzieren. Literatur zur Floer-Homologie: [F1]...[F5], [Sa2].

Das Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen, daß der Morse-Witten Komplex ein algebraischer Kettenkomplex ist, d.h. daß gilt  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ . Dazu halten wir uns an das von Floer zur Konstruktion seiner Homologiegruppen vorgegebene Programm:

- Transversalität
- Kompaktheit
- Glueing

Wir verwenden jedoch nicht (wie Floer) einen funktionalanalytischen Zugang über die Nullstellen einer Fredholmabbildung (hier des Operators  $\frac{\partial}{\partial t} + \nabla f$ , siehe [Sch]), sondern einen differentialtopologischen Zugang über die transversalen Schnitte der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten.

Das Kapitel 1 "GRUNDLAGEN" ist eine Zusammenfassung von grundlegenden Resultaten aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, der Morse-Theorie, sowie der Theorie der dynamischen Systeme. Es kann vom diesbezüglich vorgebildeten Leser sicher ohne weiteres überschlagen werden.

In Kapitel 2 "DIE ORBITRÄUME  $\hat{M}_{x,y}$ " werden diese analysiert. Zuerst diskutieren wir in Abschnitt 2.1 "Tranversalität" die Morse-Smale Bedingung für  $\nabla f$ . Diese ist erfüllt, falls  $W^u(x) \cap W^s(y)$  für alle  $x, y \in \text{Crit } f$  ein transversaler Schnitt ist. Wir können dies durch eine kleine Variation von  $\nabla f$  in  $\text{Grad}^\infty(M)$  erreichen.

Die "Kompaktheit" der Orbiträume wird in Abschnitt 2.1 untersucht. Es stellt sich heraus, daß diese nur am Rand von  $\hat{M}_{x,y}$  verletzt ist. Die Hindernisse zur Kompaktheit stellen sogenannte  $(l-1)$ -fach gebrochene Orbits dar. Diese sind  $l$ -Tupel  $(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l)$  von Orbits, wobei das Ende bzw. der Anfang von Nachbarorbits jeweils aus demselben kritischen Punkt bestehen.  $\hat{q}_1$  fängt bei  $x$  an, und  $\hat{q}_l$  endet bei  $y$ .

In Abschnitt 2.3 "Glueing" diskutieren wir ein umgekehrtes Konzept. Wir verkleben 1-fach gebrochene Orbits  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x,y} \times \hat{M}_{y,z}$  (im Fall  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(z) = 2$ ) in eindeutiger Weise zu einem Orbit  $\hat{u} \#_\rho \hat{v} \in \hat{M}_{x,z}$ . Dieser konvergiert für  $\rho \rightarrow 0$  gegen  $(\hat{u}, \hat{v})$ .

In Kapitel 3 wird die "KONSTRUKTION DES MORSE-WITTEN KOMPLEX" behandelt. Zunächst führen wir jedoch in Abschnitt 3.1 "Orientierung" ein Konzept zur kanonischen Orientierung der isolierten Orbits zwischen zwei kritischen Punkten ein. Wir ordnen jedem isolierten Orbit  $u$  ein charakteristisches Vorzeichen  $n_u \in \{\pm 1\}$  zu, dieses konstruieren wir in Abhängigkeit einer Wahl der Orientierungen aller instabilen Mannigfaltigkeiten von  $M$ . Die Orientierbarkeit von  $M$  setzen wir nicht voraus, die Orientierbarkeit der instabilen Mannigfaltigkeiten ergibt sich aus deren Zusammenziehbarkeit.

In Abschnitt 3.2 "Der Randoperator" definieren wir den Morse-Witten Komplex wie vorher beschrieben. Wir führen im Fall  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(z) = 2$  auf der Menge  $\hat{O}_{x,z}^1$  aller 1-fach gebrochenen Orbits zwischen  $x$  und  $z$  eine Äquivalenzrelation ein. Es ist  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \sim (\hat{u}_2, \hat{v}_2)$ , falls  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  und  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2)$  den Rand einer (1-dimensionalen) Zusammenhangskomponente  $\hat{M}_{x,z}^1$  von  $M_{x,z}$  darstellen.  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  und  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2)$  heißen in diesem Fall cobordant.

Aufgrund der Analyse der Orbiträume  $\hat{M}_{x,z}$  in den Abschnitten 2.2 "Kompaktheit" und 2.3 "Glueing", können wir schließen, daß die Äquivalenzklassen und die zu  $(0,1)$  diffeomorphen Zusammenhangskomponenten von  $\hat{M}_{x,z}$  in bijektiver Beziehung stehen, und jede Äquivalenzklasse aus genau zwei Repräsentanten  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \neq (\hat{u}_2, \hat{v}_2)$  besteht. Bei der Berechnung von  $\partial_{k-1} \circ \partial_k[x]$  summieren wir (unter anderem) das Produkt der charakteristischen Vorzeichen von 1-fach gebrochenen Orbits über die (genau zwei) Repräsentanten einer Äquivalenzklasse. Diese Summe ist nun wegen

$$n_{u_1} \cdot n_{v_1} = -n_{u_2} \cdot n_{v_2}$$

(aus Abschnitt 3.1) für jede Äquivalenzklasse Null. Abschließend diskutieren wir noch die möglichen Typen der (2-dimensionalen) Zusammenhangskomponenten von  $M_{x,z}$ .

In Appendix A diskutieren wir eine Methode zur Modifikation der Morse-Funktion außerhalb einer isolierenden Umgebung von  $S(x,y) := M_{x,y} \cup \{x,y\}$ , so daß wir oBdA annehmen können

$$f^{-1}[f(y), f(x)] \cap \text{Crit } f = \{x, y\} \quad .$$

Diese Voraussetzung benötigen wir für eine, uns von S.P. Novikov vorgeschlagene, Beweisidee für die Endlichkeit der Anzahl von isolierten Orbits zwischen zwei kritischen Punkten.

In Appendix B diskutieren wir eine weitere Variante dieses Beweises. Wir analysieren dabei den Mannigfaltigkeiten  $M_{x,y}$  entsprechende Funktionenräume  $\mathcal{M}_{x,y}$ . Diese Methode stammt aus [Sa2] und [Po].

In Appendix C konstruieren wir eine spezielle Glueing-Abbildung um Orientierungen von 1-fach gebrochenen Orbits auf eine Orientierung der zugehörigen Zusammenhangskomponente von  $M_{x,z}$  abzubilden. Falls wir cobordante 1-fach gebrochene Orbits mittels der charakteristischen Vorzeichen und der Flußrichtung kanonisch orientieren, so wird eine kanonische Orientierung auf der zugehörigen Zusammenhangskomponente von  $M_{x,z}$  induziert.

**Terminologie:**

- Innerhalb eines Kapitels erfolgen Verweise zweistellig. Die erste Stelle gibt die Nummer des Abschnitts innerhalb des Kapitels an, die zweite Stelle die Nummer des Objekts (des Satzes, der Gleichung usw.), z.B. verweist (2.5) in Kapitel 3 auf die Gleichung 5 in Abschnitt 3.2.

Verweise zwischen Kapiteln erfolgen dreistellig. Die erste Stelle gibt jetzt das Kapitel an, die zweite den Abschnitt innerhalb dieses Kapitels und die dritte die Nummer des Objekts, z.B. verweist (3.2.5) auf dieselbe Gleichung wie zuvor.

- Eine Umgebung setzen wir, soweit nicht anders vermerkt, immer als offen voraus.
- Mit  $(M, g)$  bezeichnen wir, soweit nicht anders vermerkt, eine glatte endlich-dimensionale geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $f$  bezeichnet eine glatte Morse-Funktion auf  $M$ .

# Kapitel 1

## Grundlagen

In diesem ersten Kapitel sollen die, dieser Arbeit zugrundeliegenden, Ideen und Aspekte der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, der Morse-Theorie, sowie der Theorie der dynamischen Systeme sowohl referiert, als auch einige für uns wichtige Folgerungen aus ihnen hergeleitet werden.

In Abschnitt 1.1 "VEKTORFELDER UND FLÜSSE" behandeln wir die, durch ein Vektorfeld  $X$  auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M^n$ , gegebene Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = X(x(t))$ . Lösungen dieser können, wegen der Kompaktheit von  $M$ , auf ganz  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  fortgesetzt werden. Wir führen die Begriffe der Hyperbolizität und Nichtdegeneriertheit von Singularitäten von Vektorfeldern bzw. Fixpunkten von Diffeomorphismen ein und zeigen, daß deren Anzahl für kompaktes  $M$  endlich ist.

In Abschnitt 1.2 "MORSE-THEORIE" definieren wir zunächst den symmetrischen  $(0,2)$ -Hesse-Tensor  $H^f(\cdot, \cdot)$  als das zweite kovariante Differential von  $f \in C^r(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 2$ . Für einen kritischen Punkt  $p$  von  $f$  definieren wir dann eine Matrix  $H_p^f$  und zeigen

$$H^f(X, Y) = \langle D\nabla f(p)X, Y \rangle = X^t H_p^f Y \quad , X, Y \in T_p M .$$

Wesentlich für die Wohldefiniertheit des Morse-Witten Komplex in Kapitel 3, ist das Resultat: Eine Morse-Funktion auf einer kompakten Mannigfaltigkeit besitzt nur endlich viele kritische Punkte. In diesem Abschnitt werden außerdem wichtige Ergebnisse, wie das Morse-Lemma, sowie die starken und schwachen Morse-Ungleichungen zitiert.

In Abschnitt 1.3 "GRADIENTENFLUß UND (IN)STABILE MANNIGFALTIGKEITEN" diskutieren wir spezielle Eigenschaften eines, durch ein Gradientenvektorfeld  $-\nabla g$ , erzeugten Flusses ( $g$  ist längs Orbits monoton fallend,  $\nabla g$  ist orthogonal zu Niveauflächen von  $g$  und ein Orbit schneidet eine Niveaufläche von  $g$  höchstens ein mal). Im Fall einer Morse-Funktion  $f$  bestehen die "Enden" eines Orbits aus je genau einem kritischen Punkt von  $f$ . Das Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, daß die Mengen aller Punkte von  $M$ , die im limes  $t \rightarrow \infty$  in eine Singularität  $p$  von  $f$  hinein- bzw. herausfließen (die sogenannte stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit von  $p$ ), Untermannigfaltigkeiten von  $M$  sind. Für eine allgemeine Funktion  $g$  sind diese nämlich lediglich in  $M$  immersierte Mengen.

# 1.1 Vektorfelder und Flüsse

Im ersten Teil dieses Abschnitts "DER FLUß EINES VEKTORFELDES" soll dieser Begriff eingeführt und diskutiert werden. Im Falle einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M^n$ , stellt es sich heraus, daß die Lösungen des AWP's

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= X(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

auf ganz  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$  fortgesetzt werden können. Die Familie von Zeit- $t$ -Abbildungen  $\{\eta_t\}_{t \in \bar{\mathbb{R}}}$  ist in diesem Fall eine einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen.

Im zweiten Teil "LINEARE VEKTORFELDER" zeigen wir, daß die Zeit- $t$ -Abbildung eines linearen Vektorfeldes  $L$  durch  $e^{tL}$  gegeben ist (Prop. 1.2). Das anschließende wichtige Resultat (Lemma 1.3) besagt, daß die Linearisierung  $D\varphi_t(p)$  der durch ein Vektorfeld  $X$  erzeugten Zeit- $t$ -Abbildung  $\varphi_t$  an einer hyperbolischen Singularität  $p \in M$ , gleich dem Exponential des linearisierten Vektorfeldes (mal  $t$ ) ist:

$$D\varphi_t(p) = e^{t \cdot DX(p)} .$$

Der dritte Teil ist mit "HYPERBOLIZITÄT UND NICHTDEGENERIERTHEIT" überschrieben. Ein bekanntes Resultat, das in dieser Arbeit eine wichtige Position einnimmt, zitieren wir in Prop. 1.6: Ein hyperbolischer linearer Isomorphismus  $A \in Gl(\mathbb{R}^n)$  gibt Anlaß zu einer eindeutigen Zerlegung  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ , so daß  $A|_{E^s}$  bzw.  $A|_{E^u}$  kontrahierend bzw. expandierend wirkt. Die Nichtdegeneriertheit von Singularitäten von  $\nabla f$  (bzw. von Fixpunkten von Diffeomorphismen) hat deren Isoliertheit zur Folge (Lemma 1.9). Dies wiederum liefert, falls  $M$  kompakt ist, daß ihre Anzahl endlich ist (Kor. 1.10). Dasselbe gilt natürlich für den Spezialfall von hyperbolischen Singularitäten bzw. Fixpunkten.

## DER FLUß EINES VEKTORFELDES

Zuerst soll die Flußabbildung erklärt und definiert werden, dies geschieht größtenteils wie in [H, Kap. 6.2].

Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Ein  **$C^r$ -Vektorfeld auf  $W$**  ist eine  $C^r$ -Abbildung  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für  $1 \leq r \leq \omega$  ist  $g$  lokal Lipschitz-stetig, deswegen gelten für das **AWP** (Anfangswertproblem)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \varphi'(t) &= g(\varphi(t)) \\ \varphi(0) &= x \quad , \quad x \in W \end{aligned}$$

die bekannten Resultate über die (lokale) Existenz, Eindeutigkeit, maximale Fortsetzbarkeit und Differenzierbarkeit von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe z.B. [A]).

Es existiert also ein offenes Intervall  $J \subset \mathbb{R}$  um 0 und eine  $C^{r+1}$ -Abbildung

$$\varphi : (J, 0) \rightarrow (W, x) \quad ,$$

die (1.1) erfüllt. Falls  $\varphi_1 : J \rightarrow W$  eine weitere Lösung von (1.1) ist, so folgt aus der Eindeutigkeit einer Lösung einer **ODE** (ordinary differential equation), daß  $\varphi = \varphi_1$  auf  $J \cap J_1$ .  $\varphi$  und  $\varphi_1$  lassen sich also zu einer Lösung von (1.1) auf  $J \cup J_1$  kombinieren. Wenn  $J$  das maximale Intervall ist, auf dem eine Lösung  $\varphi$  von (1.1) existiert, so sind  $J$  und  $\varphi$  eindeutig festgelegt. Wir bezeichnen im folgenden dieses **maximale Intervall** mit  $J(x)$  und mit

$$(1.2) \quad \varphi^x : J(x) \rightarrow W$$

die entsprechende Lösung von (1.1). Die  $C^{r+1}$ -Abbildung  $\varphi^x$  heißt **Trajektorie des Vektorfeldes  $g$** , die Menge  $\varphi^x(J(x)) \subset W$  heißt **Orbit des Vektorfeldes  $g$  durch den Punkt  $x \in W$** .

Sei  $\Omega := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times W \mid t \in J(x)\}$ . Die  $C^r$ -Abhängigkeit der Lösung des AWP's (1.1) vom Anfangswert  $\varphi_0 = \varphi(0)$  impliziert, daß für alle  $(t', x') \in \mathbb{R} \times W$ , die genügend nahe bei  $(t, x) \in \Omega$  liegen, gilt:  $t' \in J(x')$ ; also  $(t', x') \in \Omega$ . Anders ausgedrückt:  $\Omega$  ist offen in  $\mathbb{R} \times W$ .

Die  $C^r$ -Abbildung

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varphi : \Omega &\rightarrow W \\ (t, x) &\mapsto \varphi(t, x) := \varphi^x(t) \end{aligned}$$

heißt der **von  $g$  erzeugte Fluß**.

Sei  $P \subset W$  kompakt,  $x \in W$  beliebig,  $\overline{\varphi^x(J(x))} \cap P$  ist eine kompakte Teilmenge von  $W$ . Das Urbild  $J_P$  dieser insbesondere abgeschlossenen Menge unter der stetigen Abbildung  $\varphi^x : J(x) \rightarrow W$  ist zunächst einmal abgeschlossen in  $J(x)$  bezüglich der Teilraumtopologie von  $J(x) \subset \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ . Die Abgeschlossenheit in  $\overline{\mathbb{R}}$  ergibt sich folgendermaßen: Sei  $J(x) \neq \overline{\mathbb{R}}$ , denn sonst sind wir fertig. Wenn  $J_P$  in  $\overline{\mathbb{R}}$  nicht abgeschlossen wäre, so gäbe es eine Folge  $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $t_j \in J_P$  und  $t_0 := \lim_{j \rightarrow \infty} t_j \notin J_P$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  ist  $\varphi^x(t_j) \in P$ ; wegen der Stetigkeit von  $\varphi^x$  gilt:  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi^x(t_j) = \varphi^x(\lim_{j \rightarrow \infty} t_j) = \varphi^x(t_0) \notin P$ , da  $t_0 \notin J_P$ . Dies ist aber ein Widerspruch zur Kompaktheit von  $P$ .

Sei nun  $x \in P$ , so daß  $\varphi^x(t) \in P$  für alle  $t \in J(x)$ , also  $J_P = J(x) = J(x) \cap \overline{\mathbb{R}}$ .  $J_P \neq \emptyset$  ist nun zum einen abgeschlossen in  $\overline{\mathbb{R}}$ , zum anderen jedoch als Schnitt zweier offener Mengen auch offen in  $\overline{\mathbb{R}}$ . Hieraus folgt  $J_P = J(x) = \overline{\mathbb{R}}$ . Also gilt insbesondere:

$$(1.4) \quad \text{Falls der Orbit durch } x \text{ kompakten Abschluß in } W \text{ hat, dann ist } J(x) = \overline{\mathbb{R}}.$$

Als nächstes brauchen wir den Begriff einer Mannigfaltigkeit (siehe z.B. [H, Kap. 1.1]). Sei  $M$  ein topologischer Raum, der lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist. Das heißt es existiert eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$  von  $M$ , sowie Homöomorphismen  $\{\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i \in \Lambda}$ . Ein **Homöomorphismus** ist eine stetige Abbildung, deren Inverse existiert und ebenfalls stetig ist. Ein  **$C^r$ -Diffeomorphismus**,  $r \geq 1$ , ist ein Homöomorphismus, der samt seiner Inversen  $r$ -fach stetig differenzierbar ist. Ein Paar  $(\psi_i, U_i)$  heißt **Karte von  $M$** , eine Menge von Karten  $\Phi := \{(\psi_i, U_i)\}_{i \in \Lambda}$  heißt **Atlas von  $M$** .

Zwei Karten  $(\psi_i, U_i), (\psi_j, U_j)$  aus  $\Phi$  haben  **$C^r$ -Überlapp**, falls die Koordinatenwechsel

$$\begin{aligned} \psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j) \\ \psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) &\rightarrow \psi_i(U_i \cap U_j) \end{aligned}$$

$r$  mal stetig differenzierbar sind. Ein Atlas  $\Phi$  von  $M$  heißt  **$C^r$ -Atlas**, falls jedes Paar seiner Karten  $C^r$ -Überlapp hat. In diesem Fall existiert ein eindeutiger **maximaler  $C^r$ -Atlas  $\Psi$** , der  $\Phi$  enthält.  $\Psi$  heißt auch  **$C^r$  differenzierbare Struktur**. Das Paar  $(M, \Psi)$  heißt  **$n$ -dimensionale  $C^r$ -Mannigfaltigkeit**.

Wir wollen im folgenden nur  $n$ -dimensionale  $C^r$ -Mannigfaltigkeiten  $(M, \Psi)$  betrachten, bei denen  $M$  parakompakt und Hausdorffsch ist, sowie eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Sei nun  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  das **Tangentialbündel von  $M$**  (siehe z.B. [H, Kap. 1.2]),  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$  ist der Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $p$ . Ein Element von  $TM$  ist ein 2-Tupel  $(p, \xi)$ , wobei  $p \in M$  und  $\xi \in T_p M$  ist. Die Projektion  $\pi$  ist folgende Abbildung

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M \\ (p, \xi) &\mapsto p \end{aligned}.$$

Ein  **$C^r$ -Schnitt** von  $TM$  ist eine  $C^r$ -Abbildung

$$(1.6) \quad s : M \rightarrow TM,$$

so daß gilt

$$(1.7) \quad \pi \circ s = Id_M.$$

Jetzt wollen wir definieren, was ein  $C^r$ -Vektorfeld auf  $M$  ist. Es sei  $M$  als **geschlossen** (d.h. kompakt und unberandet) vorausgesetzt, da später in dieser Arbeit nur dieser Fall betrachtet wird. Ein  **$C^r$ -Vektorfeld auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$**  ist ein  $C^r$ -Schnitt  $X$  von  $TM$ .

Eine **Lösungskurve oder Trajektorie von  $X$**  ist eine  $C^{r+1}$ -Abbildung  $\eta : J \rightarrow M$ , wobei  $J \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist, so daß gilt:  $\eta'(t) = X(\eta(t))$  für jedes  $t \in J$ . Das AWP auf  $M$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \eta'(t) &= X(\eta(t)) \\ \eta(0) &= p, \quad p \in M \end{aligned}$$

kann jetzt mittels Karten auf das AWP (1.1) im  $\mathbb{R}^n$  zurückgeführt werden. Sei  $(\psi_i, U_i)$  eine Karte mit  $p \in U_i$  und  $W := \psi_i(U_i)$ . Diese induziert durch den Diffeomorphismus  $\psi_i$  ein  $C^r$ -Vektorfeld

$$(1.9) \quad g_i : W \xrightarrow{\psi_i^{-1}} U_i \xrightarrow{X} TU_i \xrightarrow{D\psi_i} \mathbb{R}^n$$

auf  $W$ . Beachte, daß  $D\psi_i(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  für jedes  $p \in U_i$  ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Wir

sehen das so ein : Da  $\psi_i$  ein Diffeomorphismus ist, existiert  $\psi_i^{-1}$  und es gilt :

$$\psi_i \circ \psi_i^{-1} = Id_{\psi_i(U_i)} \subset \mathbb{R}^n \quad .$$

Wir differenzieren beide Seiten :

$$(1.10) \quad D(\psi_i \circ \psi_i^{-1}(q)) = D\psi_i|_{\psi_i^{-1}(q)} \circ D(\psi_i^{-1})|_q = D(Id_{\psi_i(U_i)})|_q = \quad n \quad .$$

$D\psi_i(p = \psi_i^{-1}(q))$  besitzt also eine Inverse  $(D\psi_i(p))^{-1} = D\psi_i^{-1}(q = \psi_i p)$  und ist somit ein Isomorphismus.

Das AWP

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \varphi_i'(t) &= g_i(\varphi_i(t)) \\ \varphi_i(0) &= \psi_i(p) \end{aligned}$$

hat nun, wie anfangs gezeigt, eine eindeutige Lösung  $\varphi_i^{\psi_i(p)}$  auf einem maximalen Intervall  $J_i(\psi_i(p))$ . Es gilt  $\varphi_i = \psi_i \circ \eta_i$ , wobei  $\eta_i : J \rightarrow M$  eine Lösungskurve von  $X$  durch  $p$  sei, mit  $\eta_i(J) \subset U_i$ , denn

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \varphi_i'(t) &= D\psi_i|_{\eta_i(t)} \circ \eta_i'(t) \\ &= D\psi_i|_{\eta_i(t)} \circ X(\eta_i(t)) \\ &= (D\psi_i|_{\eta_i(t)} \circ X \circ \psi_i^{-1}) \circ \psi_i(\eta_i(t)) \\ &= g_i(\varphi_i(t)) \\ \varphi_i(0) &= \psi_i \circ \eta_i(0) = \psi_i(p) \quad . \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Lösungskurve  $\eta_i : J_i(p) := J_i(\psi_i(p)) \rightarrow U_i$  von  $X$  durch  $p$ , indem wir die Trajektorie  $\varphi_i^{\psi_i(p)}$  mit dem Diffeomorphismus  $\psi_i^{-1}$  verknüpfen :

$$(1.13) \quad \eta_i = \psi_i^{-1} \circ \varphi_i : J_i(\psi_i(p)) \rightarrow U_i \subset M \quad .$$

Im Falle  $J_i(p) \neq \overline{\mathbb{R}}$  finden wir ein  $t_0 \in J_i(p)$  mit  $\eta_i(t_0) \in U_j$  für eine Karte  $(\psi_j, U_j)$ ,  $j \neq i$ . Jetzt betrachten wir das AWP

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \eta_j'(t) &= X(\eta_j(t)) \\ \eta_j(t_0) &= \eta_i(t_0) \end{aligned}$$

und setzen dann die beiden Lösungen  $\eta_i$  und  $\eta_j$  (welche auf  $J_i(p) \cap J_j(\eta_i(t_0))$  identisch sind) zu einer Lösung  $\eta_{ij} : J_i(p) \cup J_j(\eta_i(t_0)) \rightarrow U_i \cup U_j$  eindeutig fort. Dieses Verfahren bricht, aufgrund der Kompaktheit von  $M$ , nach endlich vielen Schritten ab und wir erhalten die  **$C^{r+l}$ -Trajektorie von  $X$**

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \eta^p(\cdot) &= \eta(\cdot, p) : J(p) \rightarrow M \\ \text{mit } \eta(0) &= p \text{ und } \eta'(t) = X(\eta(t)) \quad . \end{aligned}$$

Da  $M$  kompakt ist, folgt daß der Orbit durch  $p \in M$  kompakten Abschluß hat. (1.4) liefert nun :  $J(p) = \overline{\mathbb{R}}$ . Also gilt

$$(1.16) \quad \Omega = \{(t, p) \in \overline{\mathbb{R}} \times M \mid t \in J(p) = \overline{\mathbb{R}}\} = \overline{\mathbb{R}} \times M \quad .$$

Der **Fluß von  $X$**  ist die  $C^r$ -Abbildung

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \eta : \Omega = \overline{\mathbb{R}} \times M &\rightarrow M \\ (t, p) &\mapsto \eta(t, p) \end{aligned}$$

In der  $t$ -Variablen ist  $\eta(\cdot, p) = \eta^p(\cdot)$   $C^{r+l}$ , wie zuvor gezeigt; die  $p$ -Abhängigkeit von  $\eta$  ist von der Klasse  $C^r$ , da sie die  $C^r$ -Abhängigkeit des AWP's (1.14) vom Anfangswert  $\eta_j(t_0)$  widerspiegelt; diese wird wiederum auf die  $C^r$ -Abhängigkeit des AWP's (1.11) von dessen Anfangswert zurückgeführt, was – wie am Anfang erwähnt – ein bekanntes Resultat für ODE's darstellt.

Für eine geschlossene Mannigfaltigkeit  $M$  ist nun, für jedes  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\eta_t : M \rightarrow M$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus. Zum Beweis geben wir einfach die Inverse von  $\eta_t$  an :

$$(1.18) \quad (\eta_t)^{-1} = \eta_{-t} \quad .$$

Daß  $\eta_{-t} \circ \eta_t = Id_M$  gilt, folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsresultat für Lösungen von ODE's,

sowie der Geschlossenheit von  $M$  (da  $M$  keinen Rand besitzt, führen Trajektorien weder aus  $M$  heraus noch in  $M$  hinein; das ist für die Bijektivität von  $\eta_t$  entscheidend).

Die Abbildung

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \text{Diff}^r(M) \\ t &\mapsto \eta(t, \cdot) = \eta_t(\cdot) \end{aligned}$$

ist insbesondere stetig. Die Familie  $\{\eta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  stellt eine **einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen** dar. Die Gruppenwirkung ist die Komposition von Diffeomorphismen

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \circ : \text{Diff}^r(M) \times \text{Diff}^r(M) &\rightarrow \text{Diff}^r(M) \\ (\eta_t, \eta_s) &\mapsto \eta_t \circ \eta_s = \eta_{t+s} \end{aligned}$$

Ein Vektorfeld heißt **vollständig integrabel**, falls  $J(p) = \bar{\mathbb{R}}$  für alle  $p \in M$ . Jedes Vektorfeld auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit ist also vollständig integrabel.

## LINEARE VEKTORFELDER

$\mathfrak{X}^r(M)$  bezeichne wie üblich die **Menge der  $C^r$ -Vektorfelder auf  $M$** ,  $\mathfrak{X}(M)$  sei die Menge der glatten ( $C^\infty$ -) Vektorfelder auf  $M$ . Für  $M = \mathbb{R}^n$  kann die Menge der linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$   $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  als Teilmenge von  $\mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^n)$  aufgefaßt werden.  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  ist dann gerade die **Menge der linearen Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^n$** . Ein Punkt  $p \in M$  mit  $X(p) = 0 \in T_p M$  heißt **Singularität** des Vektorfeldes  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ . Es ist klar, daß  $p$  ein **Fixpunkt** der durch  $X$  erzeugten **Zeit- $t$ -Abbildung**  $\eta_t \in \text{Diff}^r(M)$  ist.

Zunächst wollen wir eine einfache Art von Vektorfeldern betrachten, nämlich die linearen Vektorfelder. Mehr Details finden sich in [Ar] und [PdM, Kap. 2, Abschn. 2].

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  ist ein Vektorraum mit der üblichen Operatornorm

$$\|L\| := \sup\{\|Lv\|; \|v\| = 1\} \quad .$$

Für  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  ist die Summe  $\sum_{k=0}^\infty L^k/k!$  konvergent in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , also ist die Abbildung

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \text{Exp} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ L &\mapsto \text{Exp}(L) := e^L := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} L^k \end{aligned}$$

wohldefiniert; sie heißt **Exponentialabbildung**. Es gilt das

**Lemma 1.1** [PdM, Kap. 2, Lemma 2.2] Sei  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  definiert durch  $\alpha(t) := e^{tL}$  mit  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\alpha$  differenzierbar und es ist  $\alpha'(t) = L e^{tL}$ .

BEWEIS Sei  $\alpha_m(t) := tL + \frac{t^2}{2!}L^2 + \dots + \frac{t^m}{m!}L^m$ .  $\alpha_m$  ist als Polynom in  $t$  mit Koeffizienten aus  $\mathbb{R}^{2n}$  differenzierbar in  $t$ ; wir erhalten

$$\alpha_m'(t) = L + tL^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}L^m = L\alpha_{m-1}(t) \quad .$$

$\alpha_m(t)$  konvergiert auf beschränkten Teilmengen von  $\mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $e^{tL}$ , wir können also Limes und Differentiation vertauschen; es ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) = \frac{\partial}{\partial t} \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m(t) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_m(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} L \alpha_{m-1}(t) \\ &= L \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{m-1}(t) = L \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m(t) \\ &= L e^{tL} \quad . \end{aligned}$$

□

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen einem linearen Vektorfeld  $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$  und dem davon erzeugten (linearen) Fluß:

**Proposition 1.2** [PdM, Kap. 2, Prop. 2.3] Sei  $L$  ein lineares Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch  $\varphi(t, x) := e^{tL} x$ , der vom Vektorfeld  $L$  erzeugte Fluß.

BEWEIS Nach Lemma 1.1 ist die Abbildung  $t \mapsto e^{tL}$  differenzierbar; da  $e^{tL} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$  ist, gilt

$$(1.22) \quad \frac{\partial}{\partial x} e^{tL} x = D(e^{tL})(x) \circ \frac{\partial}{\partial x} Id(x) = D(e^{tL})(x) \circ Id = D(e^{tL})(x) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Die Kettenregel liefert nun aus der partiellen Differenzierbarkeit von  $\varphi$  nach den beiden Variablen  $t$  und  $x$  die Differenzierbarkeit von  $\varphi$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} e^{tL} x \\ &= L \circ e^{tL} x && , \text{ Lemma 1.1} \\ &= L \circ \varphi(t, x) \\ \varphi(0, x) &= e^0 x \\ &= x \\ &= x \quad , \forall x \in \mathbb{R}^n. && \square \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir den Zusammenhang zwischen der Linearisierung  $D\varphi_t(p)$ , der von einem Vektorfeld  $X$  erzeugten Zeit- $t$ -Abbildung  $\varphi_t$ , und der durch die Linearisierung  $DX(p)$  des Vektorfeldes erzeugten (linearen) Zeit- $t$ -Abbildung  $e^{t \cdot DX(p)}$ , untersuchen. Es gilt das

**Lemma 1.3** Sei  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , und  $p \in M$  sei eine Singularität von  $X$ . Für festes  $t \in \mathbb{R}$  sei  $\varphi_t \in \text{Diff}^r(M)$ , die von  $X$  erzeugte Zeit- $t$ -Abbildung. Dann gilt

$$(1.23) \quad D\varphi_t(p) = e^{t \cdot DX(p)} \quad .$$

BEWEIS  $\varphi_t$  erfüllt, wie zu Anfang dieses Kapitels ausgeführt, die ODE (1.8)  $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t = X \circ \varphi_t$ ; weiter gilt  $\varphi_0 = Id_M$ .  $D\varphi_t \in C^{r-1}(TM, TM)$  wird der zu  $\varphi_t$  gehörige **Tangentialfluß** genannt; es ist  $D\varphi_t(q, \xi) = (\varphi_t q, D\varphi_t(q)\xi)$ . Weil  $p$  eine Singularität von  $X$  ist, gilt  $\varphi_t p = p$ , und  $D\varphi_t(p)$  wird zu einem linearen Isomorphismus auf  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$ , d.h.  $D\varphi_t(p) \in Gl(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ .

Sei  $\xi \in T_p M$  und  $c \in C^1((-1, 1), M)$  mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = \xi$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D\varphi_t(p) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_t(c(\tau)) \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(c(\tau)) \Big|_{\tau=0} && , \text{ Schwarz} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} (X \circ \varphi_t)(c(\tau)) \Big|_{\tau=0} && , (1.8) \\ &= DX(\varphi_t c(0)) \circ D\varphi_t(c(0)) c'(0) \\ &= DX(p) \circ D\varphi_t(p) \xi \end{aligned}$$

Sei nun  $x(t) := D\varphi_t(p)\xi$ ,  $A := DX(p)$ , dann erhalten wir das vertraute lineare System von ODE's

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \quad , \\ x(0) &= D\varphi_0(p)\xi = D(Id_M)(p)\xi = \xi = \xi \quad . \end{aligned}$$

Dieses besitzt die Lösung

$$x(t) = e^{tA} x_0 = e^{t \cdot DX(p)} \xi \quad .$$

Zusammen mit der Definition von  $x(t)$ , folgt nun

$$D\varphi_t(p)\xi = e^{t \cdot DX(p)} \xi \quad , \forall \xi \in T_p M \quad ,$$

also gilt

$$D\varphi_t(p) = e^{t \cdot DX(p)} \quad . \quad \square$$

**Bemerkung 1.1** i) Es ist in obigem Lemma entscheidend, daß  $p$  eine Singularität von  $X$ , und damit ein Fixpunkt von  $\varphi_t$ , ist. Sonst wäre nämlich  $\frac{\partial}{\partial t} D\varphi_t(p) = DX(\varphi_t p) \circ D\varphi_t(p)$ , wobei jetzt der Term  $DX(\varphi_t p)$  von  $t$  abhängig ist. Die ODE verliert also ihre einfache Gestalt und ist nicht mehr mittels der Exponentialabbildung lösbar.

ii) Das Lemma besagt, daß folgendes Diagramm kommutiert

$$(1.24) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M) & \xrightarrow{\text{Zeit-}t\text{-Abb.}} & \text{Diff}(M) \\ \downarrow \text{Linear. bei Sing. } p & & \downarrow \text{Linear. am FP } p \\ \mathcal{L}(T_p M) & \xrightarrow{\text{Zeit-}t\text{-Abb.}} & \text{Gl}(T_p M) \end{array} .$$

Die Eigenwerte von  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Wenn wir auch komplexe Nullstellen zulassen, so erhalten wir  $n$  Nullstellen (gezählt mit algebraischer Vielfachheit), diese bilden das **komplexe Spektrum  $\text{Spec}(L)$  von  $L$** . Später brauchen wir das Resultat

**Proposition 1.4** [PdM, Kap. 2, Prop. 2.7] Sei  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  und  $\lambda \in \text{Spec}(L)$ , dann ist  $e^\lambda \in \text{Spec}(e^L)$  und die algebraischen Vielfachheiten von  $\lambda$  und  $e^\lambda$  sind gleich.

### HYPERBOLIZITÄT UND NICHTDEGENERIERTHEIT

Jetzt wollen wir uns mit einer speziellen Art von Vektorfeldern und Diffeomorphismen näher beschäftigen, nämlich mit sogenannten hyperbolischen Vektorfeldern und Diffeomorphismen. Bekannte Resultate werden ohne Beweise zitiert; diese, sowie mehr Details finden sich beispielsweise in [PdM, Kap. 2, Abschn. 2 und 3].

Ein **lineares Vektorfeld**  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  heißt **hyperbolisch**, falls

$$(1.25) \quad \text{Spec}(L) \cap \{\xi \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(\xi) = 0\} = \emptyset \quad ,$$

d.h. es liegen keine komplexen Eigenwerte auf der imaginären Achse. Wir können nun den **Index von  $L$** , als die Anzahl der Eigenwerte von  $L$  mit negativem Realteil definieren:

$$(1.26) \quad \text{Ind}(L) := \#\{\text{Eigenwerte } \lambda \text{ von } L \mid \text{Re}\lambda < 0\} \quad .$$

Ein **linearer Isomorphismus**  $A \in \text{Gl}(\mathbb{R}^n)$  heißt **hyperbolisch**, falls

$$(1.27) \quad \text{Spec}(A) \cap S^1 = \emptyset \quad ,$$

(wobei  $S^1 \subset \mathbb{C}$  der Einheitskreis ist), d.h.  $A$  hat keine komplexen Eigenwerte vom **Modulus** 1 (vom komplexen Betrag 1).

**Proposition 1.5** Sei  $L$  ein lineares Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^n$  und  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann sind äquivalent:

- i)  $L$  ist ein hyperbolisches Vektorfeld.
- ii)  $\varphi_t := e^{tL} \in \text{Gl}(\mathbb{R}^n)$  ist ein hyperbolischer Isomorphismus.

BEWEIS Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von  $L$ , dann sind  $t\lambda_1, \dots, t\lambda_n$  die Eigenwerte von  $tL$  (und umgekehrt), denn

$$(tL)\xi_i = t(L\xi_i) = t(\lambda_i \xi_i) = (t\lambda_i)\xi_i \quad ,$$

wobei  $\xi_i$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sei. Nach Prop. 1.4 gilt nun:

$$t\lambda_1, \dots, t\lambda_n \in \text{Spec}(tL) \Rightarrow e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n} \in \text{Spec}(e^{tL}) \quad .$$

Seien umgekehrt  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n \in \text{Spec}(e^{tL})$ , dann ist  $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n) = (e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$ , wobei  $t\lambda_1, \dots, t\lambda_n$  die Eigenwerte von  $tL$  sind. Auch dies folgt aus Prop. 1.4: Sei  $t\lambda_i$  Eigenwert von  $tL$ , so ist  $e^{t\lambda_i}$  Eigenwert von  $e^{tL}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Da  $e^{tL}$  genau  $n$  (nicht notwendig verschiedene) Eigenwerte  $\tilde{\lambda}_i$  besitzt, folgt die Gleichheit  $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n) = (e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$ .

Damit haben wir gezeigt

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ EW von } L \Leftrightarrow t\lambda_1, \dots, t\lambda_n \text{ EW von } tL \Leftrightarrow e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n} \text{ EW von } e^{tL} .$$

Die zu zeigende Äquivalenz von i) und ii) folgt nun aus der offensichtlichen Äquivalenz

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ nicht rein imaginär} \Leftrightarrow t\lambda_1, \dots, t\lambda_n \text{ nicht rein imaginär} \Leftrightarrow e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n} \notin S^1 . \quad \square$$

Für lineare hyperbolische Isomorphismen gilt das wichtige Resultat

**Proposition 1.6** [PdM, Kap. 2, Prop. 2.9 und 2.10] i) Sei  $A \in Gl(\mathbb{R}^n)$  ein hyperbolischer linearer Isomorphismus, dann existiert eine eindeutige Zerlegung  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ , so daß  $E^s$  und  $E^u$   $A$ -invariant sind, und so daß die Eigenwerte von  $A^s := A|_{E^s}$  und  $A^u := A|_{E^u}$  gerade den Eigenwerten von  $A$  vom Modulus kleiner bzw. größer als 1 entsprechen.  $E^s$  bzw.  $E^u$  heißen **stabiler** bzw. **instabiler Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  bezüglich  $A$** .

ii) Sei  $A$  wie in i), dann existiert eine Norm  $\|\cdot\|_1$  auf  $\mathbb{R}^n$ , so daß  $\|A^s\|_1 < 1$  und  $\|(A^u)^{-1}\|_1 < 1$ . D.h.  $A^s$  ist eine **Kontraktion** und  $A^u$  eine **Expansion**.

Sei  $x \in E^s \subset \mathbb{R}^n$ , dann folgt mit  $\|L^k\| \leq \|L\|^k, L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(1.28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A^s)^n\|_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^s\|_1^n = 0 ,$$

da  $\|A^s\|_1 < 1$ . Da je zwei Normen auf  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A^s)^n\| = 0$  für jede Norm  $\|\cdot\|_1$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Analog gilt

$$(1.29) \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \|(A^u)^{-n}\|_1 = 0 .$$

Weiter ist

$$(1.30) \quad 1 = \|\cdot\|_1 = \|(A^u)^n ((A^u)^{-1})^n\|_1 \leq \|(A^u)^n\|_1 \cdot \|((A^u)^{-1})^n\|_1 ,$$

woraus folgt

$$(1.31) \quad \|(A^u)^n\|_1 \geq \frac{1}{\|((A^u)^{-1})^n\|_1} \geq \frac{1}{\|(A^u)^{-1}\|_1^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty ,$$

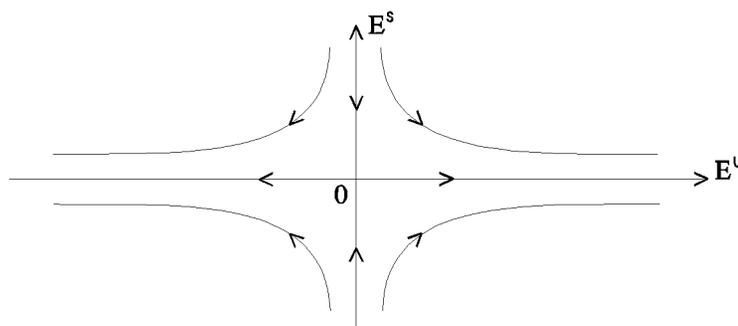
da

$$\frac{1}{\|(A^u)^{-1}\|_1} > 1 .$$

Analog gilt

$$(1.32) \quad \|(A^s)^n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \infty .$$

Für die Wirkung von  $A$  auf  $\mathbb{R}^n$  haben wir qualitativ ein Bild, wie in Figur 1.1.



Figur 1.1

Da im folgenden von der Differentiation auf Mannigfaltigkeiten Gebrauch gemacht wird, wollen wir zunächst ein paar Worte über das Symbol  $D$  verlieren, siehe [O'N, Kap. 3, "The Levi-Civita connection"].

$D$  mit zwei Eingängen, also  $D_{\cdot} \cdot : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , bezeichnet den **Levi-Civita**

**Zusammenhang** der Mannigfaltigkeit  $M$ . Für  $M = \mathbb{R}^n$  ergibt sich die übliche Differentiation auf dem  $\mathbb{R}^n$ ; d.h. für  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  gilt

$$\begin{aligned}
 (1.33) \quad D_V W &= D_{v^i \partial_i} w^j \partial_j = v^i D_{\partial_i} w^j \partial_j \\
 &\stackrel{*}{=} v^i \frac{\partial w^k}{\partial x^i} \partial_k = v^i dw^k(\partial_i) \partial_k \quad * \Gamma_{ij}^k = 0 \\
 &= dw^k(v^i \partial_i) \partial_k = V(w^k) \partial_k \quad .
 \end{aligned}$$

Sei jetzt  $M$  wieder irgendeine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.  $D_V W$  heißt **kovariante Levi-Civita Ableitung**, sie erfüllt

$$(1.34) \quad D_V f = Vf \quad (:= df(V)) \quad , \forall f \in \mathfrak{F}(M).$$

$\mathfrak{F}(M)$  bezeichnet den **Ring der glatten reellwertigen Funktionen auf  $M$** .  $D_V$  kann auch auf beliebige  $(r, s)$ -Tensoren  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$  angewendet werden, siehe [O'N, Kap. 2, "Tensor derivations"].

$D$  gefolgt von einem  $(r, s)$ -Tensor  $A$ , also  $DA$  mit  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ , bezeichnet das **kovariante Differential des Tensors  $A$** . Es ist  $DA \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$  und es gilt

$$(1.35) \quad (DA)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) = (D_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \quad ,$$

für alle  $V, X_i \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ .  $\mathfrak{X}^*(M)$  bezeichne die **Menge der 1-Formen auf  $M$** . Im Spezialfall  $r = s = 0$ , d.h. für den Fall einer Funktion  $f \in \mathfrak{F}(M) = \mathfrak{T}_0^0(M)$ , ist das kovariante Differential von  $f$  gerade das übliche Differential  $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ , denn

$$(1.36) \quad (Df)(V) = D_V f = Vf = df(V) \quad , \forall V \in \mathfrak{X}(M).$$

Wenn  $f: M \rightarrow N$  eine  $C^r$ -Abbildung ist,  $r \geq 1$ , so bezeichne  $Df: TM \rightarrow TN$  die **Tangentialabbildung  $Df(p, \xi) := (f(p), Df(p)\xi)$** ,  $Df(p)\xi$  ist die übliche **Linearisierung** der Darstellung von  $f$  in Karten von  $M$  und  $N$  am Punkt  $p$  in Richtung von  $\xi$ .

Welche Bedeutung  $D$  im Einzelfall hat, ist aus dem Kontext zu entnehmen.

Jetzt soll der Begriff der Nichtdegeneriertheit von Singularitäten und Fixpunkten eingeführt, sowie die Hyperbolizität vom linearen auf den allgemeinen Fall erweitert werden.

Eine Singularität  $p \in M$  eines Vektorfeldes  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , heißt **nichtdegeneriert**, falls

$$(1.37) \quad DX(p): T_p M \rightarrow T_p M$$

Null nicht als Eigenwert besitzt.

Ein Fixpunkt  $p \in M$  eines Diffeomorphismus  $\vartheta \in Diff^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , heißt **nichtdegeneriert**, falls

$$(1.38) \quad D\vartheta(p): T_p M \rightarrow T_p M$$

Eins nicht als Eigenwert besitzt. Dies ist äquivalent zu  $Det(D\vartheta(p) - 1) \neq 0$ .

Diese Definitionen sind kompatibel im Sinne der

**Proposition 1.7** Sei  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann sind äquivalent:

- i)  $p$  ist eine nichtdegenerierte Singularität von  $X$ .
- ii)  $p$  ist ein nichtdegenerierter Fixpunkt der von  $X$  erzeugten Zeit- $t$ -Abbildung  $\varphi_t$ .

BEWEIS Nach Lemma 1.3 ist  $D\varphi_t(p) = e^{t \cdot DX(p)}$ . Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von  $DX(p)$  ( $\Leftrightarrow t\lambda_1, \dots, t\lambda_n$  sind die Eigenwerte von  $tL$ , siehe Bew. von Prop. 1.5), dann sind wie im Beweis von Prop. 1.5  $e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}$  genau die Eigenwerte von  $e^{t \cdot DX(p)}$  und damit von  $D\varphi_t(p)$ . Für  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt nun

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n} \neq 1 \quad . \quad \square$$

Wichtig in Abschnitt 1.2 über Morse-Theorie ist das Resultat über die **Isoliertheit** eines nichtdegenerierten Fixpunktes oder einer nichtdegenerierten Singularität  $p$ . D.h. man findet eine offene

Umgebung  $U(p)$  in  $M$  um  $p$ , so daß  $p$  der einzige Fixpunkt bzw. die einzige Singularität in  $U(p)$  ist. Zum Beweis brauchen wir das bekannte

**Theorem über inverse Funktionen 1.8** [H, Appendix, Thm. A.7] Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ ,  $r \geq 1$ . Falls  $Df(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  ein Isomorphismus ist, dann ist  $f$  lokal um  $p$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus. D.h. es existieren Umgebungen  $V \subset U$  von  $p$  und  $W \subset \mathbb{R}^n$  von  $f(p)$ , sowie eine  $C^r$ -Abbildung  $g: W \rightarrow V$ , so daß gilt:  $g \circ f = Id_V$  und  $f \circ g = Id_W$ .

Da dieses Theorem offensichtlich lokaler Natur ist, läßt es sich mühelos auf den Fall  $U \subset M$  und  $f \in C^r(U, N)$ , wobei  $M$  und  $N$  Mannigfaltigkeiten sind, übertragen.

**Lemma 1.9** i) Ein nichtdegenerierter Fixpunkt  $p$  eines Diffeomorphismus  $\vartheta \in \text{Diff}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , ist isoliert.  
 ii) Eine nichtdegenerierte Singularität  $p$  eines Vektorfeldes  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , ist isoliert.

BEWEIS i) Sei  $(\psi, \tilde{U})$  eine Karte von  $M$  mit  $p \in \tilde{U}$  und  $x := \psi(p) \in \mathbb{R}^n$ . Sei  $U \subset \tilde{U}$  eine hinreichend kleine Umgebung von  $p$ , so daß  $\vartheta(U) \subset \tilde{U}$ . Dann ist die  $C^r$ -Abbildung  $\psi \circ \vartheta \circ \psi^{-1}: \mathbb{R}^n \supset \psi(U) \rightarrow \psi \circ \vartheta(U) \subset \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus.  $x$  ist ein nichtdegenerierter Fixpunkt von  $\psi \circ \vartheta \circ \psi^{-1}$ , denn

$$\psi \circ \vartheta \circ \psi^{-1}(x) = \psi \circ \vartheta \circ \psi^{-1}(\psi(p)) = \psi \circ \vartheta(p) = \psi(p) = x$$

und

$$\begin{aligned} \text{Det}(D(\psi \circ \vartheta \circ \psi^{-1})(x) - I) &= \text{Det}(D\psi(p)[D\vartheta(p) - I]D\psi^{-1}(x)) \\ &= \text{Det} D\psi(p) \cdot \text{Det}(D\vartheta(p) - I) \cdot (\text{Det} D\psi(p))^{-1} \\ &= \text{Det}(D\vartheta(p) - I) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt mit (1.10) und  $\text{Det} A^{-1} = (\text{Det} A)^{-1}$ .

Sei  $F \in C^r(\psi(U), \mathbb{R}^n)$  definiert durch  $F(y) := (\psi \circ \vartheta \circ \psi^{-1})(y) - y$ . Dann ist  $F(x) = x - x = 0$  und  $DF(x) = D(\psi \circ \vartheta \circ \psi^{-1})(x) - I$ . Also ist  $F$  wegen  $\text{Det}(DF(x)) \neq 0$  lokal um  $x$  ein Diffeomorphismus, also insbesondere ein Isomorphismus. D.h. wir finden Umgebungen  $V \subset \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$  von  $x$  und  $W \subset \mathbb{R}^n$  von  $F(x) = 0$  bezüglich denen  $F$  invertierbar ist.  $F^{-1}$  bezeichne diese Inverse.

Sei  $Z := \{y \in V \mid F(y) = 0\}$ , wähle  $y \in Z$ . Es ist

$$\begin{aligned} y &= F^{-1} \circ F(y) & , F^{-1} \circ F &= Id_V \\ &= F^{-1}(0) & , y &\in Z \\ &= x \end{aligned}$$

Also ist  $x$  der einzige Fixpunkt von  $\psi \circ \vartheta \circ \psi^{-1}$  in  $V$ . Es gilt

$$\begin{aligned} (\psi \circ \vartheta \circ \psi^{-1})(x) &= x \quad , \text{ nur für } x \in V \\ \Leftrightarrow \vartheta(\psi^{-1}(x)) &= \psi^{-1}(x) \\ \Leftrightarrow \vartheta(p) &= p \quad , \text{ nur für } p \in \psi^{-1}(V). \end{aligned}$$

Also ist  $p$  der einzige Fixpunkt von  $\vartheta$  in der Umgebung  $\psi^{-1}(V) \subset M$  von  $p$ .

ii) Wir nehmen an, die nichtdegenerierte Singularität  $p$  sei nicht isoliert, d.h. wir finden keine Umgebung  $U$  von  $p$ , so daß  $p$  die einzige Singularität in  $U$  ist. Sei  $\varphi_t$  der von  $X$  erzeugte Diffeomorphismus. Da jede Singularität von  $X$  genau einem Fixpunkt von  $\varphi_t$  entspricht, ist  $p$  in keiner Umgebung  $U$  von  $p$  der einzige Fixpunkt. Da jedoch nach Prop. 1.7  $p$  ein nichtdegenerierter Fixpunkt von  $\varphi_t$  ist, existiert nach i) eine Umgebung von  $p$ , in der  $p$  der einzige Fixpunkt von  $\varphi_t$  ist; ein Widerspruch.  $\square$

Eine Singularität  $p \in M$  eines Vektorfeldes  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , heißt **hyperbolische Singularität**, falls

$$(1.39) \quad DX(p): T_p M \rightarrow T_p M$$

ein hyperbolisches lineares Vektorfeld ist; falls also die (möglicherweise komplexen) Eigenwerte von  $DX(p)$  nicht auf der imaginären Achse in  $\mathbb{C}$  liegen. Es ist klar, daß eine hyperbolische Singularität eine nichtdegenerierte Singularität ist. Wir definieren nun den **Index einer hyperbolischen Singularität**  $p \in M$ , als den Index des hyperbolischen linearen Vektorfeldes  $DX(p)$ :

$$(1.40) \quad \mathbf{Ind}(p) := \mathbf{Ind}(DX(p)) := \# \{ \text{Eigenwerte } \lambda \text{ von } DX(p) \mid \operatorname{Re} \lambda < 0 \} \quad .$$

Wir nennen ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  **hyperbolisches Vektorfeld**, falls alle Singularitäten von  $X$  hyperbolisch sind. Sei  $\nu_k$  die Anzahl der hyperbolischen Singularitäten von  $X$  vom Index  $k$ . Dann heißt  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  der **Typ von  $X$** . Dieser ist aufgrund der Kompaktheit von  $M$  wohldefiniert (d.h. besitzt nur endliche Einträge), denn es gilt das

**Korollar 1.10** *Jedes nichtdegenerierte (und damit auch jedes hyperbolische) Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt höchstens endlich viele Singularitäten.*

BEWEIS Wir nehmen an  $X$  besäße unendlich viele Singularitäten  $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ ,  $p_i \neq p_j$  für  $i \neq j$ .  $M$  kompakt impliziert nun die Existenz einer Teilfolge (selbe Bezeichnung), die gegen ein  $p \in M$  konvergiert:

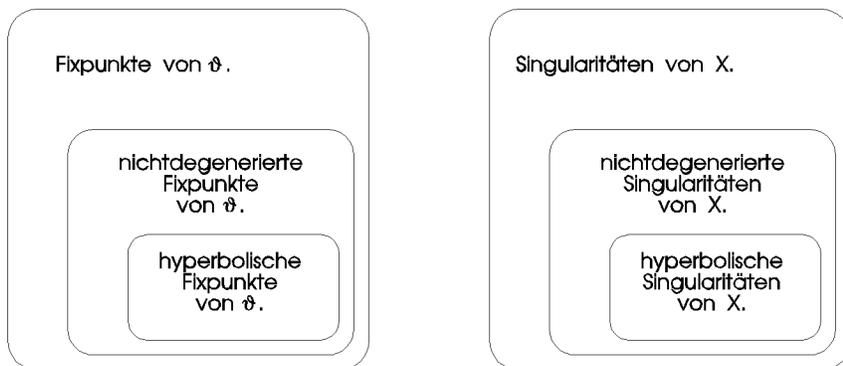
$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \overbrace{X(p_i)}^{=0} = X(\lim_{i \rightarrow \infty} p_i) = X(p) \quad .$$

Also ist  $p$  eine Singularität von  $X$ , also nach Voraussetzung insbesondere hyperbolisch. Da  $p$  offensichtlich nicht isoliert ist, haben wir einen Widerspruch zu Lemma 1.9.  $\square$

Ein Fixpunkt  $p \in M$  eines Diffeomorphismus  $\vartheta \in \operatorname{Diff}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , heißt **hyperbolischer Fixpunkt**, falls

$$(1.41) \quad D\vartheta(p) : T_p M \rightarrow T_p M$$

ein hyperbolischer Isomorphismus ist, falls also die (möglicherweise komplexen) Eigenwerte von  $D\vartheta(p)$  nicht auf  $S^1 \subset \mathbb{C}$  liegen. Damit ist wiederum klar, daß ein hyperbolischer Fixpunkt ein nichtdegenerierter Fixpunkt ist. Es ergibt sich qualitativ ein Bild wie in Figur 1.2.



Figur 1.2  $\vartheta$  Diffeomorphismus auf  $M$

$X$  Vektorfeld auf  $M$

Wir haben wieder Kompatibilität im Sinne der

**Proposition 1.11** *Sei  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , und  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann sind äquivalent:*

- i)  $p$  ist eine hyperbolische Singularität von  $X$ .
- ii)  $p$  ist ein hyperbolischer Fixpunkt der von  $X$  erzeugten Zeit- $t$ -Abbildung  $\varphi_t$ .

BEWEIS Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von  $DX(p)$ . Im Beweis von Prop. 1.5 wurde gezeigt

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ EW von } DX(p) \Leftrightarrow t\lambda_1, \dots, t\lambda_n \text{ EW von } t \cdot DX(p)$$

$$\Leftrightarrow e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n} \text{ EW von } e^{t \cdot DX(p)} = D\varphi_t(p) \quad .$$

Offensichtlich gilt für  $t \in \mathbb{R} \setminus 0$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ nicht rein imaginär} \Leftrightarrow t\lambda_1, \dots, t\lambda_n \text{ nicht rein imaginär} \Leftrightarrow e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n} \notin S^1 \subset \mathbb{C} \quad .$$

Hieraus folgt die behauptete Äquivalenz. □

## 1.2 Morse-Theorie

In diesem Abschnitt sollen diejenigen grundlegenden Resultate der Morse-Theorie aufgeführt werden, die für diese Arbeit relevant sind. Dies sind, neben dem Begriff der Morse-Funktion, das Morse-Lemma sowie die Morse-Ungleichungen. Letztere schaffen einen Zusammenhang zwischen der Anzahl kritischer Punkte einer speziellen Art von reellwertigen Funktionen — nämlich Morse-Funktionen — auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ , sowie der Topologie von  $M$ .

Zuerst wird jedoch die Hessesche  $H^g(\cdot, \cdot)$  einer Funktion  $g \in C^r(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 2$ , definiert. Diese ist ein symmetrischer  $(0,2)$ -Tensor. Sei  $p \in M$  mit  $\nabla g(p) = 0$ , dann stellen wir  $H^g(\cdot, \cdot)$  mittels einer symmetrischen Matrix  $H_p^g \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) := \{\text{reelle } (n \times n)\text{-Matrizen}\}$  dar:

$$H^g(X, Y) = \langle D\nabla g(p)X, Y \rangle = X^t H_p^g Y \quad , X, Y \in T_p M .$$

Wir zeigen, daß die Eigenwerte von  $H_p^g$  mit denen von  $D\nabla g(p)$  übereinstimmen, und daß (im Falle eines nichtdegenerierten kritischen Punktes  $p$ ) die Anzahl der negativen Eigenwerte mit  $\text{Ind}_f(p)$  übereinstimmt. Als eine direkte Konsequenz aus Prop. 2.2 ( $p$  nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $g \Leftrightarrow p$  hyperbolische Singularität von  $\nabla g$ ) und Lemma 1.9 erhalten wir: Eine Morse-Funktion auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt nur endlich viele kritische Punkte (Prop. 2.5).

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt wieder auf eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M^n$  endlicher Dimension  $n$ .

Wir nehmen an,  $M$  habe eine glatte Riemannsche Metrik  $\hat{g}$ , d.h.  $\hat{g}_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  ist für jedes  $p \in M$  eine symmetrische positiv definite Bilinearform auf  $T_p M$ , diese hängt glatt vom Fußpunkt  $p$  ab. Diese Annahme ist (aufgrund der Kompaktheit von  $M$ ) leicht zu rechtfertigen, denn aus einer Überdeckung von  $M$  mittels Karten, sowie einer untergeordneten Zerlegung der Eins (siehe (A.27)), können wir uns leicht, aus den vom  $\mathbb{R}^n$  in den Kartengebieten induzierten Metriken, eine Metrik auf ganz  $M$  basteln. Für jedes  $p \in M$  ist also  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \hat{g}(p)(\cdot, \cdot)$  ein inneres Produkt auf  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$ ,  $|\xi| := \langle \xi, \xi \rangle^{1/2}$  mit  $\xi \in T_p M$  ist die zugehörige Norm.

Aus der linearen Algebra wissen wir, daß ein (endlich-dimensionaler) Vektorraum und sein Dualraum isomorph sind. Zu jeder linearen Abbildung  $\lambda: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  existiert ein eindeutiger Tangentialvektor  $\xi_\lambda \in T_p M$ , so daß für alle  $\zeta \in T_p M$  gilt:  $\lambda(\zeta) = \langle \xi_\lambda, \zeta \rangle$ , d.h.

$$(2.1) \quad \lambda(\cdot) = \langle \xi_\lambda, \cdot \rangle .$$

Dies ist der Rieszsche Darstellungssatz für lineare Funktionale.  $\xi_\lambda$  heißt **der zu  $\lambda$  duale Vektor**.

Die Abbildung  $\lambda \mapsto \xi_\lambda$  ist ein linearer Isomorphismus von  $(T_p M)^*$  nach  $T_p M$ . Ihre Inverse  $\xi \mapsto \lambda_\xi$  liefert zu jedem  $\xi \in T_p M$  die lineare Abbildung

$$(2.2) \quad \lambda_\xi(\cdot) = \langle \xi, \cdot \rangle .$$

Sei  $g \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 1$ . Das Differential  $Dg(p): T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g$  an der Stelle  $p \in M$  ist eine lineare Abbildung von  $T_p M$  nach  $\mathbb{R}$ . Den **zu  $Dg(p)$  dualen Vektor** bezeichnen wir mit  $\nabla g(p) \in T_p M$  oder mit **grad  $g(p)$** . Auf diese Art und Weise können wir jetzt jedem  $p \in M$  den Tangentialvektor  $\nabla g(p) \in T_p M$  zuordnen und erhalten das  $C^r$ -Vektorfeld  $\nabla g$ , es heißt **Gradientenvektorfeld**. Dieses hängt nach Konstruktion von der Riemannschen Metrik  $\hat{g}$  ab.

Die **Hessesche  $H^g$**  einer Funktion  $g \in C^r(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 2$ , ist deren zweites kovariantes Differential, d.h.  $H^g = D(Dg)$ . Es gilt das

**Lemma 2.1** [O’N, Kap. 3, Lemma 49] Die Hessesche  $H^g$  von  $g$  ist ein symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor. Es gilt für  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(2.3) \quad H^g(X, Y) = XYg - (D_X Y)g = \langle D_X(\nabla g), Y \rangle .$$

BEWEIS Es ist 
$$H^g(X, Y) = D(Dg)(X, Y) \quad , \text{ per definitionem}$$
 
$$= D(dg)(X, Y) \quad , Dg = dg \quad \forall g \in \mathfrak{F}(M), (1.36)$$

$$\begin{aligned}
 &= D_Y(dg)(X) && , \text{ Def. des kov. Diff. , (1.35)} \\
 &= Y(dg(X)) - dg(D_Y X) && , \text{ Produktregel} \\
 &= YXg - (D_Y X)g && , dg(X) = Xg , (1.34) \quad .
 \end{aligned}$$

Aus der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs D

$$XY - YX =: [X, Y] = D_X Y - D_Y X$$

folgt

$$XY - D_X Y = YX - D_Y X \quad .$$

Dieses impliziert die Symmetrie von  $H^g$ . Damit ist

$$\begin{aligned}
 H^g(X, Y) &= XYg - (D_X Y)g \\
 &= X(dg(Y)) - dg(D_X Y) \\
 &= X \langle \nabla g, Y \rangle - \langle \nabla g, D_X Y \rangle \\
 &= \langle D_X \nabla g, Y \rangle + \langle \nabla g, D_X Y \rangle - \langle \nabla g, D_X Y \rangle \\
 &= \langle D_X \nabla g, Y \rangle \quad .
 \end{aligned}$$

Die zweite bzw. dritte Gleichheit folgt aus der Definition von  $dg$  bzw. von  $\nabla g$ , die vierte aus der Kompatibilität des Levi-Civita-Zusammenhangs mit dem inneren Produkt.  $\square$

Sei  $p \in M$  beliebig und sei  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  eine Basis von  $T_p M$ . Wir können nun die symmetrische Bilinearform  $H^g(\cdot, \cdot): T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  mit Hilfe der symmetrischen Matrix  $H_p^g$  (genannt **Hesse-Matrix**)

$$(2.4) \quad (H_p^g)_{ij} := H^g(\xi_i, \xi_j) \quad , \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

darstellen :

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad H^g(X, Y) &= H^g(X^i \xi_i, Y^j \xi_j) = \sum_{i,j} X^i Y^j H^g(\xi_i, \xi_j) = \sum_i X^i \sum_j Y^j (H_p^g)_{ij} \\
 &= \sum_i X^i (H_p^g Y)_i = X^t H_p^g Y \quad , \quad X, Y \in T_p M \quad .
 \end{aligned}$$

Die Symmetrie von  $H_p^g$  folgt aus der Symmetrie von  $H^g(\cdot, \cdot)$ :

$$(2.6) \quad (H_p^g)_{ij} = H^g(\xi_i, \xi_j) = H^g(\xi_j, \xi_i) = (H_p^g)_{ji} \quad .$$

Wir betrachten jetzt die lineare Abbildung  $D\nabla g(p): T_p M \rightarrow T_p M$ , diese ist selbstadjungiert :

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad \langle X, D\nabla g(p)Y \rangle &\stackrel{\text{Sym. von}}{=} \langle D\nabla g(p)Y, X \rangle \stackrel{(2.3)}{=} H^g(Y, X) \stackrel{\text{Lemma 2.1}}{=} H^g(X, Y) \stackrel{(2.3)}{=} \langle D\nabla g(p)X, Y \rangle \\
 &= \langle X, (D\nabla g(p))^* Y \rangle \quad , \quad \forall X, Y \in T_p M \quad ,
 \end{aligned}$$

also gilt  $D\nabla g(p) = (D\nabla g(p))^*$ . Aus der Selbstadjungiertheit folgt nun :

$$(2.8) \quad \text{Spec } (D\nabla g(p)) \subset \mathbb{R}$$

und

$$(2.9) \quad \exists \text{ ONB (Orthonormalbasis) } \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \text{ aus Eigenvektoren von } D\nabla g(p) \quad .$$

Aus der Symmetrie der Matrix  $H_p^g$  können wir bereits schließen, daß ihre Eigenwerte reell sein müssen. Es gilt sogar :

$$(2.10) \quad \text{Spec } (H_p^g) = \text{Spec } (D\nabla g(p)) \quad .$$

Wir sehen das folgendermaßen ein : Bezüglich der ONB  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$  hat  $H_p^g$  Diagonalgestalt, denn es gilt

$$(2.11) \quad (H_p^g)_{ij} = H^g(\zeta_i, \zeta_j) = \langle D\nabla g(p)\zeta_i, \zeta_j \rangle = \langle \lambda_i \zeta_i, \zeta_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} \quad ,$$

also

$$(2.12) \quad H_p^g = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ mit } \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \text{Spec}(D\nabla g(p)).$$

Die Eigenwerte einer Matrix sind invariant unter Basis-Transformationen und stehen im Fall einer Diagonalmatrix auf deren Hauptdiagonalen. Also besitzt  $H_p^g$  die Eigenwerte  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

Sei  $h: M \rightarrow N$  eine  $C^r$ -Abbildung,  $r \geq 1$ , zwischen zwei Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ . Ein Punkt  $p \in M$  heißt **regulärer Punkt**, falls

$$(2.13) \quad Dh(p): T_p M \rightarrow T_{h(p)} N$$

surjektiv ist, andernfalls heißt  $p$  **kritischer Punkt**. Ein Punkt  $q \in N$  heißt **regulärer Wert**, falls  $h^{-1}(q) \subset M$  keine kritischen Punkte von  $h$  enthält, andernfalls heißt  $q$  **kritischer Wert**. Beachte: Im Spezialfall  $q \notin \text{Im}(h)$  ist  $h^{-1}(q) = \emptyset$  und  $q$  also ein regulärer Wert.

Sei nun  $p \in M$  ein kritischer Punkt von  $g$ , d.h.  $Dg(p) \equiv 0$  ( $\Leftrightarrow \nabla g(p) = 0$ ), er heißt **nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $g$** , falls

$$(2.14) \quad \text{Det } H_p^g \neq 0 \quad .$$

Dies ist äquivalent dazu, daß Null kein Eigenwert von  $H_p^g$  ist, was nach (2.10) wiederum äquivalent dazu ist, daß Null kein Eigenwert von  $D\nabla g(p)$  ist.

Der **Morse-Index  $\text{Ind}_g(p)$**  eines nichtdegenerierten kritischen Punktes  $p$ , ist gleich der Dimension des größten Unterraumes  $U$  von  $T_p M$  auf dem  $H_p^g$  negativ definit ist, d.h. auf dem gilt:

$$(2.15) \quad \xi^t H_p^g \xi < 0 \quad , \forall \xi \in U.$$

An der Diagonalgestalt (2.12) von  $H_p^g$  lesen wir ab:  $\text{Ind}_g(p)$  ist gleich der Anzahl der negativen Eigenwerte von  $H_p^g$ , welche gleich der Anzahl der negativen Eigenwerte von  $D\nabla g(p)$  ist.

Sei  $k \in \{0, \dots, n\}$  die Anzahl der negativen Eigenwerte von  $D\nabla g(p)$ , diese seien mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  bezeichnet, ihre zugehörigen Eigenvektoren mit  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ . Sei  $t \in \mathbb{R}^+$ , dann gilt (beachte:  $p$  ist jetzt ein nichtdegenerierter kritischer Punkt)

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \text{Ind}_g(p) &:= \dim(\text{max. UR von } T_p M \text{ auf dem } H_p^g \text{ negativ definit ist}) \\ &= \#\{\text{negative Eigenwerte von } H_p^g\} && , \text{ Diag.gestalt (2.12)} \\ &= \#\{\text{negative Eigenwerte von } D\nabla g(p)\} (= k) && , (2.10) \\ &= \#\{\text{Eigenwerte von } D\varphi_t(p) = e^{-t \cdot D\nabla g(p)} \text{ größer Eins}\} && , \text{ s. Bew. Prop. 1.5} \\ &= \dim \text{Span} \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} && , \zeta_i \text{ EV zu EW } \lambda_i \\ &= \dim E^u && , \text{ Prop. 1.6 i) } . \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$(2.16) \quad \begin{aligned} n - \text{Ind}_g(p) &= \#\{\text{positive Eigenwerte von } H_p^g\} \\ &= \#\{\text{positive Eigenwerte von } D\nabla g(p)\} (= n - k) \\ &= \#\{\text{Eigenwerte von } D\phi_t(p) = e^{-t \cdot D\nabla g(p)} \text{ kleiner Eins}\} \\ &= \dim \text{Span} \{\zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n\} \\ &= \dim E^s \quad . \end{aligned}$$

Im Fall eines nichtdegenerierten kritischen Punktes  $p$ , ist  $H_p^g$  ein hyperbolisches lineares Vektorfeld, denn seine Eigenwerte liegen nicht auf der imaginären Achse, siehe (1.39). In diesem Fall gilt

$$(2.18) \quad \text{Ind}_g(p) = \text{Ind}(p) \quad ,$$

wobei  $\text{Ind}(p)$  in (1.40) definiert wurde.

**Proposition 2.2** Sei  $g \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 1$ , und  $p \in M$ , dann sind äquivalent:

- i)  $p$  ist ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $g$ .
- ii)  $p$  ist eine hyperbolische Singularität des Vektorfeldes  $\nabla g$ .

BEWEIS  $p \in M$  ist ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $g$

$$\begin{aligned} &:\Leftrightarrow \text{Det } H_p^g \neq 0. \\ &\Leftrightarrow H_p^g \text{ hat Null nicht als Eigenwert} \\ &\Leftrightarrow \text{Die lineare Abb. } D\nabla g(p): T_p M \rightarrow T_p M \text{ hat keine rein imaginären Eigenwerte} \\ &\Leftrightarrow p \text{ ist eine hyperbolische Singularität des Vektorfeldes } \nabla g \end{aligned}$$

Die dritte Äquivalenz folgt aus (2.8) und (2.10). □

Das folgende wichtige Resultat von Marston Morse besagt, daß  $g$  lokal um  $p$  die Darstellung  $g(p) + \frac{1}{2} \xi^t H_p^g \xi$  besitzt, d.h. die Taylor-Entwicklung 2. Ordnung

$$(2.19) \quad g \circ \varphi^{-1}(\xi) = g(p) + \frac{1}{2} \xi^t H_p^g \xi \quad , (\varphi, U) \text{ Karte um } p \quad , \varphi^{-1}(0) = p \quad , \xi \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n,$$

ist exakt.

**Lemma 2.3 (Morse-Lemma)** [H, Kap. 6, Lemma 1.1] Sei  $p \in M$  ein nichtdegenerierter kritischer Punkt einer  $C^{r+2}$ -Abbildung  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r \geq 1$ , mit  $\text{Ind}_g(p) = k$ . Dann existiert eine  $C^r$ -Karte  $(\varphi, U)$  um  $p$  (genannt **Morse-Karte**), so daß gilt

$$g \circ \varphi^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(p) - \sum_{i=1}^k \xi_i^2 + \sum_{i=k+1}^n \xi_i^2 \quad , \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Die Voraussetzung  $g \in C^{r+2}(M, \mathbb{R})$  kann abgeschwächt werden zu  $g \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$ , siehe hierzu Aufgabe 1 in Abschnitt 6.1 von [H].

**Proposition 2.4** Ein nichtdegenerierter kritischer Punkt  $p$  von  $g \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 1$ , ist isoliert.

BEWEIS A Nach Prop. 2.2 ist  $p$  eine hyperbolische Singularität des Vektorfeldes  $\nabla g$ , also insbesondere eine nichtdegenerierte Singularität, und damit nach Lemma 1.9 ii) isoliert. □

BEWEIS B (unter Verwendung des Morse-Lemma) Sei  $(\varphi, U)$  eine Morse-Karte um  $p$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (2.20) \quad D(g \circ \varphi^{-1})(\xi) &= D \left( g(p) - \sum_{i=1}^k \xi_i^2 + \sum_{i=k+1}^n \xi_i^2 \right) \\ &= - \sum_{i=1}^k 2 \xi_i d\xi_i + \sum_{i=k+1}^n 2 \xi_i d\xi_i \quad . \end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichheit geht ein, daß für die Koordinatenfunktionen  $\xi_i$  gilt:  $D\xi_i = d\xi_i$ , wobei  $d$  das übliche Differential von Funktionen bezeichnet, siehe (1.34). Da nun  $\{d\xi_i \mid i = 1, \dots, n\}$  eine Basis von  $(T_p M)^*$  bildet, ist die Summe genau dann gleich  $0 \in (T_p M)^*$ , wenn alle Koeffizienten gleich Null sind. D.h.  $D(g \circ \varphi^{-1})(\xi) = 0$  ist äquivalent zu  $\xi = (0, \dots, 0)$ . Also ist  $p (= \varphi^{-1}(0))$  der einzige kritische Punkt von  $g$  in  $U$ . □

Eine Funktion  $f \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 1$ , deren kritische Punkte alle nicht degeneriert sind, heißt **Morse-Funktion**. Die  **$k$ -te Typenzahl**  $\nu_k = \nu_k(f)$  einer Morsefunktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M$  kompakt, ist definiert als die Anzahl von kritischen Punkten  $p$  mit Morse-Index  $\text{Ind}_f(p) = k$ ,  $0 \leq k \leq n = \text{Dim } M$ .  $f$  hat dann **Typ**  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ . Die Kompaktheit von  $M$  ist entscheidend für die Wohldefiniertheit dieses Begriffs. Dies folgt aus der

**Proposition 2.5** Eine Morse-Funktion  $f$  auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt nur endlich

viele kritische Punkte.

BEWEIS Wir nehmen an,  $f$  besäße unendlich viele kritische Punkte  $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ ,  $p_i \neq p_j$  für  $i \neq j$ . Da  $M$  kompakt ist, finden wir eine gegen ein  $p \in M$  konvergente Teilfolge; für diese wählen wir dieselbe Bezeichnung  $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ . Es ist

$$(2.21) \quad 0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \overbrace{Df(p_i)}^{=0} = Df(\lim_{i \rightarrow \infty} p_i) = Df(p) \quad .$$

Bei der zweiten Gleichheit geht ein, daß  $Df$  nach Voraussetzung noch stetig ist. Also hängt  $Df(q)$  insbesondere stetig vom Fußpunkt  $q \in M$  ab; der Limes kann hereingezogen werden und  $p$  ist somit ein kritischer Punkt von  $f$ . Nach Voraussetzung ist nun  $p$  einerseits ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $f$ , andererseits aber offensichtlich nicht isoliert. Dies ist ein Widerspruch zu Prop. 2.4.  $\square$

**Theorem 2.6** [H, Kap. 6, Thm. 1.2] Sei  $N$  eine beliebige Mannigfaltigkeit, dann ist die Menge der Morse-Funktionen offen und dicht bezüglich der starken Topologie in  $C^r(N, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 2$ .

Für das Folgende werden Grundkenntnisse über singuläre Homologie-Theorie benötigt, siehe hierfür beispielsweise [StZi] oder [DFN]. Die  $k$ -te singuläre Homologiegruppe eines topologischen Raumes  $X$  mit Koeffizienten in einem Körper  $\mathbb{K}$  sei mit  $H_k(X; \mathbb{K})$  bezeichnet.  $H_k(X; \mathbb{K})$  ist ein Vektorraum; wir definieren  $\beta_k = \beta_k(X; \mathbb{K})$  als seine Dimension. Für  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  heißt  $\beta_k$  die  **$k$ -te Betti-Zahl von  $X$** .

**Theorem 2.7** [H, Kap. 6, Thm. 3.5] Sei  $f \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 1$ , eine Morse-Funktion auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M$  vom Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ . Dann gelten

i) die **starken Morse-Ungleichungen**

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \nu_k \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \beta_k \quad , \quad 0 \leq m \leq n \quad .$$

ii)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \nu_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k \quad .$$

Eine unmittelbare Folgerung ist das

**Theorem 2.8** [H, Kap. 6, Thm. 3.7] Die Voraussetzungen seien wie in Thm. 2.7, dann gelten die **schwachen Morse-Ungleichungen**

$$\nu_k \geq \beta_k \quad , \quad k=0, \dots, n.$$

BEWEIS (aus [H]) Sei  $\delta_k := \nu_k - \beta_k$ , dann ist

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \nu_0 - \beta_0 \geq 0 & , & \quad \text{Thm. 2.7 i) mit } m=0: \nu_0 \geq \beta_0 \\ \delta_1 &= \nu_1 - \beta_1 \geq \nu_0 - \beta_0 \geq 0 & , & \quad \text{Thm. 2.7 i) } -\nu_0 + \nu_1 \geq -\beta_0 + \beta_1 \\ \delta_2 &= \nu_2 - \beta_2 \\ &\geq (\nu_1 - \beta_1) - (\nu_0 - \beta_0) & , & \quad \text{Thm. 2.7 i) } \nu_0 - \nu_1 + \nu_2 \geq \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 \\ &= \delta_1 - \delta_0 \geq 0 \\ &\vdots \text{ usw.} \end{aligned}$$

Allgemein gilt für  $m \in \mathbb{N}_0$

$$\delta_{m+1} \geq \delta_m - \delta_{m-1} + \dots + (-1)^m \delta_0 \geq 0 \quad . \quad \square$$

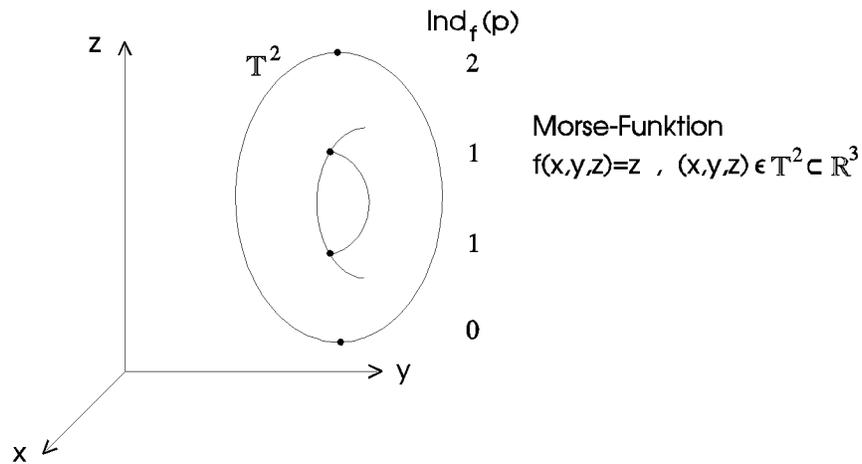
Die Topologie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit  $M$  liefert also untere Schranken für die Anzahl von kritischen Punkten einer Morse-Funktion auf  $M$ .

**Beispiel 2.1** Sei  $M = \mathbf{T}^2$  der **2-Torus** und  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , dann sind

$$H_0(\mathbf{T}^2; \mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad , \quad H_1(\mathbf{T}^2; \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \quad , \quad H_2(\mathbf{T}^2; \mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad \text{und}$$

$$H_k(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}) = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0, 1, 2\}.$$

Also besitzt eine Morse-Funktion auf dem 2-Torus mindestens je einen kritischen Punkt vom Index 0 und 2, sowie zwei kritische Punkte vom Index 1. Das Standardbeispiel hierfür ist die Höhenfunktion, des senkrecht stehend in den  $\mathbb{R}^3$  eingebetteten 2-Torus (siehe Figur 2.1 und Beispiel 2.1.2).



Figur 2.1

## 1.3 Gradientenfluß und (in)stabile Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir einen Spezialfall, der in Abschnitt 1.1 eingeführten Flußabbildung, untersuchen, nämlich den sogenannten Gradientenfluß  $\phi$ , der vom Gradientenvektorfeld  $\nabla f$  erzeugt wird. Speziell interessieren wir uns für den negativen Gradientenfluß, der von  $-\nabla f$  erzeugt wird, weiter wollen wir uns wieder auf geschlossene Mannigfaltigkeiten beschränken.

Zunächst zeigen wir, daß das Bild einer Immersion lokal eine Untermannigfaltigkeit ist (Prop. 3.3), anschließend führen wir den Begriff des  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limes eines Punktes  $q \in M$  ein. Es wird sich herausstellen, daß  $\alpha(q)$  bzw.  $\omega(q)$  (im Falle eines Gradientenflusses einer Morse-Funktion  $f$ ) aus genau einer Singularität von  $-\nabla f$  besteht (Prop. 3.7). Es ist  $\alpha(q) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t q$  und  $\omega(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t q$ , also ist  $\alpha(q)$  derjenige kritische Punkt von  $f$  an dem der Orbit durch  $q$  "anfängt" und  $\omega(q)$  derjenige an dem  $\mathcal{O}(q)$  "endet". Wir zeigen weiter, daß eine beliebige Funktion  $g \in C^r(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 1$ , längs Orbits des negativen Gradientenflusses monoton fallend ist (Prop. 3.4), daß ein Orbit eines solchen Flusses eine Niveauläche von  $g$  höchstens einmal schneidet (Kor. 3.5) und daß  $-\nabla g$  orthogonal zu Niveaulächen von  $g$  ist (Prop. 3.6).

Anschließend definieren wir die (in)stabilen Mannigfaltigkeiten  $W^{(u)s}(p)$ , als jene Punkte von  $M$ , welche in (negativer) positiver Zeitrichtung vom Gradientenfluß in den kritischen Punkt  $p$  getragen werden. Das stable manifold theorem 3.8 ist ein bekanntes Resultat, es besagt, daß  $W^{(u)s}(p)$  im Allgemeinen immersierte Untermannigfaltigkeiten von  $M$  sind, und daß deren Tangentialräume bei  $p$  mit  $E^{(u)s}$  aus Prop. 1.6 übereinstimmen.

Im Falle eines Gradientenflusses erhalten wir das für uns wichtige Resultat, daß  $W^{(u)s}(p)$  Untermannigfaltigkeiten von  $M$  sind (Lemma 3.9).

Zum Schluß führen wir noch "DIE LOKALEN (IN)STABILEN MANNIGFALTIGKEITEN  $W_{loc}^{(u)s}(p)$ " als hinreichend kleine Umgebungen von  $p$  in  $W^{(u)s}(p)$  ein. Es zeigt sich, daß wir, gegebenenfalls durch geeignetes Konjugieren der Zeit- $t$ -Abbildung, oBdA annehmen können, daß  $W^{(u)s}(p)$  Teilmengen der linearen Räume  $E^{(u)s}$  sind.

Wir brauchen zunächst die Definition einer Untermannigfaltigkeit, sowie einige weitere Begriffe und Resultate aus der Differentialtopologie, siehe [H, Kap. 1].

Eine Teilmenge  $A$  einer  $n$ -dimensionalen  $C^r$ -Mannigfaltigkeit  $(M, \Phi)$  heißt  **$C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $(M, \Phi)$** , falls für ein  $k \in \mathbb{N}_0$  jeder Punkt von  $A$  in einem Kartengebiet einer Karte  $(\varphi, U) \in \Phi$  liegt, so daß

$$(3.1) \quad U \cap A = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k) \quad .$$

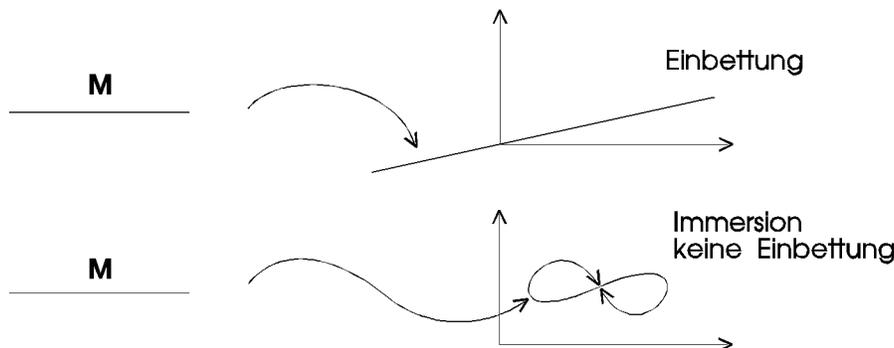
$\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$  sei die Menge der Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$ , deren letzte  $(n-k)$  Koordinaten Null sind.  $(\varphi, U)$  heißt **Untermannigfaltigkeits-Karte von  $(M, A)$** . Da die Abbildungen

$$(3.2) \quad \varphi|_{U \cap A} : U \cap A \rightarrow \mathbb{R}^k$$

einen  $C^r$ -Atlas bilden (wenn man  $(\varphi, U)$  über alle Untermannigfaltigkeits-Karten variiert), ist  $A$  gleichzeitig eine  $C^r$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $k$ .  $n-k$  heißt **Kodimension von  $A$** .

Sei  $g : M \rightarrow N$  eine  $C^r$ -Abbildung,  $r \geq 1$ , zwischen den Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ .  $g$  heißt  **$C^r$ -Immersion**, falls  $Dg(p) : T_p M \rightarrow T_{g(p)} N$  für alle  $p \in M$  injektiv ist.  $g$  heißt  **$C^r$ -Einbettung**, falls  $g$  eine  $C^r$ -Immersion ist, die  $M$  homöomorph auf  $g(M) \subset N$  abbildet.

**Beispiel 3.1**  $M = \mathbb{R}, N = \mathbb{R}^2$



Figur 3.1

Zur Konstruktion von Untermannigfaltigkeiten werden häufig die folgenden beiden wichtigen Resultate benutzt:

**Theorem 3.1** [H, Kap. 1, Thm. 3.1] Sei  $N$  eine  $C^r$ -Mannigfaltigkeit,  $r \geq 1$ . Eine Teilmenge  $A \subset N$  ist genau dann eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $N$ , wenn  $A$  das Bild einer  $C^r$ -Einbettung ist.

**Theorem 3.2 (regular value theorem)** [H, Kap. 1, Thm. 3.2] Sei  $g: M \rightarrow N$  eine  $C^r$ -Abbildung,  $r \geq 1$ . Falls  $y \in g(M)$  ein regulärer Wert ist, dann ist  $g^{-1}(y)$  eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

Aus dem Theorem 1.8 über inverse Funktionen und Theorem 3.1 erhalten wir nun leicht die

**Proposition 3.3** Sei  $g: M \rightarrow N$  eine  $C^r$ -Immersion. Dann existiert zu jedem  $q \in M$  eine Umgebung  $U$ , so daß die Umgebung  $g(U)$  von  $g(q)$  in  $g(M)$  eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist. Es ist  $\dim g(U) = \dim M$ .

BEWEIS Nach Voraussetzung ist  $Dg(q): T_q M \rightarrow T_{g(q)} N$  injektiv.  $Dg(q): T_q M \rightarrow Dg(q)(T_q M)$  ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Nach dem Theorem über inverse Funktionen 1.8 finden wir nun Umgebungen  $U \subset M$  von  $q$  und  $V \subset g(M)$  von  $g(q)$ , so daß  $g|_U: U \rightarrow V$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus ist.  $g|_U$  ist insbesondere ein Homöomorphismus auf sein Bild  $V = g(U)$ , also per definitionem eine  $C^r$ -Einbettung. Nach Thm. 3.1 ist  $g(U)$  eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $N$ . Es ist  $\dim g(U) = \dim U = \dim M$  und  $T_{g(q)} g(U) \simeq Dg(q)(T_q M)$ .  $\square$

Es macht jetzt auch Sinn vom Tangentialraum an eine immensierte Teilmenge einer Mannigfaltigkeit zu sprechen, denn lokal ist diese ja eine Untermannigfaltigkeit. Das Bild einer Immersion wird deswegen auch **immersierte Untermannigfaltigkeit** genannt.

Im weiteren gelten nun folgende Voraussetzungen und Bezeichnungen:  **$M$  ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit,  $f \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$  ist eine Morse-Funktion auf  $M$  mit  $r \geq 1$ .**

Aus dem vorangehenden Abschnitt 1.2 wissen wir, daß  $\nabla f$  (und damit auch  $-\nabla f$ ) ein  $C^r$ -Vektorfeld ist ( $r \geq 1$ ), welches endlich viele hyperbolische Singularitäten besitzt. Wir betrachten jetzt folgendes AWP

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi^p(t) &= (-) \nabla f(\phi^p(t)) \\ \phi^p(0) &= p \end{aligned} ,$$

welches, wie in Abschnitt 1.1 gezeigt, eine Lösung  $\phi^p \in C^{r+1}(\overline{\mathbb{R}}, M)$  besitzt. Der (**negative**) **Gradientenfluß** ist die  $C^r$ -Abbildung ( $C^r$  in  $p$ ,  $C^{r+1}$  in  $t$ )

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, p) &\mapsto \phi(t, p) := \phi^p(t) \end{aligned} .$$

Die  $C^r$ -Abbildung  $\phi_t(\cdot) := \phi(t, \cdot) : M \rightarrow M$  heißt **Zeit- $t$ -Abbildung** des (negativen) Gradientenflusses und ist ein Diffeomorphismus auf  $M$ . Es gelten

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \phi_t \circ \phi_s &= \phi_{t+s} \quad , \quad \phi_0 = Id_M \quad , \\ \frac{d}{dt} \phi_t p &= (-) \nabla f \circ \phi_t p \quad . \end{aligned}$$

Nach Kor. 1.10 sind die Fixpunkte von  $\phi_t$  hyperbolisch und entsprechen genau den Singularitäten von  $-\nabla f$  (die ja nach Voraussetzung alle hyperbolisch sind).

Sei jetzt  $\vartheta \in Diff^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , ein beliebiger Diffeomorphismus, sei  $q \in M$ . Die Mengen

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \omega(q) &:= \{p \in M \mid \exists \text{ Folge ganzer Zahlen } n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty, \text{ so daß } \vartheta^{n_k}(q) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p\} \\ \alpha(q) &:= \{p \in M \mid \exists \text{ Folge ganzer Zahlen } n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\infty, \text{ so daß } \vartheta^{n_k}(q) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p\} \end{aligned}$$

heißen  $\omega$ - bzw.  $\alpha$ -limes des Punktes  $q$ .

Bei einem Gradientenfluß sind nun, im Gegensatz zu einem beliebigen Fluß, bestimmte Arten von Orbits ausgeschlossen, nämlich geschlossene Orbits. D.h. falls  $q \in M$  keine Singularität von  $\nabla f$  ist, dann finden wir kein  $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $\phi_T q = q$ . Dies ist eine Konsequenz aus Prop. 3.4. Hierbei muß  $f$  nicht einmal als Morse-Funktion vorausgesetzt werden. Weiter ist  $\nabla f(p)$  orthogonal zu Niveauflächen  $f^{-1}(f(p))$ ,  $p \in M$ .

Für den Gradientenfluß einer Morse-Funktion vereinfacht sich außerdem die Gestalt von  $\omega$ - und  $\alpha$ -Limes: Diese bestehen nämlich genau aus je einer Singularität von  $\nabla f$  (Prop. 3.7). Wir können uns  $\omega(q)$  bzw.  $\alpha(q)$  in diesem Fall als diejenige Singularität vorstellen, bei der der Orbit durch  $q$  „endet“ bzw. „anfängt“.

**Proposition 3.4** Sei  $g \in C^r(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 1$ , eine beliebige Funktion. Dann ist  $g$  längs Orbits des (negativen) Gradientenvektorfeldes  $(-)\nabla g$  monoton (fallend) steigend. Längs Orbits ungleich dem genau aus einer Singularität bestehenden Orbit, gilt sogar strenge Monotonie.

BEWEIS Sei  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow M$  die  $C^r$ -Lösungskurve von  $\nabla g$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(\eta(t)) &= Dg(\eta(t)) \circ \eta'(t) && , \quad \text{Kettenregel} \\ &= \langle \nabla g(\eta(t)), \eta'(t) \rangle && , \quad \text{Def. von } \nabla g \\ &= \langle \nabla g(\eta(t)), (-)\nabla g(\eta(t)) \rangle && , \quad \eta \text{ Lsg.kurve} \\ &= (-) |\nabla g(\eta(t))|^2 && , \\ &\stackrel{(\leq)}{\geq} 0 && . \end{aligned}$$

Sei  $\eta$  nun zusätzlich ungleich der konstanten Lösung, dann ist

$$\frac{d}{dt} g(\eta(t)) = (-) |\nabla g(\eta(t))|^2 \stackrel{(\leq)}{>} 0 \quad ,$$

da  $\nabla g(\eta(t)) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . □

Es folgt hieraus sofort das

**Korollar 3.5** Voraussetzungen wie in Prop. 3.4. Ein Orbit eines Gradientenflusses kann eine Niveaufläche  $g^{-1}(a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , höchstens einmal schneiden.

**Proposition 3.6** Voraussetzungen wie in Prop. 3.4. Das Vektorfeld  $\nabla g$  ist orthogonal zu Niveauflächen von  $g$ . D.h. für alle  $p \in M$  mit  $\nabla g(p) \neq 0$  gilt:  $\nabla g(p) \perp T_p g^{-1}(g(p))$ .

BEWEIS Für  $p \in M$  mit  $\nabla g(p) \neq 0$  ist  $g(p)$  ein regulärer Wert (denn  $Dg(p) \neq 0$ ). Nach dem regular value theorem 3.2 ist nun  $g^{-1}(g(p))$  eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$ , besitzt also insbesondere an

der Stelle  $p$  einen Tangentialraum  $T_p g^{-1}(g(p))$ . Sei nun  $\xi \in T_p g^{-1}(g(p))$ , dann ist

$$\langle \nabla g(p), \xi \rangle = Dg(p)(\xi) = 0 \quad .$$

$Dg(p)(\xi)$  ist die Änderung von  $g$  in Richtung von  $\xi$ . In der Richtung  $\xi$  hat  $g$  aber den konstanten Wert  $g(p)$ ,  $Dg(p)(\xi)$  ist deswegen Null.  $\square$

**Proposition 3.7** Sei jetzt  $f \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 1$  und  $M$  geschlossen, wieder eine Morse-Funktion und  $\phi_t \in \text{Diff}^r(M)$  die Zeit- $t$ -Abbildung des zugehörigen Gradientenflusses. Dann bestehen  $\omega(q)$  bzw.  $\alpha(q)$ ,  $q \in M$ , aus genau einer Singularität von  $\nabla f$ .

BEWEIS i)  $\omega(q) \neq \emptyset$ : Sei  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen mit  $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ , wir definieren

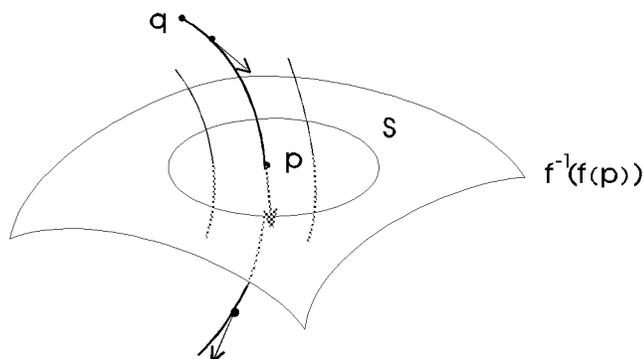
$$p_k := (\phi_t)^{n_k} q = \phi_{t \cdot n_k} q \quad .$$

Die Folge  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  hat aufgrund der Kompaktheit von  $M$  eine konvergente Teilfolge  $\{\tilde{p}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Sei

$$p := \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{p}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\phi_t)^{\tilde{n}_k} q \quad ,$$

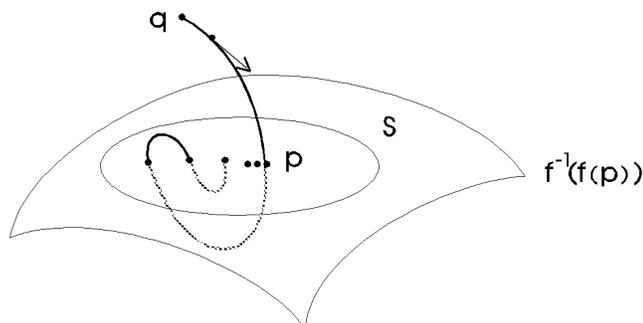
also ist  $p \in \omega(q)$ , woraus folgt  $\omega(q) \neq \emptyset$ .

ii)  $p \in \omega(q) \Rightarrow \nabla f(p) = 0$  (d.h.  $\omega(q)$  besteht nur aus Singularitäten von  $\nabla f$ ): Wir nehmen an, es existiere ein  $p \in \omega(q)$  mit  $\nabla f(p) \neq 0$ . Dann existiert, aufgrund der Stetigkeit von  $\nabla f$ , eine Umgebung  $U$  von  $p$  mit  $\nabla f(\tilde{p}) \neq 0, \forall \tilde{p} \in U$ . Wenn  $n$  die Dimension von  $M$  bezeichnet, so ist nach dem regular value theorem 3.2  $f^{-1}(f(p))$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ . Wir bezeichnen mit  $S$  den Schnitt dieser Untermannigfaltigkeit mit  $U$ . Aufgrund der Stetigkeit des Gradientenflusses und der Tatsache  $\nabla f(p) \neq 0$  folgt, daß alle Trajektorien durch Punkte nahe bei  $p$   $S$  schneiden (Figur 3.2).



Figur 3.2

Wegen  $\nabla f(p) \neq 0$ , existiert nun ein  $T > 0$  mit  $\phi_{T \cdot t}(q) = p$  (wir nehmen oBdA an  $t \in \mathbb{R}^+$ ). Weiter existiert wegen  $p \in \omega(q)$  eine Folge  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$  und  $(\phi_t)^{n_k} q = \phi_{t \cdot n_k} q \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$ . Hieraus ergibt sich ein qualitatives Verhalten des Orbits durch  $p$  wie in Figur 3.3 skizziert.

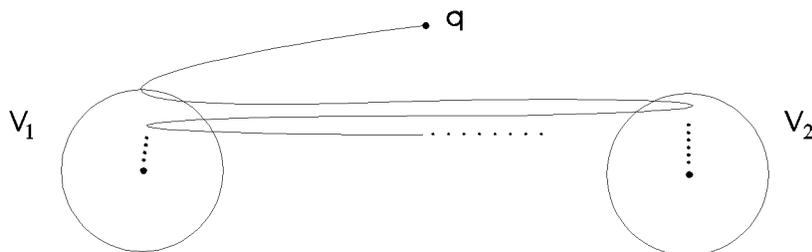


Figur 3.3

Der Orbit durch  $p$  schneidet also  $S$  mehr als einmal (unendlich oft), was ein Widerspruch zu Kor. 3.5 ist.

iii)  $\omega(q)$  ist abgeschlossen: Dies ist eine direkte Konsequenz aus ii). Nach ii) ist nämlich  $\omega(q)$  eine Teilmenge der Menge der Singularitäten von  $\nabla f$ . Da diese, wegen der Kompaktheit von  $M$ , aus endlich vielen Elementen besteht (Prop. 2.5), ist sie selbst, wie auch jede Teilmenge von ihr, abgeschlossen.

iv)  $\omega(q)$  ist zusammenhängend: Wir nehmen an,  $\omega(q)$  wäre nicht zusammenhängend. Dann finden wir, aufgrund der Abgeschlossenheit von  $\omega(q)$ , offene Mengen  $V_1$  und  $V_2$  mit:  $\omega(q) \subset V_1 \cup V_2$ ,  $\omega(q) \cap V_1 \neq \emptyset$ ,  $\omega(q) \cap V_2 \neq \emptyset$  und  $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 = \emptyset$ . Da der Orbit durch  $q$  nun immer wieder zwischen  $V_1$  und  $V_2$  hin- und herlaufen muß (Figur 3.4) ( $\omega(q) \cap V_1 \neq \emptyset$  und  $\omega(q) \cap V_2 \neq \emptyset$ ), finden wir zu jedem  $\tilde{T} > 0$  ein  $T > \tilde{T}$ , so daß  $(\phi_t)^T q \in M \setminus (V_1 \cup V_2) =: K$  (wegen  $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 = \emptyset$ ). Hieraus folgt nun die Existenz einer Folge  $\{T_k\}_k \in \mathbb{R}$  mit  $T_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$  und  $(\phi_{T_k})^{T_k} q \in K$ . Eine Teilfolge konvergiert gegen ein Element  $s$  des Kompaktums  $K$ . Also gilt gleichzeitig  $s \in \omega(q) \subset V_1 \cup V_2$  und  $s \in K = M \setminus (V_1 \cup V_2)$ , ein Widerspruch.



Figur 3.4

Wir wissen also, daß die i) nichtleere Menge  $\omega(q)$  ii) eine Teilmenge der diskreten Menge der Singularitäten von  $\nabla f$  ist, womit mit iv) ihrem Zusammenhang folgt, daß gilt  $\omega(q) = p$ ,  $\nabla f(p) = 0$ . Analoges gilt für  $\alpha(q)$ .  $\square$

Sei jetzt  $\vartheta \in Diff^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , und  $p \in M$  sei ein hyperbolischer Fixpunkt von  $\vartheta$ . Die Mengen

$$(3.7) \quad \begin{aligned} W^s(p) &:= \{q \in M \mid \omega(q) = p\} \\ W^u(p) &:= \{q \in M \mid \alpha(q) = p\} \end{aligned}$$

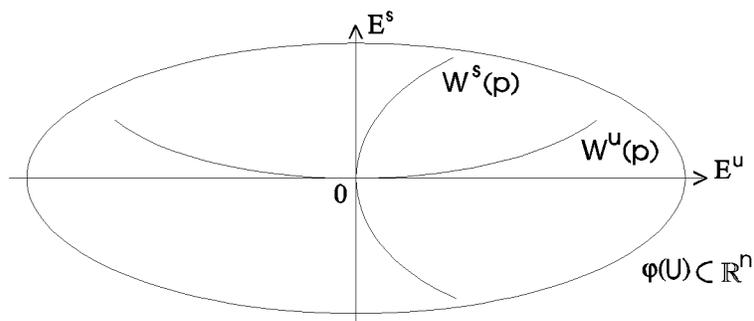
heißen **stabile** bzw. **instabile Mannigfaltigkeit von  $p$** . Die Buchstaben „s“ bzw. „u“ stehen abkürzend für „stable“ bzw. „unstable“. Aus der Definition folgt sofort die Invarianz von  $W^s(p)$  bzw.  $W^u(p)$  unter dem Diffeomorphismus  $\vartheta$ .

$W^s(p)$  für  $\vartheta$  stimmt mit  $W^u(p)$  für  $\vartheta^{-1}$  überein. Deswegen läßt sich jede Eigenschaft von  $W^s(p)$  in eine Eigenschaft von  $W^u(p)$  übertragen. Es reicht daher nur  $W^s(p)$  zu betrachten.

**Theorem 3.8 (stable manifold theorem)** [PdM, Kap. 2, Thm. 6.2] Sei  $\vartheta \in Diff^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , sei  $p \in M$  ein hyperbolischer Fixpunkt von  $\vartheta$  und sei  $E^s$  der stabile Unterraum von  $T_p M$  bezüglich  $A := D\vartheta(p)$  (siehe Prop. 1.6), dann gilt:  $W^s(p)$  ist injektiv  $C^r$ -immersiert in  $M$  und der Tangentialraum an  $W^s(p) \subset M$  am Punkt  $p$  gleich  $E^s$ , d.h.

$$T_p W^s(p) = E^s \quad .$$

Prop. 1.6 besagt nun, daß wir eine Karte  $(\varphi, U)$  um  $p$  finden, mittels der wir qualitativ eine Situation wie in Figur 3.5 erhalten.



Figur 3.5

Hieraus folgt für den Spezialfall eines Gradientenflusses das

**Lemma 3.9** Sei  $f \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 1$ , eine Morse-Funktion auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M^n$ .  $\phi_t \in \text{Diff}^r(M)$  sei die von  $-\nabla f$  erzeugte Zeit- $t$ -Abbildung und  $p \in M$  bezeichne eine Singularität von  $-\nabla f$ . Dann ist  $W^s(p)$  eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

BEWEIS Nach dem stable manifold theorem 3.8 ist  $W^s(p)$  zunächst injektiv  $C^r$ -immersiert. Prop. 3.3 liefert nun die Existenz einer Umgebung  $V$  von  $p$  in  $W^s(p)$ , so daß  $V$  eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $M^n$  ist. Durch Schnitt mit einer hinreichend kleinen offenen Umgebung von  $p$ , können wir, wegen der Isoliertheit der Singularitäten von  $-\nabla f$ , oBdA annehmen, daß  $V$  in einer Umgebung von  $p$  in  $M$  enthalten ist, die keine weiteren Singularitäten neben  $p$  enthält.

Der topologische Rand von  $V$

$$\partial V := \bar{V} \setminus \overset{\circ}{V}$$

ist abgeschlossen und somit kompakt; nun ist  $Min := \min_{q \in \partial V} f(q)$  wohldefiniert. Wegen der strengen Monotonie von  $f$  längs Orbits (Prop. 3.4), gilt  $Min > f(p)$ . Sei (wie in Figur 3.6 skizziert)  $B_\epsilon(0)$  die offene Vollkugel vom Radius  $\epsilon > 0$  um  $0 \in \mathbb{R}^n$  und sei  $(\varphi, U)$  eine Morse-Karte um  $p$ . Sei nun  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, so daß

$$\overline{B_\epsilon(p)} := \overline{\varphi^{-1}(B_\epsilon(0))} \subset U$$

und

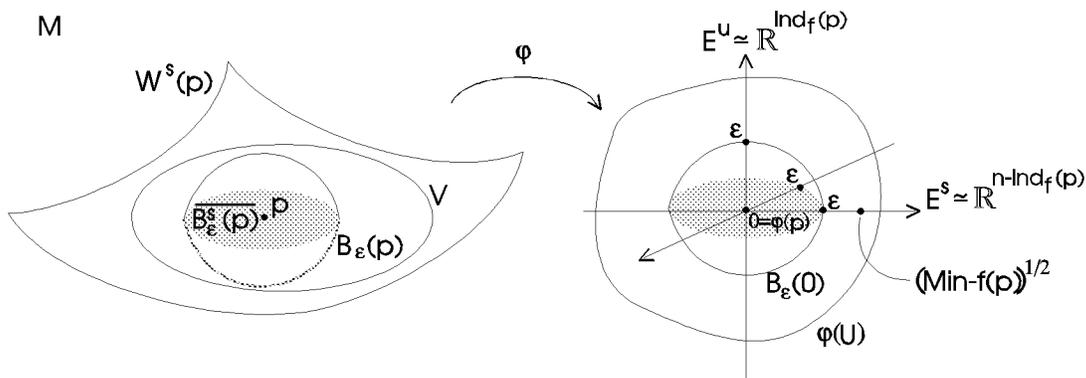
$$\epsilon < \sqrt{Min - f(p)} \quad .$$

Dann ist für  $q \in \overline{B_\epsilon(p)}$

$$f(q) \leq f(p) + \epsilon^2 < f(p) + \sqrt{Min - f(p)}^2 = Min$$

und damit

$$\overline{B_\epsilon^s(p)} := \overline{B_\epsilon(p)} \cap V \subset V \quad .$$



Figur 3.6

Es ist nun

$$(3.8) \quad (W^s(p) \setminus V) \cap \overline{B_\epsilon(p)} = \emptyset \quad ,$$

denn für  $q \in \overline{B_\epsilon(p)}$  ist  $f(q) < \text{Min}$  und für  $q \in W^s(p) \setminus V$  ist  $f(q) \geq \text{Min}$ , da  $f$  längs Orbits in rückwärtiger Zeitrichtung monoton steigend ist. Ein Orbit, der  $V$  in rückwärtiger Zeitrichtung verläßt, kann also  $\overline{B_\epsilon(p)}$  nicht mehr schneiden.

Sei wie üblich  $E^s$  der bezüglich  $D\phi_t(p): T_p M \rightarrow T_p M$  stabile Unterraum von  $T_p M$ , dann ist

$$\begin{aligned} n - k &= \dim E^s & , \quad k := \text{Ind}_f(p) \\ &= \dim T_p W^s(p) & , \quad \text{stable mf. thm. 3.8} \\ &= \dim T_p V & , \quad V \text{ Umg. von } p \text{ in } W^s(p) \\ &= \dim V & , \\ &= \dim B_\epsilon^s(p) & . \end{aligned}$$

$B_\epsilon^s(p)$  ist, als offene Teilmenge der  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit  $V$ , ebenfalls eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$  mit  $\dim B_\epsilon^s(p) = \dim V = n - k$ . Jedes  $\tilde{q} \in B_\epsilon^s(p) \subset V$  liegt deswegen in einer Karte  $(\tilde{\varphi}, \tilde{U})$  von  $M$ , so daß gilt  $\tilde{U} \cap B_\epsilon^s(p) = \tilde{\varphi}^{-1}(\mathbb{R}^{n-k})$ .

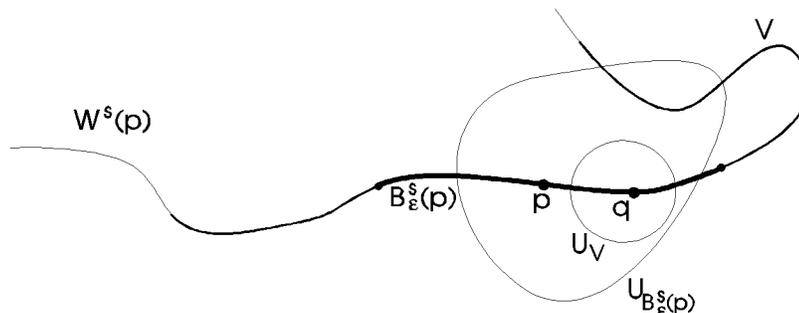
Wir finden nun für jedes  $q \in W^s(p)$  ein  $t \in \mathbb{R}^+$ , so daß  $\phi_t q \in B_\epsilon^s(p)$ , sowie eine Untermannigfaltigkeits-Karte  $(\tilde{\varphi}, \tilde{U})$  von  $B_\epsilon^s(p)$  um  $\phi_t q$ , wie oben ausgeführt.

Die Behauptung ist jetzt:  $(\psi, W) := (\tilde{\varphi} \circ \phi_t, \phi_{-t}(\tilde{U}))$  ist, für  $\tilde{U}$  hinreichend klein, eine Untermannigfaltigkeits-Karte von  $W^s(p)$  um  $q$ . Es ist

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\mathbb{R}^{n-k}) &= (\tilde{\varphi} \circ \phi_t)^{-1}(\mathbb{R}^{n-k}) & , \quad \text{Def. von } \psi \\ &= (\phi_t)^{-1} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\mathbb{R}^{n-k}) & , \quad \text{Inv.bildung bei Komp.} \\ &= \phi_{-t} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\mathbb{R}^{n-k}) & , \quad \text{aus (3.5)} \\ &= \phi_{-t}(\tilde{U} \cap B_\epsilon^s(p)) & , \quad (\tilde{\varphi}, \tilde{U}) \text{ Umf.-Karte von} \\ & & \quad B_\epsilon^s(p) \text{ um } \phi_t q \\ &= \phi_{-t}(\tilde{U} \cap W^s(p)) & , \quad \text{für } \tilde{U} \text{ hinr. klein} \\ &= \phi_{-t}(\tilde{U}) \cap \phi_{-t}(W^s(p)) & , \quad \text{Prop. 3.10} \\ &= W \cap W^s(p) & , \quad \text{Def. von } V \text{ und Fluß-} \\ & & \quad \text{invarianz von } W^s(p). \end{aligned}$$

Die fünfte Gleichheit ist die entscheidende: Sei  $(\varphi_{B_\epsilon^s(p)}, U_{B_\epsilon^s(p)})$  eine Untermannigfaltigkeits-Karte von  $B_\epsilon^s(p)$  um  $\phi_t q$  mit  $U_{B_\epsilon^s(p)} \subset B_\epsilon(p)$  und  $(\varphi_V, U_V)$  eine ebensolche von  $V$  um  $\phi_t q$  mit  $U_V \subset U_{B_\epsilon^s(p)}$  (siehe Figur 3.7). Also ist  $U_V \subset B_\epsilon(p)$ , denn  $U_{B_\epsilon^s(p)} \subset B_\epsilon(p)$ . Nun gilt mit (3.8)

$$(3.9) \quad U_V \cap (W^s(p) \setminus V) \subset B_\epsilon(p) \cap (W^s(p) \setminus V) \subset \overline{B_\epsilon(p)} \cap (W^s(p) \setminus V) = \emptyset \quad .$$

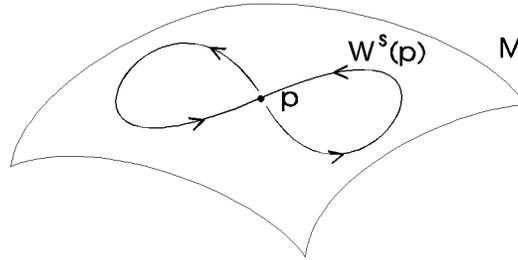


Figur 3.7

Durch die letzte Forderung  $U_V \subset U_{B_\epsilon^s(p)}$  wird ausgeschlossen, daß  $U_V$  noch Elemente von  $V \setminus B_\epsilon^s(p)$  enthält, d.h.  $U_V \cap (V \setminus B_\epsilon^s(p)) = \emptyset$ . Wir definieren nun  $(\tilde{\varphi}, \tilde{U}) := (\varphi_V, U_V)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{U} \cap B_\epsilon^s(p) &= \left( \tilde{U} \cap B_\epsilon^s(p) \right) \cup \underbrace{\left( \tilde{U} \cap (V \setminus B_\epsilon^s(p)) \right)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{\left( \tilde{U} \cap (W^s(p) \setminus V) \right)}_{=\emptyset} \\ &= \tilde{U} \cap \left( B_\epsilon^s(p) \cup (V \setminus B_\epsilon^s(p)) \cup (W^s(p) \setminus V) \right) \\ &= \tilde{U} \cap \left( V \cup (W^s(p) \setminus V) \right) \\ &= \tilde{U} \cap W^s(p) \quad . \end{aligned}$$

Wir haben nun für jedes  $q \in W^s(p)$  eine Untermannigfaltigkeits-Karte  $(\psi, W)$  aus einer Untermannigfaltigkeits-Karte  $(\tilde{\varphi}, \tilde{U})$  von  $B_\epsilon^s(p)$  für  $\phi_t q \in B_\epsilon^s(p)$  gebastelt.  $W^s(p)$  ist also lokal diffeomorph zu  $\mathbb{R}^{n-k}$  und ist daher eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$  mit  $\dim W^s(p) = \dim E^s$ . In den Beweis geht wesentlich die Eigenschaft des Gradientenflusses ein, daß Orbits in  $W^s(p)$  in rückwärtiger Zeitrichtung nicht mehr "in die Nähe von  $p$ " zurückkehren, d.h. folgende Situation ist nicht möglich:



Figur 3.8

□

Im vorigen Beweis wurde folgendes Resultat benutzt:

**Proposition 3.10** Für einen beliebigen Diffeomorphismus  $\vartheta: M \rightarrow N$  und Mengen  $A, B \subset M$  gilt

$$\vartheta(A \cap B) = \vartheta(A) \cap \vartheta(B) \quad .$$

BEWEIS "  $\supset$  " Sei  $q \in \vartheta(A) \cap \vartheta(B)$ ; also ist, wegen  $q \in \vartheta(A)$ ,  $\vartheta^{-1}(q) \in \vartheta^{-1} \circ \vartheta(A) = A$  und, wegen  $q \in \vartheta(B)$ ,  $\vartheta^{-1}(q) \in \vartheta^{-1} \circ \vartheta(B) = B$ , also  $\vartheta^{-1}(q) \in A \cap B$ . Hieraus folgt  $q = \vartheta \circ \vartheta^{-1}(q) \in \vartheta(A \cap B)$ .

"  $\subset$  " Sei  $q \in \vartheta(A \cap B)$ , dann ist  $\vartheta^{-1}(q) \in \vartheta^{-1} \circ \vartheta(A \cap B) = A \cap B$ . Also ist, wegen  $\vartheta^{-1}(q) \in A$ ,  $q = \vartheta \circ \vartheta^{-1}(q) \in \vartheta(A)$  und, wegen  $\vartheta^{-1}(q) \in B$ ,  $q = \vartheta \circ \vartheta^{-1}(q) \in \vartheta(B)$ , also  $q \in \vartheta(A) \cap \vartheta(B)$ . □

**Proposition 3.11** Voraussetzungen wie in Lemma 3.9. Dann gilt

$$\dim W^s(p) = n - \text{Ind}_f(p) \quad \text{und} \quad \dim W^u(p) = \text{Ind}_f(p) \quad .$$

BEWEIS Nach dem stable manifold theorem 3.8 gilt:  $T_p W^s(p) = E^s$ , wobei  $E^s$  den stabilen Unterraum von  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$  bezüglich  $D\phi_t(p): T_p M \rightarrow T_p M$  bezeichnet. Da nun  $W^s(p)$  nach Lemma 3.9 eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$  ist, und die Dimension einer Mannigfaltigkeit mit der Dimension eines ihrer Tangentialräume übereinstimmt, ist  $\dim W^s(p) = \dim E^s = n - \text{Ind}_f(p)$ , aus (2.17). Analog ist  $T_p W^u(p) = E^u$  und  $\dim W^u(p) = \dim E^u = \text{Ind}_f(p)$ , aus (2.16). □

Wir haben in diesem Abschnitt also gezeigt, daß die bzgl. des Gradientenflusses  $\phi_t$  definierten

Mengen  $W^u(p)$  und  $W^s(p)$   $C^r$ -Untermannigfaltigkeiten von  $M$  sind, mit den komplementären Dimensionen  $Ind_f(p)$  bzw.  $n - Ind_f(p)$ . Ihre Tangentialräume  $E^u$  bzw.  $E^s$  am Punkt  $p$  spannen, wegen  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$ , den gesamten Tangentialraum  $T_p M$  auf. Man sagt  $W^u(p)$  und  $W^s(p)$  schneiden sich am Punkt  $p$  **transversal**. Diesen Begriff werden wir im folgenden Abschnitt 2.1 genauer betrachten.

DIE LOKALEN (IN)STABILEN MANNIGFALTIGKEITEN  $W_{loc}^{(u)s}(p)$

Wir wollen jetzt noch einmal auf die Kartendarstellung eines hyperbolischen Fixpunktes  $p \in M$  eines  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\vartheta$  in einer kleinen Umgebung von  $p$  eingehen.  $D\vartheta(p): T_p M \rightarrow T_p M$  ist ein linearer hyperbolischer Isomorphismus, also existiert nach Prop. 1.6 eine eindeutige Zerlegung  $\mathbb{R}^n = T_p M = E^u \oplus E^s$  in unter  $D\vartheta(p)$  invariante Unterräume  $E^u$  und  $E^s$  von  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt

$$(3.8) \quad \mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s = T_p W^u(p) \oplus T_p W^s(p) \quad , \text{ stable mf. thm. 3.8.}$$

Dieses liefert ebenfalls, daß  $W^s(p)$  und  $W^u(p)$   $C^r$ -immersierte Untermannigfaltigkeiten sind. Nach Prop. 3.3 sind sie lokal  $C^r$ -Untermannigfaltigkeiten von  $M$ . Mit  $W_{loc}^u(p)$  bzw.  $W_{loc}^s(p)$  seien solche kleinen Umgebungen von  $p$  in  $W^u(p)$  bzw.  $W^s(p)$  bezeichnet. Nach Prop. 3.11 ist  $dim W_{loc}^u(p) = Ind(p) =: k$  und  $dim W_{loc}^s(p) = n - Ind(p)$ .

Da es sich um ein lokales Problem handelt, betrachten wir ab jetzt alles in einer Karte  $(\varphi, U)$  um  $p$  mit  $\varphi(p) = 0$ , d.h. wir befinden uns im  $\mathbb{R}^n$  (die Bezeichnungen werden wir nicht verändern).

Die beiden Untermannigfaltigkeiten schneiden sich also transversal und wir können Lemma 2.1.9 aus Kapitel 2 anwenden: Seien  $B^s \subset E^s$  und  $B^u \subset E^u$  hinreichend kleine Umgebungen des Nullpunkts, dann ist  $W_{loc}^u(p)$  der Graph einer  $C^r$ -Abbildung  $\eta_u: B^u \rightarrow E^s$  mit  $\eta_u(0) = 0$  und  $D\eta_u(0) = 0$ . Analog ist  $W_{loc}^s(p)$  der Graph der  $C^r$ -Abbildung  $\eta_s: B^s \rightarrow E^u$  mit  $\eta_s(0) = 0$  und  $D\eta_s(0) = 0$ .

Die Abbildung

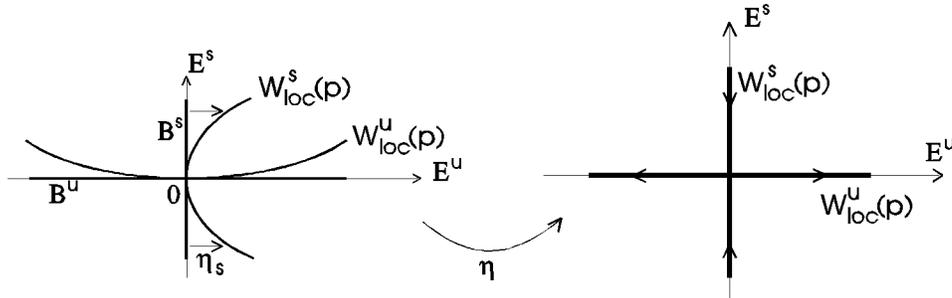
$$(3.9) \quad \eta : B^u \oplus B^s \rightarrow E^u \oplus E^s$$

$$(x_u, x_s) \mapsto (x_u - \eta_s(x_s), x_s - \eta_u(x_u))$$

ist  $C^r$ , außerdem ist  $\eta(0,0) = (0,0)$  und

$$(3.10) \quad D\eta(0,0) = \begin{bmatrix} k, k & 0_{k, n-k} \\ 0_{n-k, k} & n-k, n-k \end{bmatrix} = \begin{matrix} & & n, n \\ & & \cdot \end{matrix}$$

Also ist nach dem Thm. über inverse Funktionen 1.8  $\eta$  in einer kleinen Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}^n$  ein  $C^r$ -Diffeomorphismus. Der Diffeomorphismus  $\eta$  bildet  $W_{loc}^u(p)$  bzw.  $W_{loc}^s(p)$  nach  $E^u$  bzw.  $E^s$  ab (siehe Figur 3.9).



Figur 3.9

Jetzt konjugieren wir unseren ursprünglichen Diffeomorphismus  $\vartheta$  mit  $\eta$  und erhalten  $\tilde{\vartheta} := \eta \circ \vartheta \circ \eta^{-1}$ . Es ist

$$(3.11) \quad \tilde{\vartheta}(0) = \eta \circ \vartheta \circ \eta^{-1}(0) = \eta \circ \vartheta(0) = \eta(0) = 0$$

und

$$(3.12) \quad D\tilde{\vartheta}(0) = D(\eta \circ \vartheta \circ \eta^{-1})(0) = D\eta(0) \circ D\vartheta(0) \circ D\eta^{-1}(0) = D\vartheta(0) \quad .$$

Wir können also immer oBdA annehmen, daß im Fall eines hyperbolischen Fixpunktes  $p$  eines Diffeomorphismus  $\vartheta$   $W_{loc}^u(p)$  bzw.  $W_{loc}^s(p)$  Umgebungen von  $0$  in  $E^u$  bzw.  $E^s$  sind.

## Kapitel 2

# Die Orbiträume $\hat{M}_{x,y}$

In diesem Kapitel untersuchen wir die Struktur der, zwei kritische Punkte  $x, y$ , verbindenden Mannigfaltigkeit  $M_{x,y}$ , sowie der Orbiträume  $\hat{M}_{x,y}$ . Diese werden am Ende von Abschnitt 2.1 "TRANSVERSALITÄT" definiert. Zuvor jedoch beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit der Morse-Smale Bedingung, welche erfüllt ist, falls der Schnitt von  $W^u(x)$  mit  $W^s(y)$ , für alle kritischen Punkte  $x$  und  $y$  der Morse-Funktion  $f$ , transversal ist. Wir approximieren zunächst unsere gegebene Riemannsche Mannigfaltigkeit durch eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$ . Anschließend leiten wir aus den bekannten Theoremen A und B von Smale [Sm] her, daß die Menge der Vektorfelder, die der Morse-Smale Bedingung genügen,  $C^1$ -dicht ist in  $Grad^\infty(M)$ . Wir können also unser gegebenes Vektorfeld  $\nabla_g f$  durch ein  $\nabla_{\tilde{g}} \tilde{f}$  approximieren, welches der Morse-Smale Bedingung genügt. Wir gehen also von  $(f, g)$  zu  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  über, wobei zu beachten ist, daß der Typ von  $\tilde{f}$  gleich dem Typ von  $f$  ist. Wir können nun oBdA davon ausgehen, daß  $M, g, f$  glatt sind und die Morse-Smale Bedingung erfüllt ist. Abschließend werden die verbindenden Mannigfaltigkeiten definiert

$$M_{x,y} := W^u(x) \pitchfork W^s(y) \quad , \quad x, y \in \text{Crit } f := \{p \in M \mid Df(p) = 0\} .$$

Aufgrund der Transversalität des Schnittes (Symbol  $\pitchfork$ ), ist  $M_{x,y}$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  der Dimension  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y)$ . Wir definieren die Orbiträume

$$\hat{M}_{x,y} := M_{x,y} \pitchfork f^{-1}(a) \quad , \quad a \in (f(y), f(x)) \text{ regulärer Wert} .$$

Auch diese sind Untermannigfaltigkeiten, sowohl von  $M_{x,y}$ , als auch von  $M$ . Ihre Dimension ist  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) - 1$ . Die Punkte von  $\hat{M}_{x,y}$  können eindeutig mit den Orbits von  $x$  nach  $y$  identifiziert werden, daher die Bezeichnung Orbitraum.

In Abschnitt 2.2 "KOMPAKTHEIT" beschäftigen wir uns mit dieser Eigenschaft der Orbiträume  $\hat{M}_{x,y}$ . Wir führen zuerst den Begriff "kompakt bis auf  $k$ -fach gebrochene Orbits" ein. Ein  $k$ -fach gebrochener Orbit bezeichnet ein  $(k+1)$ -Tupel von Orbits, wobei jeweils Anfang bzw. Ende von Nachbarorbits übereinstimmen. Die Hindernisse zur üblichen Kompaktheit der Orbiträume  $\hat{M}_{x,y}$  liegen an deren "Rändern", es sind die gebrochenen Orbits. Das Kompaktheitsresultat Thm. 2.1 liefert im Fall  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) = 1$

$$\#\hat{M}_{x,y} < \infty \quad .$$

Der Beweis dieses, für die Konstruktion des Randoperators in Abschnitt 3.2, elementaren Resultats wird in 3 weiteren Versionen diskutiert.

Im letzten Abschnitt 2.3 "GLUEING" werden wir das sogenannte Glueing (=kleben) von Orbits einführen, allerdings nur für den Fall  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(z) = 2$ . Die Glueing-Abbildung  $\#_\rho$  ordnet zwei Orbits  $\hat{u} \in \hat{M}_{x,y}$  und  $\hat{v} \in \hat{M}_{y,z}$  den Orbit  $\hat{u} \#_\rho \hat{v} \in \hat{M}_{x,z}$  zu.  $\rho \in (0, \hat{\rho}_0)$  heißt Glueing-Parameter. Für  $\rho \rightarrow \infty$  konvergiert  $\hat{u} \#_\rho \hat{v}$  gegen den gebrochenen Orbit  $(\hat{u}, \hat{v})$ .

Aufgrund der Analyse der Struktur der Orbiträume in den Abschnitten 2.2 und 2.3, können wir schließen, daß eine Zusammenhangskomponente von  $\hat{M}_{x,z}$  (für  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(z) = 2$ ), welche diffeomorph zu  $(0, 1)$  ist, an je einem Ende von einem gebrochenen Orbit  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \in \hat{M}_{x,y_1} \times \hat{M}_{y_1,z}$  bzw.  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2) \in \hat{M}_{x,y_2} \times \hat{M}_{y_2,z}$  mit  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \neq (\hat{u}_2, \hat{v}_2)$  "berandet" wird. Wir nennen  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  und  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2)$  deswegen cobordant. Umgekehrt erhalten wir aus der Analyse der Glueing-Abbildung das Resultat, daß jedes  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x,y} \times \hat{M}_{y,z}$  im Rand von genau einer Zusammenhangskomponente von  $\hat{M}_{x,z}$  liegt. Diese Eigenschaften sind in Abschnitt 3.2 von Bedeutung.

## 2.1 Transversalität

In der Morse-Theorie brauchen wir zunächst eine Riemannsche  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  (diese sei zusätzlich geschlossen) und eine  $C^2$ -Morse-Funktion  $f$ . In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß wir oBdA annehmen können:  $M$ ,  $g$  und  $f$  sind glatt und  $f$  genügt außerdem der sogenannten **Morse-Smale Bedingung** (d.h. für  $x, y \in \text{Crit } f$  ist der Schnitt  $W^u(x) \cap W^s(y)$  transversal).

Diese Annahme rechtfertigen wir im wesentlichen mittels eines bekannten Resultats von Smale [Sm, Thm. A und B], es besagt:  $\nabla_g f$  kann in  $\text{Grad}^\infty(M)$  beliebig genau durch ein Vektorfeld  $\nabla_{\tilde{g}} \tilde{f}$   $C^1$ -approximiert werden, wobei  $\tilde{g}$  eine glatte Riemannsche Metrik und  $\tilde{f}$  eine glatte Morse-Funktion auf  $M$  ist, welche die Morse-Smale Bedingung erfüllt.

Unter der Überschrift "APPROXIMATIONEN" rechtfertigen wir zunächst die Annahme der Glattheit von  $M$ . Dies folgt daraus, daß jede differenzierbare Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer glatten Mannigfaltigkeit ist (Thm 1.1). Anschließend zeigen wir die Existenz von glatten Morse-Funktionen auf  $M$  und, im Falle einer vorgegebenen Morse-Funktion, daß wir diese beliebig genau durch glatte Morse-Funktionen approximieren können. In Prop. 1.3 wird gezeigt, daß der Typ einer Morse-Funktion lokal konstant auf dem Raum aller Morse-Funktionen ist. Dieses ergibt sich als Spezialfall von Lemma 1.4, welches besagt, daß der Typ eines hyperbolischen Vektorfeldes lokal konstant auf dem Raum aller Vektorfelder ist.

Im folgenden Teil "TRANSVERSALITÄT" führen wir zunächst dieses differentialtopologische Konzept ein. Es wird gezeigt, daß der transversale Schnitt  $A \pitchfork B$  zweier Untermannigfaltigkeiten  $A^a$  und  $B^b$  einer Mannigfaltigkeit  $N^n$  selbst eine Untermannigfaltigkeit von  $N$  der Dimension  $a + b - n$  ist (Kor. 1.8). Dieses Resultat wird später bei der Definition der verbindenden Mannigfaltigkeiten  $M_{x,y}$ , sowie der Orbiträume  $\hat{M}_{x,y}$  benutzt.

Die "MORSE-SMALE BEDINGUNG" diskutieren wir im dritten Teil dieses Abschnitts. Wir betrachten zunächst das (Standard-) Beispiel eines in den  $\mathbb{R}^3$  eingebetteten 2-Torus. Anschließend zeigen wir, mittels der bekannten Theoreme A und B von Smale [Sm], daß die Menge der Vektorfelder, die der Morse-Smale Bedingung genügen,  $C^1$ -dicht in  $\text{Grad}^\infty(M)$  ist. Wir können also ein gegebenes  $\nabla_g f$  durch ein  $\nabla_{\tilde{g}} \tilde{f}$   $C^1$ -approximieren, wobei  $\tilde{f}$  der Morse-Smale Bedingung genügt. Der Typ von  $f$  ist gleich dem von  $\tilde{f}$ , dies folgt im wesentlichen aus der lokalen Konstanz des Typs eines hyperbolischen Vektorfeldes auf dem Raum aller Vektorfelder (Lemma 1.4). Da die kritischen Punkte in Kapitel 3 als Erzeuger der Kettengruppen  $C_*(f)$  dienen ist dies wichtig, denn daraus folgt  $C_*(f) \simeq C_*(\tilde{f})$ .

Im letzten Teil "VERBINDENDE MANNIGFALTIGKEITEN UND ORBITRÄUME" definieren wir die  $x$  mit  $y$  verbindende Mannigfaltigkeit  $M_{x,y} := W^u(x) \pitchfork W^s(y)$ , sie ist eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  der Dimension  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y)$ . Für  $x \neq y$  und  $M_{x,y} \neq \emptyset$  gilt:  $\text{Ind}_f(x) > \text{Ind}_f(y)$ , d.h. es gibt nur Orbits von kritischen Punkten zu solchen mit echt kleinerem Morse-Index. Sei  $a \in (f(y), f(x))$  ein regulärer Wert von  $f$ , dann ist  $\hat{M}_{x,y} := M_{x,y} \pitchfork f^{-1}(a)$  der Orbitraum von  $x$  und  $y$ . Er ist eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  der Dimension  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) - 1$ .  $\hat{M}_{x,y}$  erbt die Quotiententopologie von  $M_{x,y}/\sim$ , wobei zwei Punkte in  $M_{x,y}$  äquivalent sind, falls sie auf demselben Orbit liegen.

### APPROXIMATIONEN

Da wir in der Morse-Theorie 2-fache stetige Differenzierbarkeit benötigen, gehen wir von einer geschlossenen  $C^r$ -Mannigfaltigkeit  $M$  aus,  $r \geq 2$ . Wir können oBdA annehmen, daß  $M$  glatt ist, denn es gilt das

**Theorem 1.1** [H, Kap. 2, Thm. 2.10 a)] Sei  $1 \leq r < \infty$ , dann ist jede  $C^r$ -Mannigfaltigkeit  $C^r$ -diffeomorph zu einer glatten Mannigfaltigkeit.

Nun zur Existenz einer Morse-Funktion  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ; zunächst brauchen wir das Resultat

**Theorem 1.2** [H, Kap. 2, Thm. 2.6] Seien  $M$  und  $N$   $C^s$ -Mannigfaltigkeiten,  $1 \leq s \leq \infty$ . Dann ist  $C^s(M, N)$  dicht in  $C^r_S(M, N)$ ,  $0 \leq r < s$ .

**Bemerkung 1.1**  $C_S^r(M, N)$  bezeichnet den Raum  $C^r(M, N)$  versehen mit der starken Topologie,  $C_W^r(M, N)$  bezeichnet denselben versehen mit der schwachen oder "kompakt-offen" Topologie. Da in unserem Fall  $M$  kompakt ist, stimmt die starke Topologie mit der schwachen Topologie überein. Die Definitionen dieser Topologien finden sich beispielsweise in [H, Kap. 2.1].

Jetzt zur Existenz von glatten Morse-Funktionen auf  $M$ : Wir wählen zuerst irgendeine glatte Funktion auf  $M$ , z.B.  $g(x) := 1, \forall x \in M$ . Dann liefert Thm. 1.2.6, daß  $g$  im Raum  $C_W^\infty(M, \mathbb{R})$  beliebig genau durch glatte Morse-Funktionen approximiert werden kann. Wir finden also in jeder Umgebung  $\mathcal{N}_g$  von  $g$  in  $C_W^\infty(M, \mathbb{R})$  eine glatte Morse-Funktion.

Im Fall einer vorgegebenen Morse-Funktion  $\tilde{f} \in C^r(M, \mathbb{R}), r \geq 2$ , gehen wir so vor: Nach Thm. 1.2.6 finden wir eine Umgebung  $\mathcal{N}_{\tilde{f}}$  von  $\tilde{f}$  in  $C_W^r(M, \mathbb{R})$ , so daß alle  $g \in \mathcal{N}_{\tilde{f}}$   $C^r$ -Morse-Funktionen sind. Nun ist nach Thm. 1.2  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  dicht in  $C_W^r(M, \mathbb{R})$ , wir können  $\tilde{f}$  also beliebig genau durch  $C^\infty$ -Funktionen approximieren. Sei jetzt  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, so daß  $\mathcal{N}_\epsilon \subset \mathcal{N}_{\tilde{f}}$ , dann finden wir eine glatte Funktion  $f \in \mathcal{N}_\epsilon$  (Thm. 1.2). Da ebenfalls gilt  $f \in \mathcal{N}_{\tilde{f}}$ , ist  $f$  eine glatte Morse-Funktion, welche  $\tilde{f}$  in der schwachen Topologie  $\epsilon$ -genau approximiert. Für  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, ist  $f$  vom selben Typ wie  $\tilde{f}$  (Prop. 1.3).

**Bemerkung 1.2** Wir können nun im folgenden oBdA davon ausgehen, daß  $M^n$  eine geschlossene glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  ist und  $f$  eine glatte Morse-Funktion auf  $M$ .

Es sei noch bemerkt, daß der Typ einer Morse-Funktion  $f$ , d.h. die Anzahl der kritischen Punkte von  $f$  geordnet nach den Morse-Indizes, auf dem Raum der Morse-Funktionen lokal konstant ist. Dies ist die Aussage der

**Proposition 1.3** Sei  $f \in C^r(M^n, \mathbb{R}), r \geq 2$ , eine Morse-Funktion vom Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ . Dann existiert eine Umgebung  $\mathcal{N}_f$  von  $f$  in  $C_W^r(M, \mathbb{R})$ , so daß alle  $g \in \mathcal{N}_f$  Morse-Funktionen vom selben Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  sind.

Unter Verwendung von Prop. 1.2.2 (nichtdegenerierte kritische Punkte von  $f$  sind dasselbe wie hyperbolische Singularitäten von  $\nabla f$ ) und Gleichung (1.2.18) ( $Ind_f(p) = Ind(p)$ ), ergibt sich Prop. 1.3 als Spezialfall von

**Lemma 1.4** Sei  $X \in \mathfrak{X}^r(M), r \geq 1$ , ein hyperbolisches Vektorfeld vom Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ . Dann existiert eine Umgebung  $\mathcal{N}_X$  von  $X$  in  $\mathfrak{X}_W^r(M)$ , so daß alle  $\tilde{X} \in \mathcal{N}_X$  hyperbolische Vektorfelder vom selben Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  sind.

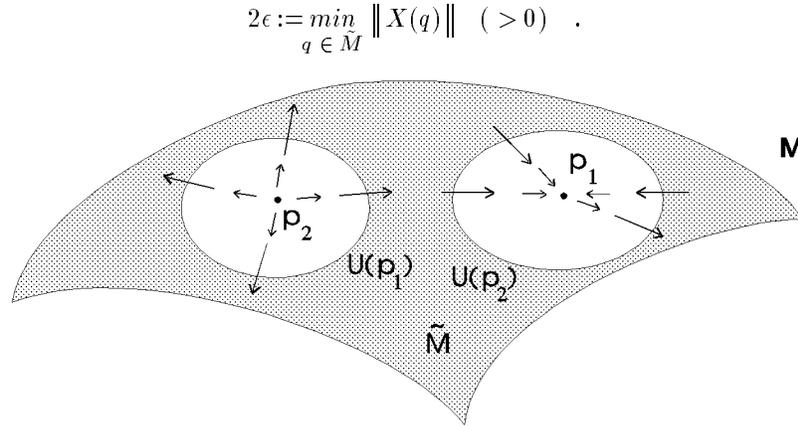
Wesentlich für den Beweis von Lemma 1.4 sind die beiden Resultate

**Lemma 1.5** [PdM, Kap. 2, Prop. 3.1] Sei  $X \in \mathfrak{X}^r(M), r \geq 1$ , und sei  $p \in M$  eine nichtdegenerierte Singularität von  $X$ . Dann existieren Umgebungen  $\mathcal{N}(X) \subset \mathfrak{X}_W^r(M)$  von  $X$  und  $U(p) \subset M$  von  $p$ , sowie eine stetige Funktion  $\rho: \mathcal{N}(X) \rightarrow U(p)$ , welche jedem Vektorfeld  $Y \in \mathcal{N}(X)$  die eindeutige Singularität von  $Y$  in  $U(p)$  zuordnet.

**Proposition 1.6** [PdM, Kap. 2, Korollar auf S. 54] Sei  $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$  ein hyperbolisches lineares Vektorfeld, dann existiert eine Umgebung  $V \subset \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$  von  $L$ , so daß alle  $T \in V$  denselben Index wie  $L$  besitzen.

Dies ist eine Konsequenz aus der Tatsache, daß die Eigenwerte einer linearen Abbildung stetig von dieser abhängen.

BEWEIS (von Lemma 1.4) Sei also  $X \in \mathfrak{X}^r(M), r \geq 1$ , ein hyperbolisches Vektorfeld vom Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ . D.h.  $X$  besitzt  $N := \sum_{k=0}^n \nu_k < \infty$  Singularitäten auf  $M$ ; diese seien mit  $p_i, i \in \{1, \dots, N\}$ , bezeichnet. Nach Lemma 1.5 existieren für jedes  $p_i$  Umgebungen  $\mathcal{N}_i(X) \subset \mathfrak{X}^r(M)$  und  $U(p_i) \subset M$ , sowie eine stetige Funktion  $\rho_i: \mathcal{N}_i(X) \rightarrow U(p_i)$ , welche jedem Vektorfeld  $Y \in \mathcal{N}_i(X)$  seine eindeutige Singularität in  $U(p_i)$  zuordnet. Wir definieren  $\mathcal{N}(X) := \bigcap_{i=1}^N \mathcal{N}_i(X)$ ;  $\mathcal{N}(X)$  ist dann als endlicher Schnitt von Umgebungen von  $X$  wieder eine Umgebung von  $X$  in  $\mathfrak{X}^r(M)$ .  $\tilde{M} := M \setminus \bigcup_{i=1}^N U(p_i)$  ist kompakt; sei



Figur 1.1

Sei nun  $\mathcal{U}_\epsilon(X)$  die  $\epsilon$ -Umgebung von  $X$  in  $\mathfrak{X}_W^r(M)$ , dann folgt, daß jedes  $Y \in \mathcal{U}_\epsilon(X)$  in  $\tilde{M}$  keine Singularitäten besitzt,  $\mathcal{N}_X := \mathcal{N}(X) \cap \mathcal{U}_\epsilon(X)$  ist nun die gesuchte Umgebung, denn ein  $Y \in \mathcal{N}_X$  hat in  $\tilde{M}$  keine Singularitäten und in  $U(p_i)$  die eindeutige Singularität  $\rho_i(Y)$ . Gegebenenfalls durch Verkleinerung von  $\mathcal{N}_X$  folgern wir nun, daß  $DY(\rho_i(Y))$  in der Umgebung  $V_i \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  (aus Prop. 1.6) von  $DX(p_i)$  liegt.  $DY(\rho_i(Y))$  hat dann denselben Index wie  $DX(p_i)$ ,  $\rho_i(Y)$  ist also eine hyperbolische Singularität von  $Y$  mit  $Ind_Y(\rho_i(Y)) = Ind_X(p_i)$ . Da nun alle Singularitäten von  $Y$  hyperbolisch sind, ist  $Y$  ein hyperbolisches Vektorfeld und es gilt  $Typ Y = Typ X = (\nu_0, \dots, \nu_n)$ .  $\square$

BEWEIS (von Prop. 1.3)  $f \in C^r(M^n, \mathbb{R}), r \geq 2$ , ist eine Morse-Funktion vom Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  genau dann, wenn  $\nabla f \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)$  ein hyperbolisches Vektorfeld vom selben Typ ist. Dies folgt aus Prop. 1.2.2, sowie aus dem Vergleich des Morse-Index eines nichtdegenerierten kritischen Punktes  $p$  von  $f$  mit dem Index des hyperbolischen linearen Vektorfeldes  $D\nabla f(p)$ ; es ist  $Ind_f(p) = Ind(D\nabla f(p))$  (1.2.18). Lemma 1.4 liefert die Existenz einer Umgebung  $\mathcal{N}_{\nabla f}$  von  $\nabla f$  in  $\mathfrak{X}^{r-1}(M)$ , so daß alle  $X \in \mathcal{N}_{\nabla f}$  hyperbolische Vektorfelder vom Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  sind.

Sei  $\mathcal{N}_f$  eine hinreichend kleine Umgebung von  $f$  in  $C_W^r(M, \mathbb{R})$ , dann ist für alle  $g \in \mathcal{N}_f$   $\nabla g \in \mathcal{N}_{\nabla f}$ , also  $\nabla g$  ein hyperbolisches Vektorfeld vom Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ . Wie oben ausgeführt, ist dies äquivalent dazu, daß  $g$  eine Morse-Funktion vom Typ  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  ist.  $\square$

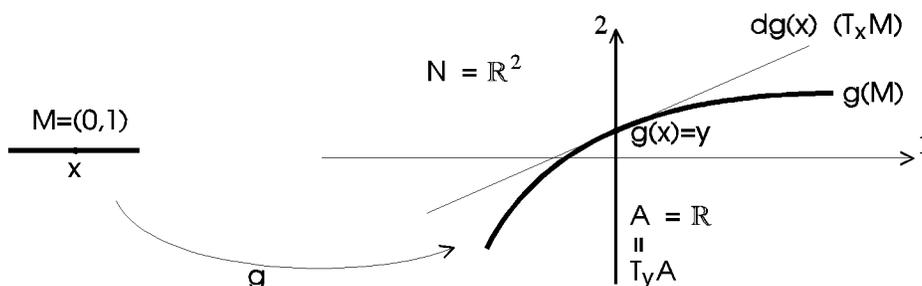
## TRANSVERSALITÄT

Jetzt wollen wir ein zentrales Konzept der Differentialtopologie einführen, nämlich das der Transversalität einer Abbildung zu einer Untermannigfaltigkeit bzw. zweier Untermannigfaltigkeiten zueinander. Sei dazu  $g: M \rightarrow N$  eine  $C^r$ -Abbildung,  $r \geq 1$ , zwischen zwei Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ .  $g$  heißt **transversal zu einer Untermannigfaltigkeit  $A \subset N$** , falls für jedes  $x \in M$  mit  $g(x) = y \in A$  gilt

$$(1.3) \quad T_y N = T_y A + dg(x)(T_x M) \quad .$$

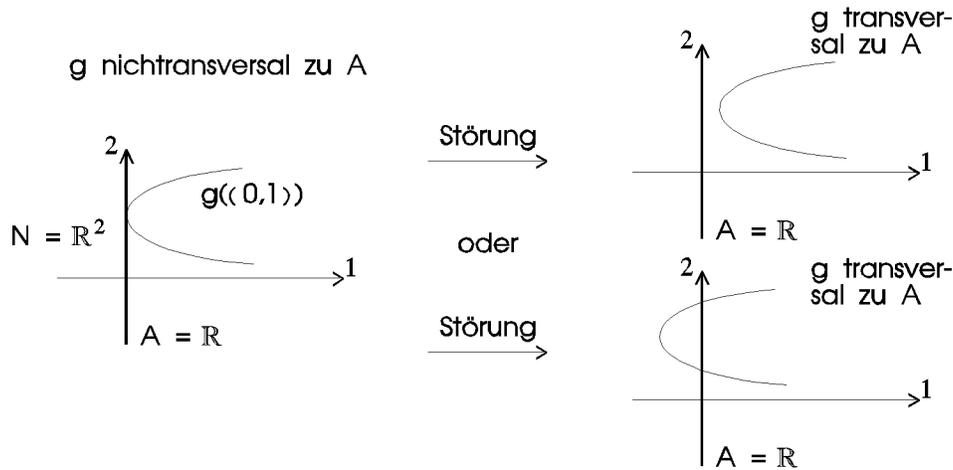
D.h. der Tangentialraum an  $N$  im Punkt  $y = g(x)$  wird aufgespannt vom Tangentialraum an  $A$  im Punkt  $y$  und dem Bild des Tangentialraumes an  $M$  im Punkt  $x$  unter der Linearisierung von  $g$ .

**Beispiel 1.1**  $M = (0, 1), N = \mathbb{R}^2, A = (2\text{-Achse im } \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}$ .



Figur 1.2

Wir sehen an diesem Beispiel folgende wichtige Eigenschaft von Transversalität: Wenn  $g$  in  $C^r_W(M, N)$  ein klein wenig variiert wird, so bleibt die Transversalität erhalten. Es ist sogar so, daß eine nichttransversale Abbildung beliebig genau durch transversale Abbildungen approximiert werden kann (Figur 1.3).



Figur 1.3

Eine Verallgemeinerung des regular value theorems 1.3.2 ist das

**Theorem 1.7** [H, Kap. 1, Thm. 3.3] Sei  $g: M \rightarrow N$  eine  $C^r$ -Abbildung,  $r \geq 1$ , und  $A \subset N$  eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $N$ . Falls  $g$  transversal zu  $A$  ist, so ist  $g^{-1}(A)$  eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$ . Die Kodimension von  $g^{-1}(A)$  in  $M$  ist gleich der Kodimension von  $A$  in  $N$ .

Wir sagen zwei Untermannigfaltigkeiten  $A$  und  $B$  sind **in allgemeiner Lage** oder auch **schneiden sich transversal** (Symbol  $\pitchfork$ ), falls die Inklusionsabbildung  $i: A \rightarrow N$  transversal zu  $B$  ist; oder äquivalent dazu, falls für  $x \in A \cap B$  gilt

$$(1.4) \quad T_x N = T_x A + T_x B \quad .$$

Denn sei  $i$  transversal zu  $B$ , also

$$(1.5) \quad \begin{aligned} T_{i(x)} N &= T_{i(x)} B + Di(x)(T_x A) \\ \Leftrightarrow T_x N &= T_x B + T_x A \quad , \end{aligned}$$

denn  $i(x) = x$ , und aus  $i = Id_N|_A$  folgt  $Di(x) = \cdot|_{T_x A}$ .

Bei der zweiten Formulierung von allgemeiner Lage sehen wir leicht eine Symmetrie der Bedingung in  $A$  und  $B$ .

**Korollar 1.8** Seien  $A^a$  und  $B^b$  Untermannigfaltigkeiten der Mannigfaltigkeit  $N^n$ . Falls  $A$  und  $B$  sich transversal schneiden, so gilt:  $A \pitchfork B$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $A$ , von  $B$ , sowie von  $N$  und es ist  $\dim A \pitchfork B = a + b - n$ .

BEWEIS Sei  $i: A \rightarrow N$  transversal zu  $B$ , dann ist nach Thm. 1.7  $i^{-1}(B) = \{x \in A \mid i(x) \in B\} = A \pitchfork B$  eine Untermannigfaltigkeit von  $A$ . Ihre Dimension ergibt sich aus

$$\begin{aligned} a - \dim A \pitchfork B &= \text{Kodim}_{\text{in } A} A \pitchfork B \\ &= \text{Kodim}_{\text{in } A} i^{-1}(B) \\ &= \text{Kodim}_{\text{in } N} B \quad , \quad \text{Thm. 1.7} \\ &= n - b \end{aligned}$$

zu

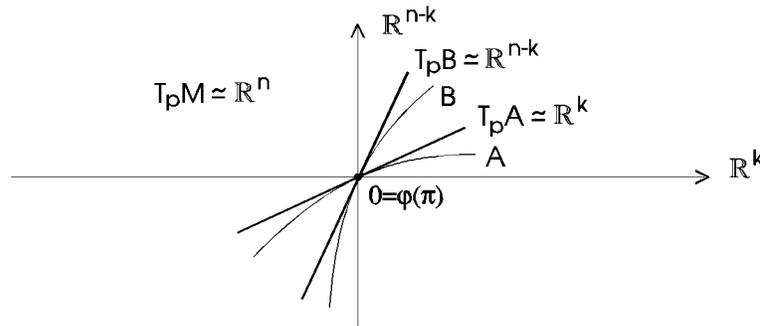
$$\dim A \pitchfork B = a + b - n \quad .$$

Aus der Symmetrie der Definition des transversalen Schnittes in  $A$  und  $B$  erhalten wir, daß  $A \pitchfork B$  ebenfalls eine Untermannigfaltigkeit von  $B$  ist. Da nun  $A \pitchfork B$  eine Untermannigfaltigkeit von  $A$ , und  $A$

eine Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist, ist  $A \pitchfork B$  auch eine Untermannigfaltigkeit von  $N$ . □

Nun wollen wir den transversalen Schnitt zweier zusammenhängender Untermannigfaltigkeiten komplementärer Dimensionen etwas genauer untersuchen: Seien  $A$  und  $B$  zusammenhängende  $C^r$ -Untermannigfaltigkeiten der  $C^r$ -Mannigfaltigkeit  $N$ ,  $r \geq 1$ , die sich transversal schneiden. Es sei  $k := \dim A$  und  $n := \dim N$ , dann ist also  $\dim B = n - k$ . Nach Korollar 1.8 ist  $A \pitchfork B$  eine  $C^r$ -Untermannigfaltigkeit von  $N$  und  $\dim A \pitchfork B = k + (n - k) - n = 0$ ; d.h.  $A \pitchfork B$  besteht aus isolierten Punkten, deren Anzahl für kompaktes  $N$  endlich ist.

Sei  $p \in A \pitchfork B$ , dann spannen  $T_p A$  und  $T_p B$  aufgrund der Transversalität des Schnittes den gesamten Tangentialraum  $T_p N \simeq \mathbb{R}^n$  auf. Lokal ergibt sich in einer Karte  $(\varphi, U)$  von  $N$  qualitativ ein Bild wie in Figur 1.4 (wir nehmen etwa eine durch  $\exp_p^{-1}: M \supset U(p) \rightarrow T_p M$  gegebene Karte).



Figur 1.4

**Korollar 1.9** Durch Nachschalten eines (z.B. linearen) Diffeomorphismus des  $\mathbb{R}^n$ , der  $T_p A$  in  $\mathbb{R}^k$  und  $T_p B$  in  $\mathbb{R}^{n-k}$  überführt, können wir oBdA annehmen, daß die direkte Summe in

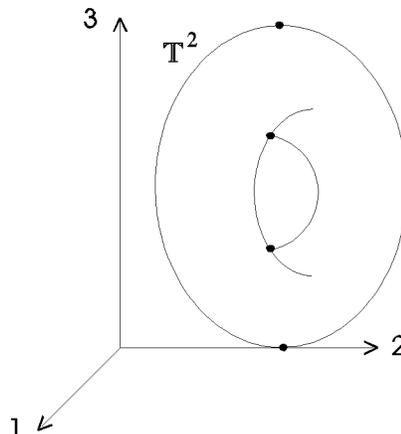
$$(1.6) \quad T_p N = T_p A \oplus T_p B$$

eine orthogonale Summe ist.

### DIE MORSE-SMALE BEDINGUNG

Wie zuvor ausgeführt, können wir oBdA davon ausgehen, daß  $f$  eine glatte Morse-Funktion auf  $M$  ist.  $g$  sei eine glatte Metrik auf  $M$  (deren Existenz ist zu Anfang von Abschnitt 1.2 gezeigt worden). Wir betrachten nun wieder die Zeit- $t$ -Abbildung  $\phi_t \in \text{Diff}^\infty(M)$ , die vom negativen Gradientenvektorfeld  $-\nabla f \in \mathfrak{X}^\infty(M)$  erzeugt wird. Für beliebiges  $f$  und  $g$  schneiden sich nun  $W^u(x)$  und  $W^s(y)$  im Allgemeinen nicht transversal ( $x, y \in \text{Crit } f$ ), d.h. die Morse-Smale Bedingung ist im Allgemeinen nicht erfüllt.

**Beispiel 1.2** Betrachte wieder den (senkrecht stehend) in den  $\mathbb{R}^3$  eingebetteten 2-Torus (Figur 1.5).

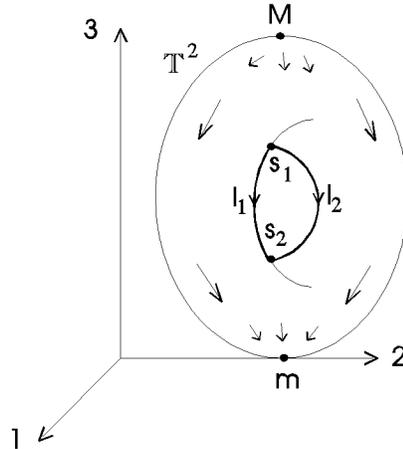


Figur 1.5

Als Morse-Funktion auf  $M$  nehmen wir die Höhenfunktion in der 3-Richtung

$$(1.7) \quad f_3(x, y, z) := z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

$g$  sei die vom  $\mathbb{R}^3$  auf  $\mathbb{T}^2$  induzierte Metrik,  $-\nabla f_3$  ist dann das Vektorfeld auf  $\mathbb{T}^2$ , welches an jedem Punkt von  $M$  in Richtung des stärksten Abfalls zeigt.  $-\nabla f_3$  besitzt vier Singularitäten  $M, s_1, s_2$  und  $m$  auf  $\mathbb{T}^2$  (Figur 1.6).



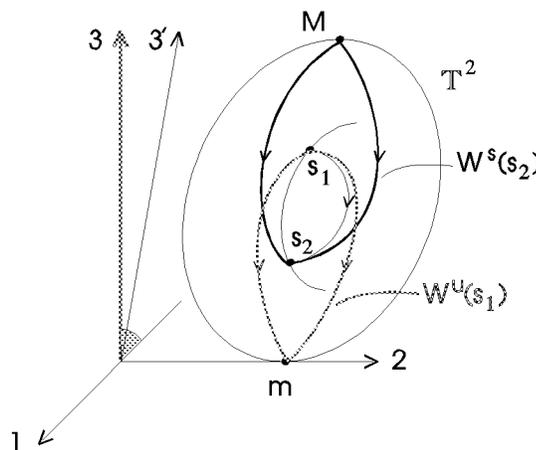
Figur 1.6

Es ist nun

$$(1.8) \quad W^u(s_1) \cap W^s(s_2) = l_1 \cup l_2,$$

wobei  $l_1$  und  $l_2$  1-dimensional sind; d.h. dieser Schnitt kann nicht transversal sein.

Wenn wir jedoch die Morse-Funktion ein klein wenig verändern (die induzierte Metrik  $g$  ändert sich hierbei auch), so erhalten wir Transversalität. Sei  $3'$  eine Richtung in der 1-3-Ebene nahe zur Richtung der 3-Achse; wenn wir nun  $f_{3'}$  statt  $f_3$  als Morse-Funktion betrachten, so entspricht dies einem Kippen von  $\mathbb{T}^2$  (Figur 1.7).



Figur 1.7

$W^u(s_1)$  und  $W^s(s_2)$  schneiden sich nun nicht mehr; ein leerer Schnitt ist aber per definitionem transversal.

Smale hat 1960 in [Sm] festgestellt, daß diejenigen Vektorfelder, die der (natürlich später) sogenannten Morse-Smale Bedingung genügen,  $C^1$ -dicht in  $Grad^\infty(M)$  liegen ( $Grad^\infty(M)$  bezeichnet die glatten Gradientenvektorfelder auf  $M$ ). Dies ist die Aussage seiner beiden folgenden Theoreme (uns reicht der Fall  $\partial M = \emptyset$ ):

**Theorem 1.10** [Sm, Thm. A] Sei  $f$  eine glatte Funktion auf einer geschlossenen glatten Mannigfaltigkeit  $M^n$  mit nichtdegenerierten kritischen Punkten;  $g$  sei eine glatte Riemannsche Metrik auf  $M$ . Dann kann  $\nabla_g f$   $C^1$ -approximiert werden durch ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$  für das gilt:

- (1) Zu jeder Singularität  $\beta$  von  $X$  existiert eine Umgebung  $N$ , sowie eine glatte Funktion  $f_\beta$  und eine glatte Riemannsche Metrik  $g_\beta$  auf  $N$ , so daß (auf  $N$ ) gilt:  $\nabla_{g_\beta} f_\beta = X$ . Außerdem ist  $\beta$  ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $f_\beta$ .  $\beta_1, \dots, \beta_m$  bezeichne die Singularitäten von  $X$ .
- (2) Für  $x \in M$  gilt:  $\alpha(x) \cup \omega(x) \subset \bigcup_{i=1}^m U_{\beta_i}$  ( $\alpha$  und  $\omega$  bzgl. der Zeit- $t$ -Abbildung von  $X$ ).
- (3)  $W^u(\beta_i) \cap W^s(\beta_j) = \emptyset$  für  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ .

**Theorem 1.11** [Sm, Thm. B] Seien  $X$  und  $M$  wie in Thm. 1.10, insbesondere seien (1),(2) und (3) erfüllt. Dann existiert eine glatte Funktion  $\tilde{f}$  auf  $M$  mit folgenden Eigenschaften:

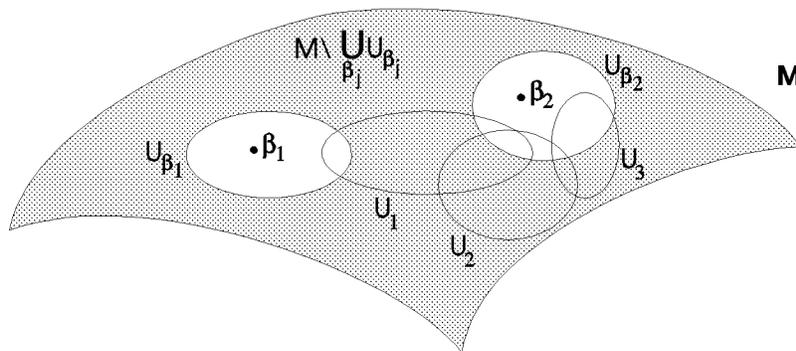
- (a) Die kritischen Punkte von  $\tilde{f}$  stimmen mit den Singularitäten von  $X$  überein. Um jeden kritischen Punkt  $\beta$  von  $\tilde{f}$  existiert eine Umgebung  $U_\beta$ , so daß  $\tilde{f}|_{U_\beta}$  mit der Funktion  $f_\beta|_{U_\beta}$  aus (1) plus einer Konstanten übereinstimmt, d.h. daß gilt  $\tilde{f}|_{U_\beta} = f_\beta|_{U_\beta} + c_\beta$ ,  $c_\beta \in \mathbb{R}$  geeignet.
- (b) Falls  $X(p) \neq 0$  ist, dann ist  $X$  am Punkt  $p \in M$  transversal zur Niveaufäche  $f^{-1}(f(p))$ .
- (c) Sei  $\beta \in M$  ein kritischer Punkt von  $\tilde{f}$ , dann gilt  $\tilde{f}(\beta) = \text{Ind}_{\tilde{f}}(\beta)$ .

**Proposition 1.12** Voraussetzungen wie in Thm. 1.11 und 1.12, dann gilt: Auf  $M$  existiert eine glatte Riemannsche Metrik  $\tilde{g}$ , so daß  $\nabla_{\tilde{g}} \tilde{f} = X$ .

BEWEIS Seien  $U_{\beta_j}$  die Umgebungen der (nichtdegenerierten) kritischen Punkte  $\beta_j$  von  $\tilde{f}$ , dann gilt nach Thm. 1.11 (a) und Thm. 1.10 (1) für  $q \in U_{\beta_j}$ : Es existiert eine glatte Riemannsche Metrik  $g_{\beta_j}$  auf  $U_{\beta_j}$ , so daß

$$(1.9) \quad (\nabla_{g_{\beta_j}} \tilde{f})(q) = (\nabla_{g_{\beta_j}} f_{\beta_j})(q) = X(q) \quad .$$

Sei nun  $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$  eine Überdeckung von  $M \setminus \bigcup_{\beta_j} U_{\beta_j}$ , welche die Singularitäten  $\beta_j$  nicht enthält (Figur 1.8).



Figur 1.8

Indem wir die  $U_i$  gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen die  $U_i$  seien Kartengebiete von Karten  $(\varphi_i, U_i)$  von  $M$ . Die Kompaktheit von  $M$  rechtfertigt die Annahme  $|\Lambda| < \infty$ . Nehmen wir weiter an, wir hätten für alle  $i \in \Lambda$  bereits Riemannsche Metriken  $g_i$  auf  $U_i$  gefunden, welche

$$(1.10) \quad (\nabla_{g_i} \tilde{f})(q) = X(q) \quad , \quad q \in U_i \quad ,$$

erfüllen, so könnten wir uns, mittels einer Zerlegung der Eins (siehe (A.27))  $\{\lambda_i\}_{i \in \Lambda \cup \{\beta_1, \dots, \beta_m\}}$  der endlichen Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in \Lambda} \cup \{U_{\beta_1}, \dots, U_{\beta_m}\}$  von  $M$ , folgende Metrik konstruieren:

$$(1.11) \quad \tilde{g}(q)(\xi, \zeta) := \sum_{i \in \Lambda \cup \{\beta_1, \dots, \beta_m\}} \lambda_i(q) g_i(q)(\xi, \zeta) \quad , \quad q \in M \quad , \quad \xi, \zeta \in T_q M \quad .$$

Symmetrie, positive Definitheit, sowie Nichtdegeneriertheit folgen sofort und offensichtlich aus eben

diesen Eigenschaften der einzelnen Summanden  $g_i(q)(\cdot, \cdot)$ . Es handelt sich also um eine Riemannsche Metrik.

Sei nun  $q \in M$  nahe bei  $\beta_j$ , dann ist  $\tilde{g}(q)(\cdot, \cdot) = g_{\beta_j}(q)(\cdot, \cdot)$  und es gilt

$$(1.12) \quad (\nabla_{\tilde{g}} \tilde{f})(q) = (\nabla_{g_{\beta_j}} \tilde{f})(q) = X(q) \quad ,$$

wie vorher.

Für  $q \in M$ ,  $\xi \in T_q M$  beliebig, gilt

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \tilde{g}(q)(X, \xi) &= \sum \lambda_i(q) g_i(q)(X(q), \xi) \\ &= \sum \lambda_i(q) g_i(q)((\nabla_{g_i} \tilde{f})(q), \xi) \\ &= \sum \lambda_i(q) d\tilde{f}(q)(\xi) \\ &= d\tilde{f}(q)(\xi) \sum \lambda_i(q) \\ &= d\tilde{f}(q)(\xi) \quad . \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$(1.14) \quad X = \nabla_{\tilde{g}} \tilde{f} \quad .$$

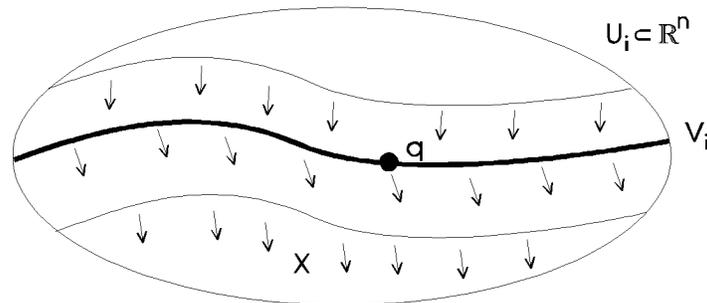
Es bleibt also die Konstruktion der Riemannschen Metriken  $g_i$  auf den offenen Mengen  $U_i$ ,  $i \in \Lambda$ , von denen wir oBdA annehmen, sie seien Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Wir wissen nun, daß  $\tilde{f}$  bzw.  $X$  in  $U_i$  keine kritischen Punkte bzw. Singularitäten besitzen; außerdem ist  $X$  transversal zu Niveaulächen von  $\tilde{f}$ . Letzteres ist nach Prop. 1.3.6 ja auch eine notwendige Bedingung für ein Gradientenvektorfeld.

Sei  $q \in U_i$ , dann besitzt die Niveauläche  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(q))$  in einer kleinen Umgebung von  $q$  ein Frame.  $U_i$  sei geeignet gewählt (insbesondere hinreichend klein), so daß  $V_i := \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(q)) \cap U_i$  ein Frame besitzt. Ein **Frame auf  $V_i$**  ist eine Basis  $\{\tilde{E}_1(p), \dots, \tilde{E}_{n-1}(p)\}$  von  $T_p V \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ , welche glatt von  $p$  abhängt. Da  $X$  nach Voraussetzung transversal zu Niveaulächen von  $\tilde{f}$  ist, stellt  $\{\tilde{E}_1(p), \dots, \tilde{E}_{n-1}(p), X(p)\}$  für  $p \in V_i$  eine Basis von  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$  dar. Sei  $\phi_t$  die durch  $X$  erzeugte Zeit- $t$ -Abbildung, dann ist mit  $p \in V_i$

$$(1.15) \quad \{D\phi_t(p)(\tilde{E}_1(p)), \dots, D\phi_t(p)(\tilde{E}_{n-1}(p)), D\phi_t(p)(X(p))\}$$

für  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, eine Basis von  $T_{\phi_t(p)} M \simeq \mathbb{R}^n$ . Dies folgt aus der Stetigkeit von  $D\phi_t(p)$  in  $t$ . Es ist siehe (2.3.3)

$$(1.16) \quad D\phi_t(p)(X(p)) = X(\phi_t(p)) \quad .$$



Figur 1.9

Für  $U_i$  hinreichend klein, haben wir also ein Frame

$$(1.17) \quad \{E_1(p), \dots, E_{n-1}(p), X(p)\} \quad , \quad p \in U_i \quad , \quad E_k(p) := D\phi_t(p)(\tilde{E}_k(p)) \quad , \quad k \in \{1, \dots, n-1\} \quad .$$

Wir definieren nun

$$(1.18) \quad g_i(E_j(p), E_k(p)) := \delta_{jk}$$

$$(1.19) \quad g_i(X(p), E_j(p)) := d\tilde{f}(E_j(p)) \quad \quad j, k \in \{1, \dots, n-1\} \quad , \quad p \in U_i \quad .$$

$$(1.20) \quad g_i(X(p), X(p)) := d\tilde{f}(X(p))$$

Sei nun  $\xi \in T_p M$ ,  $p \in U_i$ , dann ist (das Argument  $p$  wird der Einfachheit halber weggelassen)

$$\begin{aligned}
 (1.21) \quad g_i(X, \xi) &= g_i(X, \xi_1 E_1 + \dots + \xi_{n-1} E_{n-1} + \xi_n X) \\
 &= \xi_1 g_i(X, E_1) + \dots + \xi_{n-1} g_i(X, E_{n-1}) + \xi_n g_i(X, X) \\
 &= \xi_1 d\tilde{f}(E_1) + \dots + \xi_{n-1} d\tilde{f}(E_{n-1}) + \xi_n d\tilde{f}(X) \\
 &= d\tilde{f}(\xi_1 E_1 + \dots + \xi_{n-1} E_{n-1} + \xi_n X) \\
 &= d\tilde{f}(\xi) \quad .
 \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$(1.22) \quad X(p) = (\nabla_{g_i} \tilde{f})(p) \quad , \quad p \in U_i \quad ,$$

was zu zeigen war.  $\square$

**Bemerkung 1.3** Die Funktion  $\tilde{f}$ , welche uns Thm. 1.11 liefert, ist eine Morse-Funktion **vom selben Typ** wie die ursprüngliche Morse-Funktion  $f$ . Daß die kritischen Punkte von  $\tilde{f}$  nichtdegeneriert sind, folgt aus Thm. 1.11 (a) und Thm. 1.10 (1). Nach Lemma 1.4 haben die hyperbolischen Vektorfelder  $\nabla_g f$  und  $\nabla_{\tilde{g}} \tilde{f}$  denselben Typ, falls sie hinreichend  $C^1$ -nahe sind. Es hat nun  $f$  denselben Typ wie  $\nabla_g f$  und  $\tilde{f}$  wie  $\nabla_{\tilde{g}} \tilde{f}$  (siehe Beweis von Prop. 1.3), womit die Aussage bewiesen ist.

Wir können dies auch folgendermaßen einsehen:  $f$  hat denselben Typ (als Morse-Funktion) wie  $\nabla_g f$  (als hyperbolisches Vektorfeld). Nun sei  $X$  hinreichend nahe bei  $\nabla_g f$  in  $\mathfrak{X}_W^1(M)$ , also sind nach Lemma 1.4  $X$  und  $\nabla_g f$  vom selben Typ.  $X = \nabla_{\tilde{g}} \tilde{f}$  hat (als hyp. VF) aber denselben Typ wie  $\tilde{f}$  (als Morse-Funktion), dies folgt aus Thm. 1.10 (1) und Thm. 1.11 (a). Damit ist gezeigt:  $f$  und  $\tilde{f}$  sind vom selben Typ.

Indem wir unsere glatte Morse-Funktion  $f$  und die glatte Riemannsche Metrik  $g$  gegebenenfalls durch ein  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  wie oben ersetzen, können wir oBdA von folgendem ausgehen:

**Bemerkung 1.4**  $f$  ist eine glatte Morse-Funktion auf der geschlossenen glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M^n$  und der durch  $-\nabla f$  erzeugte Fluß  $\phi_t$  genügt der **Morse-Smale Bedingung**: Für beliebige Singularitäten  $x, y$  von  $-\nabla f$  schneiden sich  $W^u(x)$  und  $W^s(y)$  transversal.

In den funktionalanalytischen Zugängen zum Morse-Witten Komplex [Po] und [Sch] wird gezeigt, daß es de facto reicht nur die Metrik  $g$  leicht zu stören ohne jedoch  $f$  zu verändern. Unser Resultat besagt, daß wir im Allgemeinen von  $(f, g)$  zu  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  übergehen müssen, damit die Morse-Smale Bedingung erfüllt ist. Im Hinblick auf unser Ziel den Morse-Witten Komplex, welcher aus den kritischen Punkten einer Morse-Funktion, graduiert durch ihre Morse-Indizes, aufgebaut wird, sind beide Resultate jedoch gleichwertig. Da in unserem Resultat  $f$  und  $\tilde{f}$  denselben Typ haben, und die Kettengruppen  $C_*(f)$  des Morse-Witten Komplexes von den kritischen Punkten frei abelsch erzeugt werden, gilt  $C_*(f) \simeq C_*(\tilde{f})$ . Der zweite Baustein bei der Konstruktion des Morse-Witten Komplexes, nämlich die Menge der isolierten Orbits, wird in beiden Ansätzen (beim Übergang von  $g$  zu  $\tilde{g}$  in [Po] und [Sch] und von  $(f, g)$  zu  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  bei uns) verändert.

## VERBINDENDE MANNIGFALTIGKEITEN UND ORBITRÄUME

Wir definieren jetzt die  **$x$  mit  $y$  verbindende Mannigfaltigkeit**

$$(1.23) \quad M_{x,y} := W^u(x) \pitchfork W^s(y) \quad .$$

Dieser Schnitt kann auch leer sein; außerdem ist er, da  $W^u(x)$  und  $W^s(y)$  unberandet sind, unberandet.

**Theorem 1.13** *Voraussetzungen wie in Bemerkung 1.5, dann gilt: Im Fall  $W^u(x) \pitchfork W^s(y) \neq \emptyset$  ist  $M_{x,y}$  eine glatte Untermannigfaltigkeit von  $M$  mit  $\dim M_{x,y} = \text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y)$ .*

BEWEIS Dies ist die Aussage von Korollar 1.8; weiter gilt

$$\dim M_{x,y} = \dim W^u(x) + \dim W^s(y) - n = \text{Ind}_f(x) + (n - \text{Ind}_f(y)) - n = \text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) \quad ,$$

wobei die zweite Gleichheit aus Prop. 1.3.11 folgt.  $\square$

- Korollar 1.14** (i)  $Ind_f(x) < Ind_f(y) \Rightarrow M_{x,y} = \emptyset$   
 (ii)  $Ind_f(x) = Ind_f(y), x \neq y \Rightarrow M_{x,y} = \emptyset$   
 (iii)  $Ind_f(x) = Ind_f(y), x = y \Rightarrow M_{x,y} = x = y$

BEWEIS (i) Es ist  $dim W^u(x) < dim W^u(y) = n - dim W^s(x)$ , also  $dim W^u(x) + dim W^s(y) < n = dim M$ . Wenn sich nun  $W^u(x)$  und  $W^s(y)$  schneiden würden, dann wäre an so einem Schnittpunkt  $p$  die Transversalität verletzt, da  $T_p W^u(x)$  und  $T_p W^s(y)$  aus Dimensionsgründen nicht den ganzen  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$  aufspannen können. Also gilt  $M_{x,y} := W^u(x) \cap W^s(y) = \emptyset$ .

(ii) Wir nehmen an  $M_{x,y} \neq \emptyset$ . Sei  $p \in M_{x,y}$ , dann ist  $\mathcal{O}(p) := \phi^{-1}(p) \subset M_{x,y}$  ( $\phi$  neg. Gradientenfluß). Nach Thm. 1.13 ist  $dim M_{x,y} = 0$ , besteht also aus diskreten Punkten. Das ist ein Widerspruch.

(iii)  $W^u(x)$  und  $W^s(y = x)$  schneiden sich nur im Punkt  $x$ , denn sonst hätten wir einen geschlossenen Orbit, was nach Prop. 1.3.4 für einen Gradientenfluß nicht möglich ist.  $\square$

Hieraus folgt sofort das

- Korollar 1.15**  $M_{x,y} \neq \emptyset$  und  $x \neq y \Rightarrow Ind_f(x) > Ind_f(y)$

Sei zunächst  $Ind_f(x) \geq Ind_f(y) + 1$ , sei weiter  $a \in (f(y), f(x))$  ein regulärer Wert von  $f$ , dann ist  $f^{-1}(a)$  eine geschlossene glatte  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ . Sei  $p \in M \cap f^{-1}(a)$  und  $\phi(\cdot, \cdot): \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  der durch  $-\nabla f$  erzeugte Fluß; er erfüllt  $\frac{d}{dt}\phi(t, p) = -\nabla f \circ \phi(t, p)$ . Aus  $\phi(\cdot, p): \mathbb{R} \rightarrow M_{x,y}$  folgt  $\frac{d}{dt}\phi(t, p) \in T_{\phi(t,p)} M_{x,y}$ , also gilt insbesondere

$$(1.24) \quad \frac{d}{dt}\phi(t, p) \Big|_{t=0} = -\nabla f \circ \phi(0, p) = -\nabla f(p) \in T_p M_{x,y} \quad .$$

Nach Prop. 1.3.6 ist nun  $-\nabla f \perp \xi, \forall \xi \in T_p f^{-1}(a) \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ , also ist

$$(1.25) \quad \mathbb{R} \cdot (-\nabla f(p)) + T_p f^{-1}(a) \simeq \mathbb{R}^n \simeq T_p M$$

und somit

$$(1.26) \quad T_p M_{x,y} + T_p f^{-1}(a) = T_p M \quad .$$

Der Schnitt

$$(1.27) \quad M_{x,y} \cap f^{-1}(a) =: \hat{M}_{x,y}$$

ist also transversal und somit nach Kor. 1.8 eine glatte Untermannigfaltigkeit von  $M$  mit

$$(1.28) \quad \begin{aligned} dim \hat{M}_{x,y} &= (Ind_f(x) - Ind_f(y)) + (n-1) - n \\ &= Ind_f(x) - Ind_f(y) - 1 \\ &= dim M_{x,y} - 1 \quad . \end{aligned}$$

Im Fall  $Ind_f(x) \leq Ind_f(y)$  definieren wir  $\hat{M}_{x,y} := M_{x,y}$ . Nach Korollar 1.14 ist dann  $\hat{M}_{x,y} = \emptyset$ , außer für  $Ind_f(x) = Ind_f(y)$  mit  $x = y$ , denn dann haben wir nämlich  $\hat{M}_{x,y} := M_{x,y} = x = y$ .

$\hat{M}_{x,y}$  heißt **Orbitraum von  $x$  und  $y$** , er ist als Schnitt der unberandeten Mannigfaltigkeiten  $M_{x,y}$  und  $f^{-1}(a)$  ebenfalls unberandet. Jedes  $p \in \hat{M}_{x,y}$  repräsentiert eineindeutig einen Orbit  $\mathcal{O}(p) \subset M_{x,y}$ ; d.h. wir haben einen Isomorphismus

$$(1.29) \quad \begin{aligned} \kappa: \hat{M}_{x,y} &\xrightarrow{\cong} M_{x,y} / \sim \\ p &\mapsto [p] \quad , \end{aligned}$$

wobei für  $r, s \in M_{x,y}$  gelte:

$$r \sim s \quad :\Leftrightarrow \quad r \in \mathcal{O}(s) \quad ; \text{ d.h. } r = \phi_t s \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \quad .$$

Injektivität: Sei  $[p] = [q]$ , d.h.  $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(q)$ . Nach Kor. 1.3.5 schneidet  $\mathcal{O}(p)$   $f^{-1}(a)$  höchstens einmal, wegen der Stetigkeit von  $f$  auf  $\mathcal{O}(p)$  genau einmal, nämlich in  $p$ . Also schneidet  $\mathcal{O}(q)$   $f^{-1}(a)$  ebenfalls genau einmal in  $p$ , also  $p = q$ .

Surjektivität: Sei  $[p] \in M_{x,y} / \sim$  und  $r \in M_{x,y}$  ein Repräsentant von  $[p]$ . Nun ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t r = y$  und  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t r = x$  (da  $r \in M_{x,y}$ ), also schneidet  $\mathcal{O}(r)$   $f^{-1}(a)$  wegen der Stetigkeit von  $f$  auf  $\mathcal{O}(r)$ .

Sei  $p$  so ein Schnittpunkt, dann ist  $\kappa(p) = [r] = [p]$ .

Damit gilt

$$(1.30) \quad M_{x,y} = \dot{\bigcup}_{p \in M_{x,y}} \mathcal{O}(p) \quad .$$

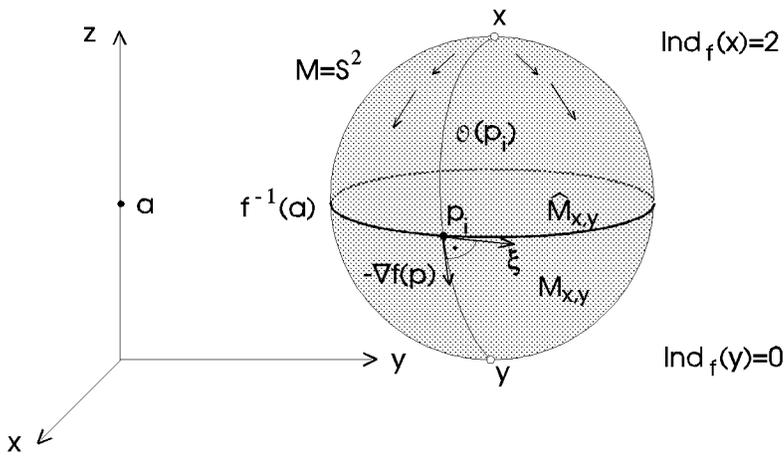
$\dot{\bigcup}$  steht für die disjunkte Vereinigung von Mengen.

Die Abbildung  $\mathcal{O}(\cdot)$  ordnet einem  $p \in M_{x,y}$  seinen Orbit bzgl. der Zeit- $t$ -Abbildung  $\phi_t$  zu:

$$(1.31) \quad \mathcal{O}(p) := \phi_t p := \{ \phi_t p \mid t \in \mathbb{R} \} \quad ,$$

also ist  $\mathcal{O}(p) \subset M_{x,y}$ . Aufgrund von (1.30) entspricht  $\mathcal{O}(p)$  eindeutig einem Element  $\hat{p} \in \hat{M}_{x,y}$ . Wegen  $\hat{M}_{x,y} \subset M_{x,y}$ , macht es auch Sinn  $\mathcal{O}(\cdot)$  auf Elemente von  $\hat{M}_{x,y}$  anzuwenden.

**Beispiel 1.3**  $M = S^2$ ,  $g$  sei die vom  $\mathbb{R}^3$  auf  $S^2$  induzierte Metrik,  $f_3(x,y,z) := z$ ,  $\forall (x,y,z) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ,  $M_{x,y} = M \setminus \{x,y\}$ .



Figur 1.12

## 2.2 Kompaktheit

In diesem Abschnitt sollen die Orbiträume  $\hat{M}_{x,y}$  auf Kompaktheit untersucht werden. Zur Erinnerung: Die in Abschnitt 2.1 definierten Orbiträume  $\hat{M}_{x,y}$  sind glatte Untermannigfaltigkeiten von  $M$  der Dimension  $Ind_f(x) - Ind_f(y) - 1$ . Außerdem sind sie (als Mannigfaltigkeiten) unberandet.  $\partial$  bezeichne den topologischen Rand, d.h. Abschluß minus Inneres der Menge, dann gilt: Entweder ist  $\partial\hat{M}_{x,y} = \emptyset$  oder  $(\partial\hat{M}_{x,y} \neq \emptyset$  aber  $\partial\hat{M}_{x,y} \cap \hat{M}_{x,y} = \emptyset)$ . Im **ersten Fall** ist  $\hat{M}_{x,y}$  zunächst abgeschlossen, da jeder HP (Häufungspunkt) von  $\hat{M}_{x,y}$  im Innern von  $\hat{M}_{x,y}$  liegt, also zu  $\hat{M}_{x,y}$  gehört. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $M$ , ist  $\hat{M}_{x,y}$  ebenfalls kompakt; jede Folge in  $\hat{M}_{x,y}$  besitzt also eine (in  $\hat{M}_{x,y}$ ) konvergente Teilfolge. Im **zweiten Fall** wird sich herausstellen, daß  $\hat{M}_{x,y}$  kompakt ist "bis auf gebrochene Orbits der Ordnung  $l$ ",  $l \in \{1, \dots, Ind_f(x) - Ind_f(y)\}$  geeignet.

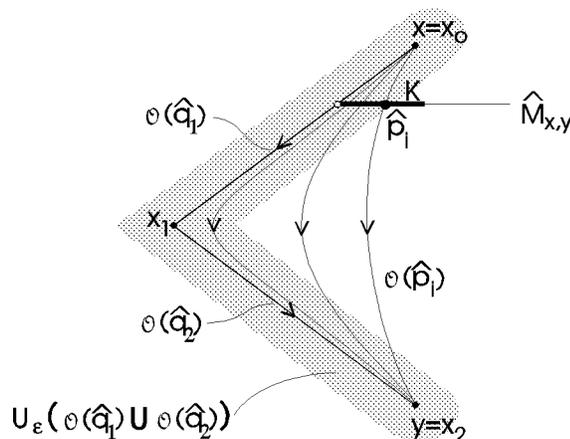
Dies ist die Aussage von Thm. 2.1. Dieses wird später in Abschnitt 3.2 beim Beweis des zentralen Theorems dieser Arbeit, nämlich von  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ , eine wichtige Rolle spielen. Außerdem liefert es das Resultat, daß im Fall  $Ind_f(x) - Ind_f(y) = 1$  der Orbitraum  $\hat{M}_{x,y}$  aus endlich vielen (und damit isolierten) Punkten besteht (Kor. 2.2, Beweisversion 1). Diese werden isolierte Orbits genannt und sind der wesentliche Baustein in der Konstruktion des Morse-Witten Komplex.

Ein wichtiges Hilfsmittel im Beweis des Kompaktheitsresultats Thm. 2.1 ist das Grobman-Hartman Thm. 2.4. Der Beweis selbst beruht auf einer Idee von A. Floer [F1] zum Beweis von Kor. 2.2.

Zum Schluß dieses Abschnitts geben wir noch zwei weitere Versionen des Beweises von Kor. 2.2 an. Version 2 entstammt der oben angesprochenen Idee von A. Floer, während Version 3 eine, uns von S.P. Novikov vorgeschlagene, Idee benützt. Hierbei ist allerdings vorauszusetzen, daß  $x$  und  $y$  die einzigen kritischen Punkte in  $f^{-1}([f(y), f(x)])$  sind. In Appendix A zeigen wir, wie die ursprüngliche Morse-Funktion außerhalb einer isolierenden Umgebung von  $M_{x,y}$  modifiziert werden kann, so daß diese Voraussetzung erfüllt ist. In Appendix B beweisen wir ein (zu Thm. 2.1 analoges) Kompaktheitsresultat für Trajektorienräume  $\mathcal{M}_{x,y} \subset C^r(\mathbb{R}, M)$ ,  $r \geq 2$ , statt für die Orbiträume  $\hat{M}_{x,y}$ . Hieraus folgt eine vierte Beweisversion für Kor. 2.2.

Eine Teilmenge  $K \subset \hat{M}_{x,y}$  heißt **kompakt bis auf gebrochene Orbits der Ordnung  $l$**  oder auch **kompakt bis auf  $(l-1)$ -fach gebrochene Orbits**, falls für jede Folge  $\{\hat{p}_i\}_i \subset K$  gilt: **Entweder** besitzt  $\{\hat{p}_i\}_i \subset K$  eine (in  $K$ ) konvergente Teilfolge **oder** es existieren kritische Punkte  $x = x_0, \dots, x_l = y$ ,  $2 \leq l \leq Ind_f(x) - Ind_f(y)$ , und  $(x_{j-1}$  mit  $x_j$  verbindende) Orbits  $\hat{q}_j \in \hat{M}_{x_{j-1}, x_j}$ ,  $j = 1, \dots, l$ , so daß  $\hat{p}_i \rightarrow (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l)$  für  $i \rightarrow \infty$ . Die Morse-Smale Bedingung liefert:  $l \leq Ind_f(x) - Ind_f(y)$ .

Wir können uns diesen Begriff im Fall  $Ind_f(x) - Ind_f(y) = 2$  durch Figur 2.1 veranschaulichen:  $K \subset \hat{M}_{x,y}$  ist kompakt bis auf 1-fach gebrochene Orbits. Die Folge  $\{\hat{p}_i\}_i \subset \hat{M}_{x,y}$  konvergiert hier gegen einen 1-fach gebrochenen Orbit  $(q_1, q_2) \in \hat{M}_{x,x_1} \times \hat{M}_{x_1,y}$ .



Figur 2.1

Diese Konvergenz ist folgendermaßen zu verstehen :

$$(2.1) \quad \hat{p}_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l) \\ \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists I \in \mathbb{N} \forall i > I : \mathcal{O}(\hat{p}_i) \subset U_\epsilon(\overline{\bigcup_{j=1}^l \mathcal{O}(\hat{q}_j)}) .$$

Mit  $\mathcal{O}(\hat{p}_i) := \phi \hat{p}_i$  ist der Orbit durch  $\hat{p}_i$  als Teilmenge von  $M_{x,y} \subset M$  gemeint (ein Element  $\hat{p}_i \in \hat{M}_{x,y}$  ist ja per definitionem von  $\hat{M}_{x,y}$  auch ein Element von  $M_{x,y}$ , wir können also  $\phi_t$  auf  $\hat{p}_i$  anwenden).

Die wesentliche Aussage dieses Abschnitts ist das

**Theorem 2.1**  $\hat{M}_{x,y}$  ist kompakt bis auf gebrochene Orbits der Ordnung  $l$ ,  $l \in \{1, \dots, \text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y)\}$  geeignet.

Hieraus folgern wir leicht das, zur späteren Definition des Randoperators, so wichtige,

**Korollar 2.2** Im Fall  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) = 1$  gilt:  $\#\hat{M}_{x,y} < \infty$ . D.h.  $\hat{M}_{x,y}$  besteht aus einer endlichen Anzahl diskreter Punkte.

BEWEIS (VERSION 1) Nach Thm. 2.1 ist  $\hat{M}_{x,y}$  kompakt bis auf gebrochene Orbits der Ordnung 1. In der Definition dieses Begriffs ist jetzt nur der „entweder“-Fall zutreffend; d.h. jede Folge in  $\hat{M}_{x,y}$  besitzt eine konvergente Teilfolge. Dies ist aber gerade ein Kriterium für Kompaktheit. Die Diskretheit der Elemente von  $\hat{M}_{x,y}$  folgt aus der Tatsache, daß sie 0-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von  $M$  sind. Eine Menge diskreter Punkte ist nun genau dann kompakt, wenn sie endlich ist.  $\square$

In diesem Fall besteht  $M_{x,y}$  aus einer endlichen Anzahl von  $x$  mit  $y$  verbindenden Orbits (siehe den Isomorphismus (2.1.29)). Diese haben eine herausragende Bedeutung in der Konstruktion des Morse-Witten Komplex. Wir nennen sie **isolierte Orbits**, ihre zugehörigen Trajektorien nennen wir **isolierte Trajektorien**.

Um den Beweis von Thm. 2.1 zu führen, sind noch einige Zitate von Resultaten, sowie Vorbemerkungen, nötig. Das erste Zitat ist das

**Lemma 2.3** [PdM, Kap. 2, Lemma 4.8] Sei  $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^r$ -Vektorfeld,  $r \geq 1$ , mit  $Y(0) = 0$  und  $Y$  erfülle eine Lipschitz-Bedingung mit Konstanter  $K$ . Dann ist der durch  $Y$  erzeugte Fluß auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  definiert und es gilt

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|} \|x - y\| \quad , \forall x, y \in \mathbb{R}^n .$$

( $Y_t$  bezeichnet hierbei die durch  $Y$  erzeugte Zeit- $t$ -Abbildung).

Sei nun  $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^N$  ein endlicher  $C^\infty$ -Atlas unserer insbesondere kompakten Mannigfaltigkeit  $M^n$ , dann sind  $\nabla f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , glatte Vektorfelder. Aufgrund ihrer Glattheit genügen sie lokal einer Lipschitz-Bedingung mit Konstanter  $K_i$ . Gegebenenfalls durch eine Verfeinerung der Überdeckung  $\{U_i\}_{i=1}^N$  von  $M$  (die dann auch wieder endlich gewählt werden kann) können wir oBdA davon ausgehen, daß die Vektorfelder  $\nabla f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , der Lipschitz-Bedingung mit Konstanter  $K_i$  genügen. Nun ist

$$(2.2) \quad K := \max_{i \in \{1, \dots, N\}} K_i$$

einerseits wohldefiniert und andererseits eine globale Konstante für  $M$ .

Ein anderes Resultat, das wir benötigen, ist das Grobman-Hartman-Theorem. Es besagt, daß ein Diffeomorphismus  $\vartheta$  lokal konjugiert zu seiner Linearisierung an einem hyperbolischen Fixpunkt ist.

**Grobman-Hartman-Theorem 2.4** [PdM, Kap. 2, Thm. 4.1] Sei  $\vartheta \in \text{Diff}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , und  $p \in M$  sei ein hyperbolischer Fixpunkt von  $\vartheta$ . Dann existieren Umgebungen  $V(p) \subset M$  und  $U(0) \subset T_p M$ , sowie ein Homöomorphismus  $h : U(0) \rightarrow V(p)$ , so daß gilt

$$h \circ D\vartheta(p) = \vartheta \circ h \quad .$$

Hieraus folgt

$$h \circ D\vartheta(p) \circ D\vartheta(p) = \vartheta \circ h \circ D\vartheta(p) = \vartheta \circ h \circ (h^{-1} \circ \vartheta \circ h) = \vartheta^2 \circ h \quad .$$

Durch Iteration erhalten wir  $h \circ D\vartheta(p)^n = \vartheta^n \circ h$ , woraus sich wiederum folgern läßt, daß (innerhalb  $U(0)$  bzw.  $V(p)$ )  $E^u$  und  $E^s$  durch  $h$  isomorph auf  $W^u(p)$  bzw.  $W^s(p)$  abgebildet werden. Aus  $h(0) = h \circ D\vartheta(p)^n(0) = \vartheta^n \circ h(0)$  folgern wir zunächst, daß  $h(0)$  ein Fixpunkt von  $\vartheta$  ist; also  $h(0) = p$ . Sei nun  $x_s \in E^s$  (d.h.  $D\vartheta(p)^n(x_s) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ), dann ist

$$p = h(0) = h \circ \lim_{n \rightarrow \infty} D\vartheta(p)^n(x_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} h \circ D\vartheta(p)^n(x_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta^n \circ h(x_s) \quad ,$$

also  $h(x_s) \in W^s(p)$ .

Umgekehrt sei  $q \in W^s(p)$ , dann ist

$$0 = h^{-1}(p) = h^{-1} \circ \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta^n(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^{-1} \circ \vartheta^n(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} D\vartheta(p)^n \circ h^{-1}(q) \quad ,$$

also  $h^{-1}(q) \in E^s$ .

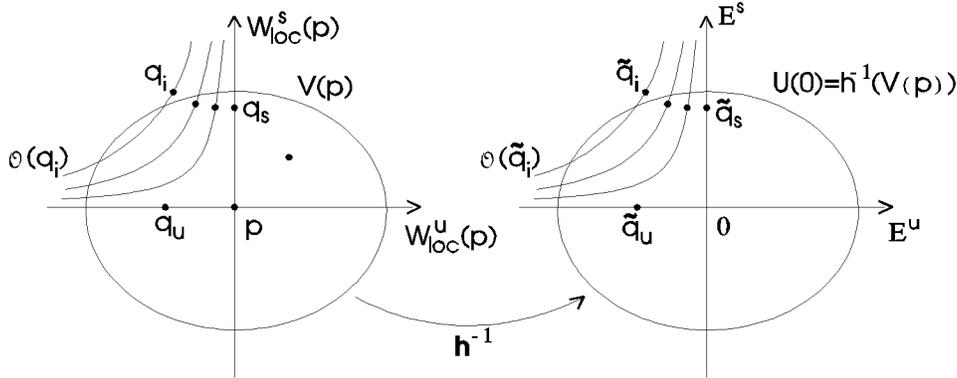
Mittels des Grobman-Hartman-Theorems können wir also (lokal um  $p$ ) die topologische Struktur der Orbits von  $\vartheta$  untersuchen, indem wir jene der Linearisierung  $D\vartheta(p)$  betrachten.

Das G-H-Thm. 2.4 ist das entscheidende Werkzeug im Beweis der nächsten Proposition. Diese hat eine zentrale Position im Beweis von Thm. 2.1.

**Proposition 2.5** Sei  $\vartheta_t \in \text{Diff}^r(M)$  die von einem Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  erzeugte Zeit- $t$ -Abbildung,  $r \geq 2$ , und  $p \in M$  sei ein hyperbolischer Fixpunkt von  $\vartheta_t$ .  $V(p) \subset M$  und  $U(0) \subset T_p M$  seien Umgebungen wie im G-H-Thm. 2.4. Sei  $q_s \in W^s(p) \cap V(p)$ ,  $q_s \neq p$ , und sei  $\{q_i\}_i \in$  eine Folge von Punkten  $q_i \notin W^s(p) \cup W^u(p)$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = q_s$ . Dann existiert ein Punkt  $q_u \in W^u(p) \cap V(p)$ ,  $q_u \neq p$ , mit

$$q_u \in \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(q_i)} \quad .$$

BEWEIS Zunächst einmal wollen wir uns die Aussage dieser Proposition mittels einer Skizze etwas veranschaulichen. In einer geeigneten Karte um  $p$  haben wir folgende Situation :



Figur 2.2

Nach dem G-H-Thm. 2.4 genügt es die Bilder unserer Objekte unter  $h^{-1}$  auf  $\mathbb{R}^n \simeq T_p M = E^s \oplus E^u$  zu studieren; hier wirkt der Diffeomorphismus  $D\vartheta_t(p)$ . Objekte aus  $E^s \oplus E^u$  sind mit einer Tilde "˜" gekennzeichnet.

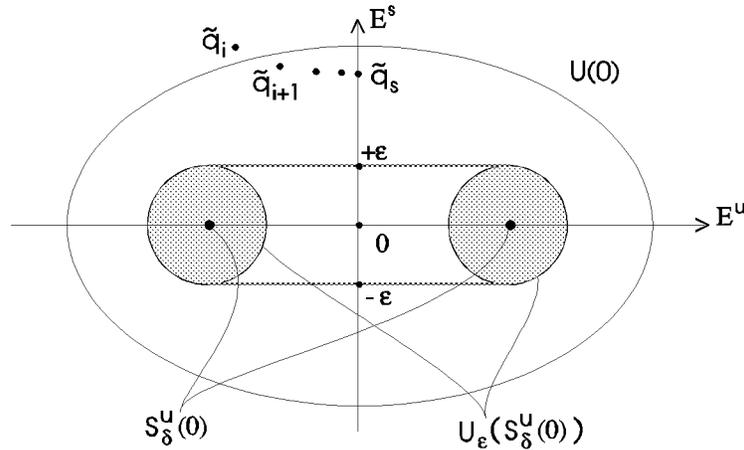
$S_\delta^u(0) \subset E^u$  bezeichne die Sphäre vom Radius  $\delta$  um 0 in  $E^u$  (in Figur 2.3 ist  $S_\delta^u(0)$  als die 0-dimensionale Sphäre  $S^0$  dargestellt, diese besteht aus zwei disjunkten Punkten). Wähle  $\delta > 0$  hinreichend klein, so daß  $S_\delta^u(0) \subset U(0)$ . Nun genügt es offenbar zu zeigen, daß ein  $\tilde{q}_u \in S_\delta^u(0)$  existiert mit

$$\tilde{q}_u \in \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(\tilde{q}_i)} \quad .$$

Wir machen die Widerspruchsannahme, daß kein solches  $\tilde{q}_u$  in  $S_\delta^u(0)$  existiert.  $S_\delta^u(0)$  und  $\overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(\tilde{q}_i)}$  sind also disjunkt, außerdem sind sie beide abgeschlossen. Deswegen existiert ein  $0 < \epsilon < \delta$ , so daß

$$U_\epsilon(S_\delta^u(0)) \cap \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma(\tilde{q}_i)} = \emptyset \quad ,$$

$U_\epsilon(S_\delta^u(0))$  bezeichnet hier die  $\epsilon$ -Umgebung von  $S_\delta^u(0)$  in  $\mathbb{R}^n$ . Dieses  $\epsilon$  sei nun zusätzlich hinreichend klein gewählt, daß gilt  $U_\epsilon(S_\delta^u(0)) \subset U(0)$  (Figur 2.3).



Figur 2.3

Auf  $T_p M \simeq E^s \oplus E^u$  haben wir das linearisierte  $C^{r-1}$ -Vektorfeld  $DX(p): T_p M \rightarrow T_p M$ . Nach Prop. 1.1.2 und Lemma 1.1.3 ist  $D\vartheta_t(p): T_p M \rightarrow T_p M$  die von diesem Vektorfeld erzeugte Zeit- $t$ -Abbildung. Da  $DX(p)$  mindestens  $C^1$  ist, erfüllt  $DX(p)$  eine lokale Lipschitz-Bedingung mit konstanter  $\tilde{K}$ . Wir nehmen oBdA an, daß  $U(0)$  innerhalb des Gültigkeitsgebietes der Lipschitz-Bedingung liege.

Nach Lemma 2.3 haben wir folgende Abschätzung

$$(2.3) \quad \|D\vartheta_t(p)(\xi) - D\vartheta_t(p)(\zeta)\| \leq e^{\tilde{K}|t|} \|\xi - \zeta\| \quad , \forall \xi, \zeta \in U(0) \quad .$$

Sei  $N \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, so daß  $(D\vartheta_t(p))^N \tilde{q}_s = (D\vartheta_{N \cdot t}(p)) \tilde{q}_s \in U_{\epsilon/2}(0)$ . Da  $D\vartheta_t(p)$  auf  $E^s$  kontrahierend ist (siehe Prop. 1.1.6), gilt

$$(D\vartheta_t(p))^n \tilde{q}_s \in U_{\epsilon/2}(0) \quad , \forall n \geq N \quad .$$

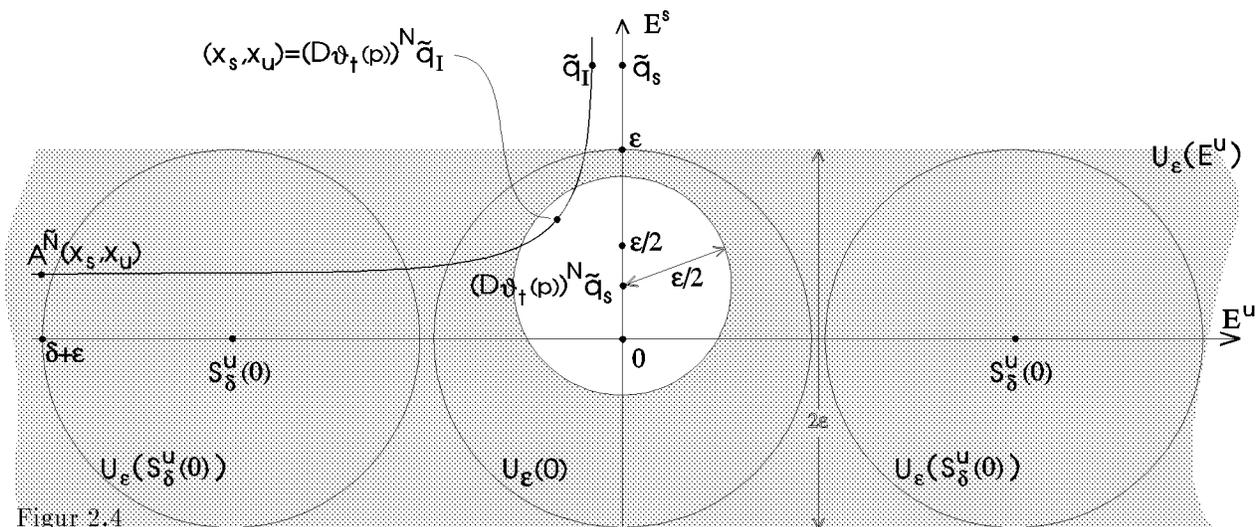
Sei weiter  $I \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, so daß

$$\|\tilde{q}_s - \tilde{q}_i\| < \frac{\epsilon}{2} e^{-\tilde{K} \cdot |Nt|} \quad , \forall i \geq I \quad .$$

Damit gilt

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \|(D\vartheta_t(p))^N \tilde{q}_s - (D\vartheta_t(p))^N \tilde{q}_i\| &= \|(D\vartheta_{Nt}(p)) \tilde{q}_s - (D\vartheta_{Nt}(p)) \tilde{q}_i\| \\ &\leq e^{\tilde{K} \cdot |Nt|} \cdot \frac{\epsilon}{2} \cdot e^{-\tilde{K} \cdot |Nt|} = \frac{\epsilon}{2} \quad , \forall i \geq I \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt  $(D\vartheta_t(p))^N \tilde{q}_i \in U_\epsilon(0)$  für alle  $i \geq I$ .



Figur 2.4

Sei  $i \geq I$ , wir schreiben  $(D\vartheta_t(p))^N \tilde{q}_I =: (x_s, x_u)$ , wobei  $x_s$  bzw.  $x_u$  gerade die  $E^s$ - bzw.  $E^u$ -Koordinaten von  $(D\vartheta_t(p))^N \tilde{q}_i$  sind. Weiter nutzen wir jetzt die Linearität von  $D\vartheta_t(p)$  aus. Seien  $A^s := D\vartheta_t(p)|_{E^s}$ ,  $A^u := D\vartheta_t(p)|_{E^u}$  und  $A := (A^s, A^u) : E^s \oplus E^u \rightarrow E^s \oplus E^u$ .

Aus  $(x_s, x_u) \in U_\epsilon(0)$  folgt insbesondere  $\|x_s\| < \epsilon$ . Da  $A^s$  kontrahierend ist, schließen wir aus  $A^n(x_s, x_u) = ((A^s)^n x_s, (A^u)^n x_u)$ , daß  $A^n(x_s, x_u)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  in einer  $\epsilon$ -Umgebung  $U_\epsilon(E^u)$  (in  $\mathbb{R}^n$ ) von  $E^u$  bleibt. Da  $A^u$  expandierend ist, existiert ein  $\tilde{N} \in \mathbb{N}$  mit

$$\|(A^u)^{\tilde{N}} x_u\|_{E^u} \geq \delta + \epsilon \quad .$$

Der Orbit  $\mathcal{O}(\tilde{q}_i) = \mathcal{O}((x_s, x_u))$  muß  $U_\epsilon(S_\delta^u(0))$  also schneiden (für alle  $i \geq I$ ). Also ist

$$U_\epsilon(S_\delta^u(0)) \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{O}(\tilde{q}_i)} \neq \emptyset \quad ,$$

das ist ein Widerspruch. □

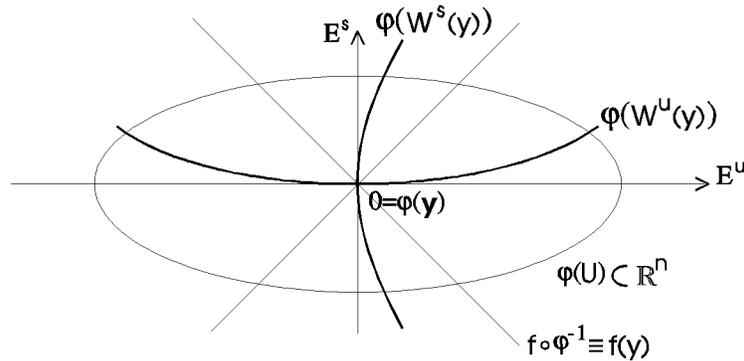
**Proposition 2.6** Sei  $q \in \overline{M_{x,y}}$ , dann gilt:  $f(q) \leq f(y) \Rightarrow q = y$  .

BEWEIS Da  $f$  längs Lösungskurven von  $-\nabla f$  streng monoton fallend ist (Prop. 1.3.4), gilt  $f(\overline{M_{x,y}}) = [f(y), f(x)]$ . Da  $f$  stetig ist, gilt

$$f^{-1}[f(y), f(x)] = \overline{f^{-1}[f(y), f(x)]} \supset \overline{M_{x,y}} \quad .$$

Also ist  $f(q) \in [f(y), f(x)]$ , d.h. der Fall  $f(q) < f(y)$  ist gar nicht möglich.

Sei also  $f(q) = f(y)$ . Wir betrachten eine Morse-Karte  $(\varphi, U)$  um  $y$  :



Figur 2.5

Außerhalb von  $U$  ist  $f|_{W^s(y) \setminus U} \geq f(y) + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  geeignet; also folgt  $q \in U$ . In der Teilraumtopologie bezüglich  $U$  ist  $W^s(y)$  abgeschlossen. Mit  $\overline{M_{x,y}} = \overline{W^u(x) \cap W^s(y)} \subset \overline{W^s(y)}$  folgern wir also: also  $q \in \overline{M_{x,y}} \Rightarrow q \in \overline{W^s(y)} \Rightarrow q \in W^s(y)$ . Der einzige Schnittpunkt von  $W^s(y)$  mit der Niveaulfläche  $f^{-1}(f(y))$  ist  $0 = \varphi(y)$  (siehe Figur 2.5), also folgt  $q = y$ . □

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endlich zum

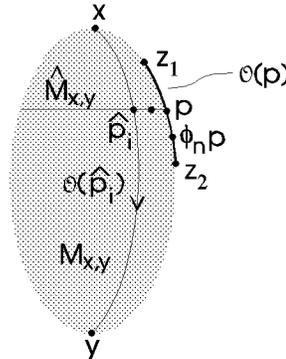
BEWEIS (von Thm. 2.1) Im Fall  $Ind_f(x) = Ind_f(y)$  gilt nach Kor. 1.14 entweder  $M_{x,y} = \emptyset$  oder  $M_{x,y} = x = y$ ; also entweder  $\hat{M}_{x,y} = \emptyset$  oder  $\hat{M}_{x,y} = x = y$ . In beiden Fällen ist  $\hat{M}_{x,y}$  offenbar kompakt.

Sei also  $Ind_f(x) > Ind_f(y)$  und  $\{\hat{p}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\hat{M}_{x,y}$ . Wenn diese eine in  $\hat{M}_{x,y}$  konvergente Teilfolge besitzt, so sind wir fertig. Wir nehmen also an, daß dies nicht der Fall ist. Aufgrund der Kompaktheit von  $M$ , finden wir eine Teilfolge (selbe Bezeichnung), die gegen ein  $p \in M$  konvergiert; es gilt

$$p \in \overline{\hat{M}_{x,y}} \subset \overline{M_{x,y}} \quad .$$

Nach Prop. 1.3.7 verbindet  $\mathcal{O}(p)$  zwei kritische Punkte  $z_1$  und  $z_2$  von  $f$ . Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist zunächst  $\phi_t p \in \overline{M_{x,y}}$ : Es gilt  $\phi_t p = \phi_t(\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{p}_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi_t \hat{p}_i$  und, da  $\phi_t \hat{p}_i \in \overline{M_{x,y}}$ , und eine

abgeschlossene Menge jeden Häufungspunkt enthält, folgt  $\phi_l p \in \overline{M_{x,y}}$ . Speziell ist die Folge  $\{\phi_n p\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{M_{x,y}}$ , wegen  $z_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n p$  gilt mit derselben Argumentation  $z_2 \in \overline{M_{x,y}}$ .



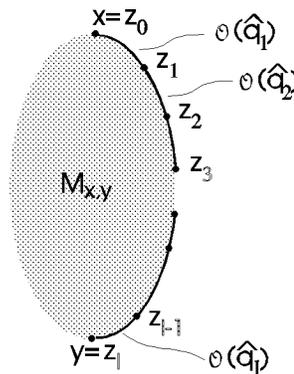
Figur 2.6

Jetzt wenden wir Prop. 2.5 an und erhalten die Existenz eines Punktes  $q_u \in W^u(z_2)$ ,  $q_u \neq z_2$ , mit  $q_u \in \overline{M_{x,y}}$ . Wir folgern, daß  $O(q_u)$   $z_2$  mit einem kritischen Punkt  $z_3$  verbindet, usw.. Diese Iteration bricht nach endlich vielen Schritten ab, da nur endlich viele kritische Punkte zur Verfügung stehen. Mit Prop. 2.6 enden wir zum Schluß bei  $y$ .

Wenn wir nun dem Fluß des Punktes  $q$  in rückwärtiger Zeitrichtung folgen, können wir analog argumentieren und enden bei  $x$ . Wir haben also endlich viele kritische Punkte  $x = z_0, z_1, \dots, z_l = y$  (nach Umbenennung) und verbindende Orbits  $\hat{q}_j \in \hat{M}_{z_{j-1}, z_j}$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Aus Kor. 1.15 folgt (aufgrund der Morse-Smale Bedingung)

$$(2.5) \quad \text{Ind}_f(x) > \text{Ind}_f(z_1) > \dots > \text{Ind}_f(z_{l-1}) > \text{Ind}_f(y) \quad ,$$

also gilt  $l \leq \text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y)$ .



Figur 2.7

Wir wissen also  $\overline{\bigcup_{j=1}^l O(\hat{q}_j)} \subset \overline{M_{x,y}}$ . Es bleibt noch die spezielle Konvergenz der Orbits  $O(\hat{p}_i)$  gegen  $(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l)$  zu untersuchen, d.h. wir müssen zeigen

$$(2.6) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists I \in \mathbb{N} \quad \forall i > I : O(\hat{p}_i) \subset U_\epsilon \left( \overline{\bigcup_{j=1}^l O(\hat{q}_j)} \right) .$$

Wir müssen also für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $I = I(\epsilon)$  angeben, so daß der Orbit durch  $\hat{p}_i$   $O(\hat{p}_i)$  für  $i > I$  im  $\epsilon$ -Schlauch um den  $(l-1)$ -fach gebrochenen Orbit  $(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l)$  liegt. Es gelte

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p \in M_{z_{j-1}, z_j} \quad , \quad j \in \{1, \dots, l\} .$$

Es seien  $V_j(z_j) \subset M$  und  $U_j(0) \subset T_{z_j} M$  Umgebungen wie im G-H-Thm. 2.4. Nun wählen wir  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, so daß  $U_\epsilon(z_j) \subset V_j(z_j)$ ,  $\forall j = 0, \dots, l$ . Weiter sei  $0 < \tilde{\epsilon} < \epsilon$  hinreichend klein, so daß  $U_{\tilde{\epsilon}, j}(0) \subset h^{-1}(U_\epsilon(z_j))$ ,  $\forall j = 0, \dots, l$ .

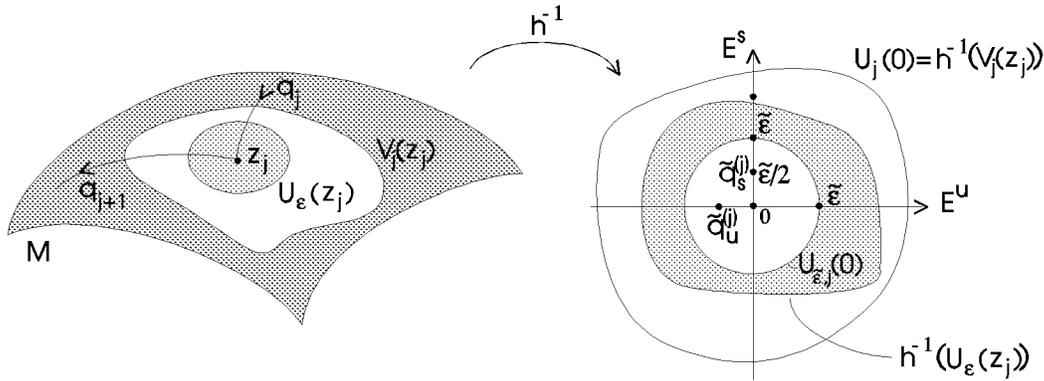
Mit  $q_u^{(j)}$  ( $j = 0, \dots, l-1$ ) bzw.  $q_s^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, l$ ) seien die Punkte bezeichnet, die uns Prop. 2.5 liefert und für die gilt

$$q_u^{(j)} \in \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} O(\hat{p}_i)} \cap W^u(z_j) \cap V_j(z_j)$$

bzw.

$$q_s^{(j)} \in \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(\hat{p}_i)} \cap W^s(z_j) \cap V_j(z_j) \quad .$$

Wir können oBdA annehmen  $\|\tilde{q}_u^{(j)}\| = \|\tilde{q}_s^{(j)}\| = \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$ , wobei  $\tilde{q}_{u,s}^{(j)} := h^{-1}(q_{u,s}^{(j)}) \in E^{u,s} \subset T_{z_j}M$ , denn



Figur 2.8

wir können  $q_{u,s}^{(j)}$  mittels der Flußabbildung verschieben und das Resultat ist weiterhin Element von

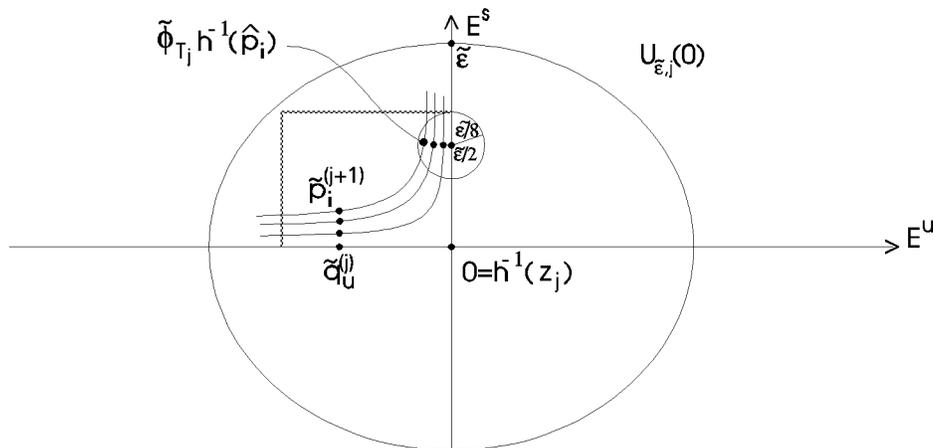
$$\overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(\hat{p}_i)} \cap W^{u,s}(z_j) \cap V_j(z_j) \quad .$$

Weiter gelte oBdA  $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{p}_i = q_u^{(j-1)}$ , denn sonst nehmen wir statt  $\{\hat{p}_i\}_i \in \mathbb{N}$  die Folge  $\{\phi_T \hat{p}_i\}_i \in \mathbb{N}$ , wobei gelte  $\phi_T p = q_u^{(j-1)}$ .

Sei nun  $T_j \in \mathbb{R}$ , so daß gilt  $\phi_T q_u^{(j-1)} = q_s^{(j)}$  und sei  $I_j \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $i > I_j$  gilt  $\hat{p}_i \in U_{\delta_j}(q_u^{(j-1)})$ ,  $\delta_j := (\tilde{\epsilon}/8c) \cdot \exp(-\tilde{K}T_j)$ ,  $\tilde{K} > 0$  und  $c \geq 1$  seien geeignete Konstanten für  $M$ . Dann gilt (Lemma 2.3 für die kompakte Mannigfaltigkeit  $M$ ,  $d(\cdot, \cdot)$  sei der Riemannsche Abstand auf  $M$ )

$$(2.7) \quad \begin{aligned} d\left(\phi_{T_j} \hat{p}_i, \overbrace{\phi_{T_j} q_u^{(j-1)}}^{= q_s^{(j)}}\right) &\leq c \cdot e^{\tilde{K} \cdot T_j} \cdot d(\hat{p}_i, q_u^{(j-1)}) \\ &< c \cdot e^{\tilde{K} \cdot T_j} \cdot (\tilde{\epsilon}/8c) \cdot e^{-\tilde{K} \cdot T_j} \\ &= \tilde{\epsilon}/8 < \epsilon \quad , \forall i > I_j . \end{aligned}$$

Damit wissen wir  $\phi_{[0, T_j]} \hat{p}_i \subset U_\epsilon(\phi_{[0, T_j]} q_u^{(j-1)})$ .



Figur 2.9

Nun finden wir nach Prop. 2.5 Punkte  $p_i^{(j+1)} \in \mathcal{O}(\hat{p}_i)$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i^{(j+1)} = q_u^{(j)}$  und anhand unserer Konstruktion sehen wir, daß das Orbitstück zwischen  $\phi_{T_j} \hat{p}_i$  und  $p_i^{(j+1)}$  für  $i > I_j$  in  $h(U_{\tilde{\epsilon},j}(0))$  und somit in  $U_\epsilon(z_j)$  enthalten ist.

Jetzt finden wir ein  $I_{j+1} \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $i > I_{j+1}$  gilt:  $p_i^{(j+1)} \in U_{\delta_{j+1}}(q_u^{(j)})$ ,  $\delta_{j+1} := \tilde{\epsilon}/8 \cdot e^{-KT_{j+1}}$ ; damit gilt  $\phi_{[0, T_{j+1}]} p_i^{(j+1)} \subset U_\epsilon(\phi_{[0, T_{j+1}]} q_u^{(j)})$ . Dieses Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab und endet bei  $z_l = y$ . Analog verfahren wir in rückwärtiger Zeitrichtung und enden bei  $z_0 = x$ . Dann gilt für  $i > I := \max\{I_1, \dots, I_l\}$ :  $\mathcal{O}(\hat{p}_i) \subset U_\epsilon\left(\overline{\bigcup_{j=1}^l \mathcal{O}(\hat{q}_j)}\right)$ .  $\square$

Der erste Teil des vorangehenden Beweises beruht auf einer Idee von A. Floer [F1] zum

BEWEIS (von Kor. 2.2, VERSION 2) Sei also  $Ind_f(x) - Ind_f(y) = 1$ , wir machen die Widerspruchsannahme  $\#\hat{M}_{x,y} = \infty$ . Sei  $\{\hat{p}_i\}_i \in$  eine Folge in  $\hat{M}_{x,y}$  mit  $\hat{p}_i \neq \hat{p}_j$  für  $i \neq j$  (sei beispielsweise  $\hat{p}_i$  die  $i$ -te Zusammenhangskomponente von  $\hat{M}_{x,y}$ ,  $i = 1, \dots, \infty$ ). Wir wissen nun, daß die  $\hat{p}_i$  0-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von  $M$  sind, d.h. es sind isolierte Punkte. Nach Definition von  $\hat{M}_{x,y}$  können wir  $\{\hat{p}_i\}_i \in$  als eine Folge von Punkten in  $M$  betrachten, welche aufgrund der Kompaktheit von  $M$  eine (in  $M$ ) konvergente Teilfolge besitzt. Sei  $P$  der Limes dieser Teilfolge, also

$$P \in \overline{\hat{M}_{x,y}} \subset \overline{M_{x,y}} \quad .$$

Analog zum ersten Teil des Beweises von Thm. 2.1 folgern wir nun die Existenz von kritischen Punkten  $x = z_0, z_1, \dots, z_l = y \in \overline{M_{x,y}}$ ,  $l \in \mathbb{N}$  geeignet, sowie von verbindenden Orbits  $\hat{q}_j \in \hat{M}_{z_{j-1}, z_j}$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Kor. 1.15 liefert nun (als Konsequenz aus der Morse-Smale Bedingung)

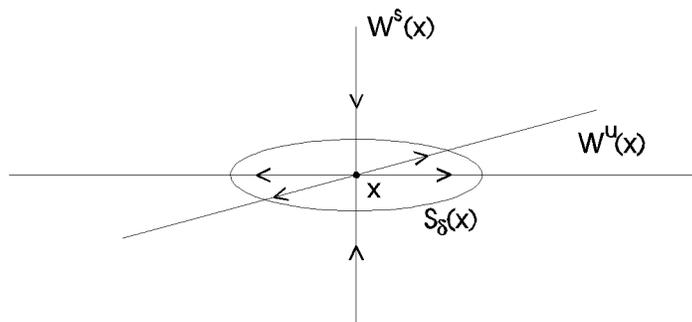
$$(2.8) \quad Ind_f(z_0) > Ind_f(z_1) > \dots > Ind_f(z_l) \quad ,$$

woraus wir, mit der Voraussetzung  $Ind_f(x = z_0) = Ind_f(y = z_l) + 1$ , folgern  $l = 1$ . Das bedeutet aber  $P \in \hat{M}_{x,y}$ , womit die Isoliertheitseigenschaft der Elemente von  $\hat{M}_{x,y}$  verletzt ist. Das ist ein Widerspruch.

Deswegen ist  $\#\hat{M}_{x,y} < \infty$ , besteht also aus endlich vielen diskreten Punkten. Jede Folge in  $\hat{M}_{x,y}$  besitzt aus diesem Grund eine konvergente Teilfolge,  $\hat{M}_{x,y}$  ist also kompakt.  $\square$

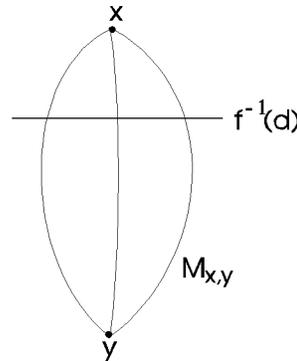
Eine weitere Beweisversion, die zunächst rein topologischer Natur ist, wurde uns von S.P. Novikov vorgeschlagen:

BEWEIS (von Kor. 2.2, VERSION 3) Wir nehmen zunächst an  $f^{-1}[f(y), f(x)] \cap Crit f = \{x, y\}$ , d.h. die einzigen kritischen Werte von  $f$  im Intervall  $[f(y), f(x)]$  werden bei  $x$  und  $y$  angenommen. Sei  $Ind_f(x) = k + 1 = Ind_f(y) + 1$ , sei  $\delta > 0$  hinreichend klein und sei  $S_\delta(x)$  die  $k$ -Sphäre vom Radius  $\delta$  um  $x$  in  $W^u(x)$  und  $S_\delta(y)$  die  $(n - k - 1)$ -Sphäre vom Radius  $\delta$  um  $y$  in  $W^s(y)$ .



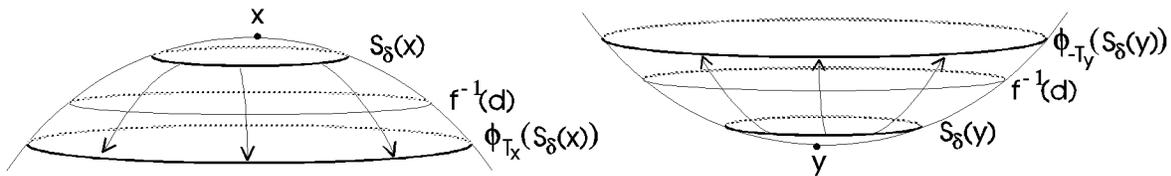
Figur 2.10

Sei  $d \in (f(y), f(x))$ , d.h.  $d$  ist ein regulärer Wert von  $f$ , also ist  $f^{-1}(d)$  eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  der Dimension  $n - 1$  (siehe das regular value thm. 1.3.2).



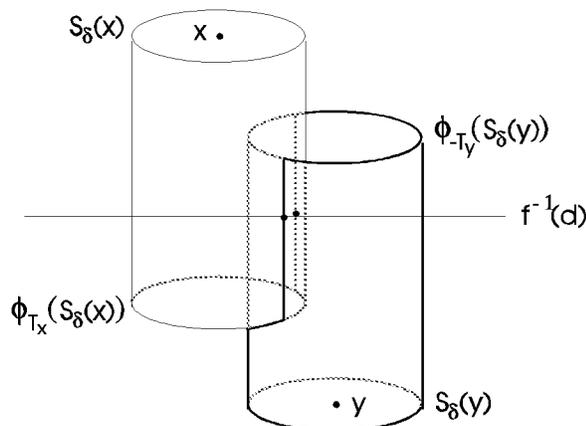
Figur 2.11

Aufgrund der Kompaktheit von  $S_\delta(x)$  finden wir nun ein  $T_x > 0$ , so daß  $f(p) < d, \forall p \in \phi_{T_x}(S_\delta(x))$ . Ebenso finden wir ein  $T_y > 0$ , so daß  $f(p) > d, \forall p \in \phi_{-T_y}(S_\delta(y))$ . Wir können uns das so vorstellen:



Figur 2.12

oder so



Figur 2.13

Es ist nun

$$(2.9) \quad \phi_{[0, T_x]}(S_\delta(x)) \cap \phi_{[-T_y, 0]}(S_\delta(y)) \cap f^{-1}(d) \simeq \hat{M}_{x,y} \quad ,$$

denn jeder Punkt der linken Seite hat den Funktionswert  $d$  und liegt auf einem  $x$  mit  $y$  verbindenden Orbit, also entspricht er eineindeutig einem Punkt in  $\hat{M}_{x,y}$ .

Die linke Seite ist als Schnitt dreier abgeschlossener Mengen abgeschlossen, also ist  $\hat{M}_{x,y}$  abgeschlossen.

Da  $M$  kompakt und  $\hat{M}_{x,y} \subset M$ , folgt  $\hat{M}_{x,y}$  kompakt. Daß gilt  $\#\hat{M}_{x,y} < \infty$ , folgt nun wie am Ende der Beweisversion 2 (eine, in einem Kompaktum enthaltene, diskrete und abgeschlossene Punktmenge kann nur endlich sein).

Die Voraussetzung  $f^{-1}[f(y), f(x)] \cap \text{Crit } f = \{x, y\}$  ist dadurch gerechtfertigt, daß wir in Appendix A zeigen werden, wie man die Funktion  $f$  **außerhalb einer isolierenden Umgebung** (Def. in App. A) von  $M_{x,y} \cup \{x, y\}$  derart modifizieren kann, daß unsere Voraussetzung über die kritischen Werte erfüllt ist. Das Wesentliche dabei ist, daß  $M_{x,y}$  dabei nicht verändert wird.  $\square$

Eine weitere Beweisvariante ist in Appendix B dargestellt. Statt Folgen in den Orbiträumen  $\hat{M}_{x,y}$ , werden wir dort Folgen in Funktionenräumen  $\mathcal{M}_{x,y} \subset C^r(\mathbb{R}, M)$ ,  $r \geq 2$ , untersuchen. Wir werden dort ein Thm. 2.1 entsprechendes Kompaktheitsresultat zeigen, welches – auch bezüglich der Beweisidee – ein Analogon im Fall des symplektischen Wirkungsfunktionals auf dem loop-space von  $M$  (also in der Floer-Homologie) besitzt, siehe [Sa2, Prop. 4.2]

## 2.3 Glueing

In diesem Abschnitt soll das sogenannte **Glueing (=kleben) von Orbits** eingeführt werden. Darunter ist eine Abbildung  $\hat{\#}_\rho$  zu verstehen, welche zwei Orbits  $\hat{u} \in \hat{M}_{x,y}$  und  $\hat{v} \in \hat{M}_{y,z}$  einen Orbit  $\hat{u}\hat{\#}_\rho\hat{v} \in \hat{M}_{x,z}$  zuordnet.  $\rho \in (0, \hat{\rho}_0)$  heißt **Glueing-Parameter**. Wir wollen die Abbildung  $\hat{\#}$  hier jedoch nur für den Fall  $Ind_f(x) = Ind_f(y) + 1 = Ind_f(z) + 2$  definieren, da wir zur späteren Definition des Morse-Witten Komplexes nur diesen Fall benötigen.

Weiter ist  $\hat{u}\hat{\#}_{(0, \hat{\rho}_0]}\hat{v}$  kompakt bis auf den 1-fach gebrochenen Orbit  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x,y} \times \hat{M}_{y,z}$ . Da nun die Zusammenhangskomponente  $\hat{M}_{x,z}^i$  1-dimensional ist, und  $\hat{u}\hat{\#}_{(0, \hat{\rho}_0]}\hat{v}$  offenbar ein Ende darstellt, ist  $\hat{M}_{x,z}^i$  diffeomorph zu  $(0, 1)$ , besitzt also ein zweites Ende. Mit Methoden, wie in Abschnitt 2.2 über Kompaktheit, läßt sich zeigen, daß das zweite Ende gegen ein Paar  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2) \in \hat{M}_{x,y_2} \times \hat{M}_{y_2,z}$  konvergiert. Aufgrund der Resultate dieses Abschnitts (Eindeutigkeit des Schnittpunkts), können wir folgern  $(\hat{u}, \hat{v}) \neq (\hat{u}_2, \hat{v}_2)$ . Die Menge  $\{x, y, y_2, z\} \cup \mathcal{O}(\hat{u}) \cup \mathcal{O}(\hat{v}) \cup \mathcal{O}(\hat{u}_2) \cup \mathcal{O}(\hat{v}_2)$  stellt offenbar den topologischen Rand von  $\hat{M}_{x,z}^i$  dar. In diesem Sinne sagen wir  $(\hat{u}, \hat{v})$  und  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2)$  seien **cobordant**. Dieser Begriff ist in Abschnitt 3.2 bei der Konstruktion des Randoperators wichtig.

Im ersten Teil "DER EINDEUTIGE SCHNITTPUNKT" dieses Abschnitts geht es darum die Grundlage für die Wohldefiniertheit der Glueing-Abbildung zu schaffen. Wir nehmen zunächst zwei Punkte  $p \in u$  und  $q \in v$ , dann wählen wir zwei kleine Kreisscheiben  $\tilde{D}^k$  und  $\tilde{D}^{n-k}$  in  $W^u(x)$  bzw.  $W^s(z)$ , welche  $u$  bzw.  $v$  in  $p$  bzw.  $q$  transversal schneiden. Die Idee ist nun  $\tilde{D}^k$  und  $\tilde{D}^{n-k}$  in positiver bzw. negativer Zeitrichtung fließen zu lassen. Das  $\lambda$ -Lemma besagt, daß sie sich (in einer Karte um  $y$ ) in der  $C^1$ -Topologie an  $E^u(y)$  bzw.  $E^s(y)$  annähern. Nun stellen wir  $\phi_T \tilde{D}^k$  und  $\phi_T \tilde{D}^{n-k}$ ,  $T$  hinreichend groß, lokal (in einer Karte) als Graphen geeigneter Abbildungen dar und zeigen, daß sie einen eindeutigen Schnittpunkt besitzen, der stetig differenzierbar von  $T$  abhängt. Für  $T \rightarrow \infty$  konvergiert dieser gegen  $y$ . Anschließend diskutieren wir die Existenz des Schnittpunktes noch einmal mit differentialtopologischen Methoden.

Im nächsten Teil "DIE GLUEING-ABBILDUNG" wird diese zunächst definiert. Es stellt sich heraus (Lemma 3.6), daß

$$\cdot \hat{\#} \cdot : \hat{M}_{x,y} \times (0, \hat{\rho}_0) \times \hat{M}_{y,z} \rightarrow \hat{M}_{x,z}$$

eine Einbettung darstellt. Für festes  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x,y} \times \hat{M}_{y,z}$  ist  $\hat{u}\hat{\#}_{(0, \rho_0)}\hat{v}$  also eine zusammenhängende 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\hat{M}_{x,z}^i$ ,  $M_{x,z}$  und  $M$ .

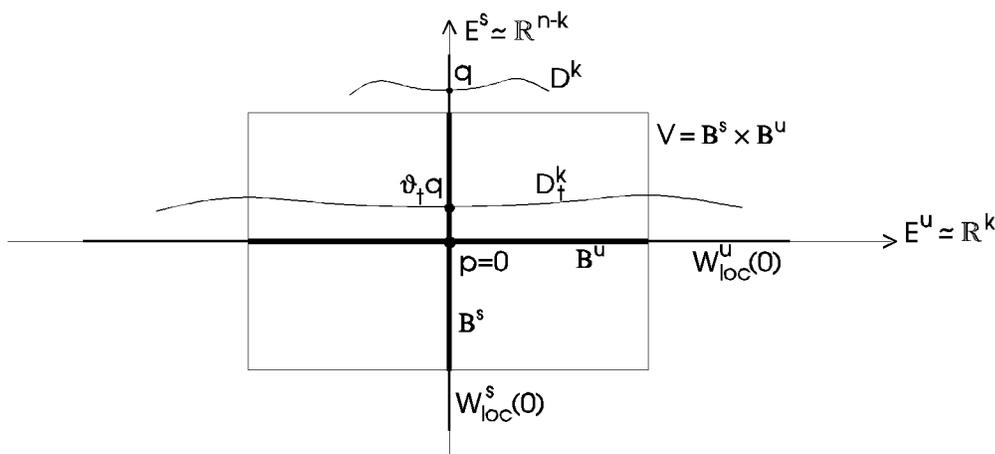
### DER EINDEUTIGE SCHNITTPUNKT

Wesentlich für die Konstruktion des eindeutigen Schnittpunkts ist das sogenannte  $\lambda$ -Lemma. Dazu brauchen wir den Begriff der  $\epsilon$   $C^r$ -Nähe von zwei Untermannigfaltigkeiten. Seien  $S$  und  $S'$   $C^r$ -Untermannigfaltigkeiten von  $M$ ,  $r \geq 0$ , und sei  $\epsilon > 0$ .  $S$  und  $S'$  heißen  $\epsilon$   **$C^r$ -nahe zueinander**, falls ein  $C^r$ -Diffeomorphismus  $\eta : S \rightarrow S'$  (ein Homöomorphismus für  $r = 0$ ) existiert, so daß  $i' \circ \eta$   $\epsilon$ -nahe bei  $i$  in der  $C^r$ -Topologie ist (hier: schwache Topologie, da  $M$  kompakt).  $i : S \rightarrow M$  und  $i' : S' \rightarrow M$  bezeichnen die Inklusionsabbildungen.

Sei  $p \in M$  eine hyperbolische Singularität eines Vektorfeldes  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $r \geq 1$ ,  $Ind(p) = k$ .  $\vartheta_t \in Diff^r(M)$  bezeichne die durch  $X$  erzeugte Zeit- $t$ -Abbildung; dann ist nach Prop. 1.1.11  $p$  ein hyperbolischer Fixpunkt von  $\vartheta_t$ . Mittels einer Karte  $(\varphi, U)$  um  $p$ , können wir annehmen  $p = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Mit Hilfe einer Konjugation von  $\vartheta_t$ , wie sie am Ende von Abschnitt 1.3 beschrieben ist, können wir oBdA annehmen, daß (in einer Karte!) die hinreichend kleinen Umgebungen  $W_{loc}^u(p)$  bzw.  $W_{loc}^s(p)$  von  $p$  in  $W^u(p)$  bzw.  $W^s(p)$  Teilmengen der linearen Unterräume  $E^u$  bzw.  $E^s$  von  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$  sind.  $B^u$  bzw.  $B^s$  seien in  $W_{loc}^u(p)$  bzw.  $W_{loc}^s(p)$  so eingebettete Kreisscheiben, daß  $\partial B^{u,s}$  transversal zu  $X$  in  $W^{u,s}(p)$  ist; es gelte  $p \in B^{u,s}$ .  $D^k$  sei eine  $k$ -dimensionale Kreisscheiben in  $M$ , welche  $W_{loc}^s(p)$  transversal in einem Punkt  $q$  schneidet, d.h.  $D^k \pitchfork W_{loc}^s(p) = q$ . Sei  $V := B^s \times B^u$ , dann gilt das

**$\lambda$ -Lemma 3.1** [*PdM*, Kap. 2, Lemma 7.2]  $D_t^k$  bezeichne die Zusammenhangskomponente von  $\vartheta_t(D^k) \cap V$ , welche  $\vartheta_t(q)$  enthält. Dann gilt

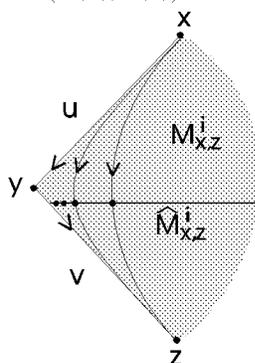
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists t_0 > 0 \quad \forall t > t_0 \quad : \quad D_t^k \text{ ist } \epsilon \text{ } C^1\text{-nahe zu } B^u \quad .$$



Figur 3.1

Wir wenden dieses Resultat jetzt auf unseren Fall des negativen Gradientenflusses  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  an. Dabei seien  $x, y, z \in \text{Crit } f$  mit  $\text{Ind}_f(x) = k + 1 = \text{Ind}_f(y) + 1 = \text{Ind}_f(z) + 2$ . Wir wählen nun zwei feste Orbits  $\hat{u} \in \hat{M}_{x,y}$  und  $\hat{v} \in \hat{M}_{y,z}$ . Unser Ziel wird sein zu zeigen, daß genau eine Zusammenhangskomponente  $\hat{M}_{x,z}^i$  von  $\hat{M}_{x,z}$  existiert, welche eine gegen  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x,y} \times \hat{M}_{y,z}$  konvergente Teilfolge besitzt, bzw. anders formuliert, daß genau eine Zusammenhangskomponente  $M_{x,z}^i$  von  $M_{x,z}$  existiert, so daß (siehe Figur 3.2)

$$(\mathcal{O}(\hat{u}), \mathcal{O}(\hat{v})) \subset \overline{M_{x,y}^i} .$$

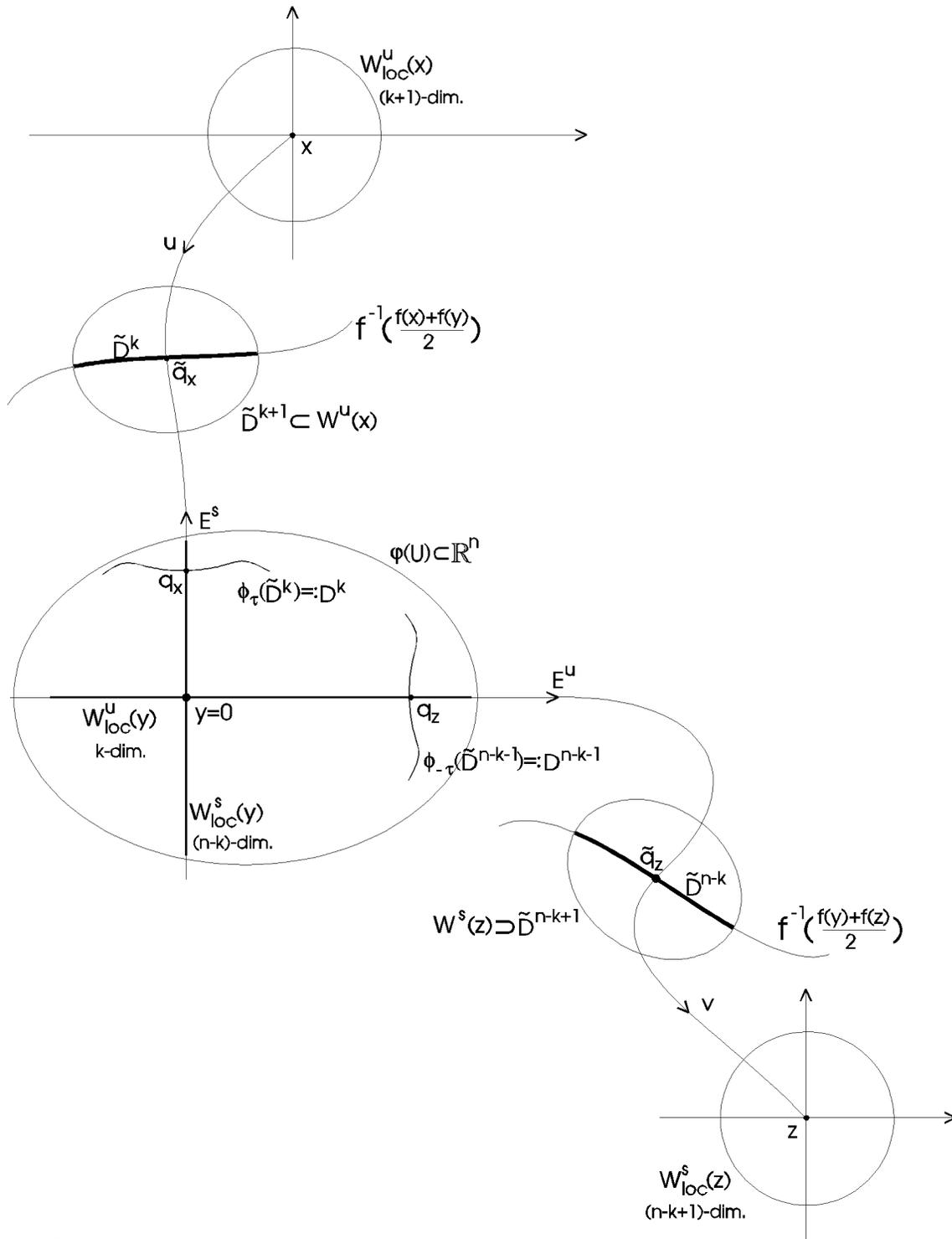


Figur 3.2

Sei  $\tilde{q}_x \in u$  das eindeutige Element mit  $f(\tilde{q}_x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$  und  $\tilde{q}_z \in v$  dasjenige mit  $f(\tilde{q}_z) = \frac{1}{2}(f(y) + f(z))$ . Sei  $\tilde{D}^{k+1}$  eine kleine abgeschlossene Umgebung von  $\tilde{q}_x$  in  $W^u(x)$ , welche diffeomorph zur  $(k + 1)$ -dimensionalen Einheitsvollkugel sei. Sei  $\frac{1}{2}(f(x) + f(y))$  ein regulärer Wert von  $f$ , dann ist  $f^{-1}(\frac{1}{2}(f(x) + f(y)))$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ . Selbst wenn  $\frac{1}{2}(f(x) + f(y))$  kein regulärer Wert von  $f$  sein sollte, so ist  $f^{-1}(\frac{1}{2}(f(x) + f(y)))$  lokal bei  $\tilde{q}_x$  immer noch eine Untermannigfaltigkeit von  $M$ . Wir brauchen hier nur diese lokale Eigenschaft. Der Schnitt  $f^{-1}(\frac{1}{2}(f(x) + f(y))) \cap \tilde{D}^{k+1}$  ist transversal, da  $\tilde{D}^{k+1} \subset W^u(x) \setminus \{x\}$ . Diejenige Zusammenhangskomponente dieses Schnittes, welche  $\tilde{q}_x$  enthält, bezeichnen wir mit  $\tilde{D}^k$ .  $\tilde{D}^k$  ist nun eine  $k$ -dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit von  $M$ , welche diffeomorph zur  $k$ -Vollkugel ist. Aufgrund der Konstruktion ist klar, daß  $\tilde{D}^k$  den Orbit  $u$  transversal bei  $\tilde{q}_x$  schneidet (in  $W^u(x)$ ). Analog konstruieren wir ein  $\tilde{D}^{n-k}$ , welches den Orbit  $v$  transversal bei  $\tilde{q}_z$  schneidet (in  $W^s(z)$ ), siehe Figur 3.3.

Wir betrachten die kritischen Punkte und die entsprechenden Teilstücke von  $u$  und  $v$  jetzt mittels geeigneter Karten. Alle Orbits in  $M_{x,z}$ , die nahe bei  $(u, v)$  liegen, schneiden also  $\tilde{D}^k$  und  $\tilde{D}^{n-k}$ . Wenn wir nun  $\tilde{D}^k$  in positiver und  $\tilde{D}^{n-k}$  in negativer Zeitrichtung fließen lassen (mittels  $\phi_t$  natürlich), so repräsentieren die Schnittpunkte gerade Orbits aus  $\hat{M}_{x,z}$ . Wir werden zeigen, daß für  $T > 0$

hinreichend groß,  $\phi_T(\tilde{D}^k)$  und  $\phi_{-T}(\tilde{D}^{n-k})$  einen eindeutigen Schnittpunkt besitzen, der stetig differenzierbar von  $T$  abhängt und für  $T \rightarrow \infty$  gegen  $y$  strebt. Hieraus werden wir schließen, daß es genau eine Zusammenhangskomponente  $M_{x,z}^i$  gibt, in deren topologischem Abschluß  $(u, v)$  liegt.



Figur 3.3

Sei  $\tau > 0$  hinreichend groß, so daß  $q_x := \phi_\tau(\tilde{q}_x) \in W_{loc}^s(y)$  und  $q_z := \phi_{-\tau}(\tilde{q}_z) \in W_{loc}^u(y)$ , dann schneidet  $D^k := \phi_\tau(\tilde{D}^k) W_{loc}^s(y)$  im Punkt  $q_x$  transversal (in  $M$ ) und ebenso  $D^{n-k} := \phi_{-\tau}(\tilde{D}^{n-k}) W_{loc}^u(y)$  im Punkt  $q_z$  (in  $M$ ):

Zunächst einmal schneidet  $\phi_\tau(\tilde{D}^k)$  den Orbit  $u$  am Punkt  $\phi_\tau(\tilde{q}_x)$  transversal in  $W^u(x)$ , denn der Tangentialfluß  $D\phi_\tau$  erhält Transversalität. Nach Voraussetzung gilt

$$(3.1) \quad T_{\tilde{q}_x} \tilde{D}^k + \mathbb{R} \cdot \xi = T_{\tilde{q}_x} W^u(x) \quad (\simeq \mathbb{R}^{k+1}) \quad ,$$

wobei  $\xi = \dot{\eta}(0)$  mit  $\eta$  Lösung des AWP's  $\dot{\eta}(t) = -\nabla f(\eta(t))$ ,  $\eta(0) = \tilde{q}_x$ . Jetzt wenden wir  $D\phi_\tau$  auf die vorige Gleichung an, es ergibt sich

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^{k+1} \simeq T_{q_x} W^u(x) &= D\phi_\tau(\tilde{q}_x)(T_{\tilde{q}_x} W^u(x)) \\ &= D\phi_\tau(\tilde{q}_x)(T_{\tilde{q}_x} \tilde{D}^k) + D\phi_\tau(\tilde{q}_x)(\mathbb{R} \cdot \dot{\eta}(0)) \\ &= \underbrace{T_{q_x} D^k}_{\simeq k} + \mathbb{R} \cdot \dot{\eta}(\tau) \quad . \end{aligned}$$

Also haben wir Transversalität (in  $W^u(x)$ ) des Schnittes von  $\phi_\tau(\tilde{D}^k) = D^k$  und  $u$  am Punkt  $\phi_\tau(\tilde{q}_x) = q_x$ . In die letzte Gleichung ging folgendes ein:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} D\phi_\tau(\tilde{q}_x)(\mathbb{R} \cdot \dot{\eta}(0)) &= \mathbb{R} \cdot D\phi_\tau(\eta(0)) \left( \frac{d}{dt} \eta(t) \Big|_{t=0} \right) \\ &= \mathbb{R} \cdot D\phi_\tau(\hat{\eta}(-\tau)) \left( \frac{d}{dt} \hat{\eta}(t) \Big|_{t=-\tau} \right) \quad , \quad \hat{\eta}(t) := \eta(t+\tau) \\ &= \mathbb{R} \cdot \frac{d}{dt} (\phi_\tau \circ \hat{\eta})(-\tau) \\ &= \mathbb{R} \cdot \frac{d}{dt} \hat{\eta}(0) \\ &= \mathbb{R} \cdot \frac{d}{dt} \eta(\tau) \\ &= \mathbb{R} \cdot \frac{d}{dt} \eta(t) \Big|_{t=\tau} \\ &= \mathbb{R} \cdot \dot{\eta}(\tau) \quad . \end{aligned}$$

D.h. der Tangentialfluß  $D\phi_\tau$  verschiebt Tangentialvektoren an die Trajektorie  $\eta$  in einem Punkt  $p$  in Tangentialvektoren an  $\eta$  im Punkt  $\phi_\tau p$ . Genauso folgt

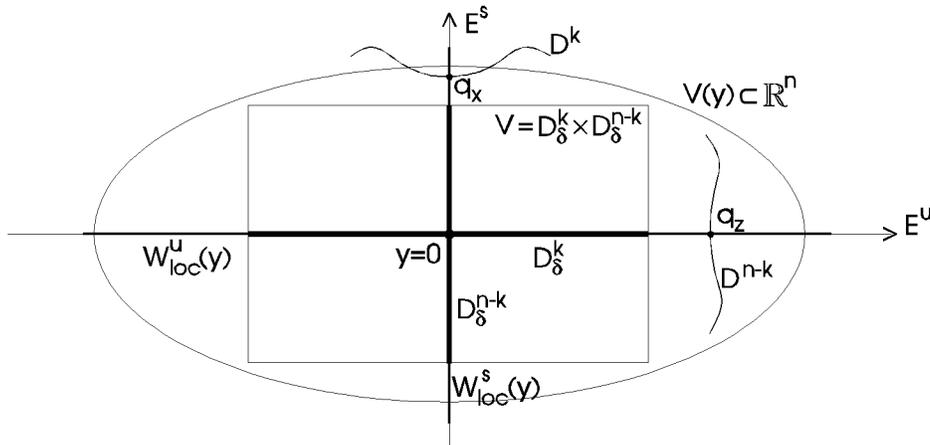
$$D\phi_\tau(\tilde{q}_x)(T_{\tilde{q}_x} \tilde{D}^k) = T_{q_x} D^k \quad .$$

Jetzt zur Transversalität (in  $M$ ) von  $D^k$  und  $W_{loc}^s(y)$  am Punkt  $q_x$ : Es ist

$$(3.4) \quad \begin{aligned} T_{q_x} M &= T_{q_x} W^u(x) + T_{q_x} W^s(y) \quad , \text{ Morse-Smale Bed.} \\ &= T_{q_x} W^u(x) + T_{q_x} W_{loc}^s(y) \quad , \quad q_x \in W_{loc}^s(y) \\ &= T_{q_x} D^k + \mathbb{R} \cdot \dot{\eta}(\tau) + T_{q_x} W_{loc}^s(y) \quad , \quad (3.2) \\ &= T_{q_x} D^k + T_{q_x} W_{loc}^s(y) \quad , \quad \dot{\eta}(\tau) \in T_{q_x} W_{loc}^s(y) \quad . \end{aligned}$$

Analog erhalten wir Transversalität von  $D^{n-k}$  und  $W_{loc}^u(y)$  am Punkt  $q_z$ . Die Voraussetzungen des  $\lambda$ -Lemmas 3.1 sind also erfüllt.

Seien nun  $D_\delta^k$  bzw.  $D_\delta^{n-k}$  Kreisscheiben in  $W_{loc}^u(y)$  bzw.  $W_{loc}^s(y)$  vom Radius  $\delta > 0$  um  $0$ .  $\delta$  sei hinreichend klein, so daß  $V := D_\delta^k \times D_\delta^{n-k}$  enthalten ist in der Umgebung  $V(y)$  aus dem G-H-Thm. 2.4.  $(\varphi, U)$  sei eine Karte um  $y$  (d.h. wir können annehmen  $y = 0 \in \mathbb{R}^n$ ), oBdA gelte  $V(y) \subset U$ . Wir haben jetzt qualitativ eine Situation wie in Figur 3.4.

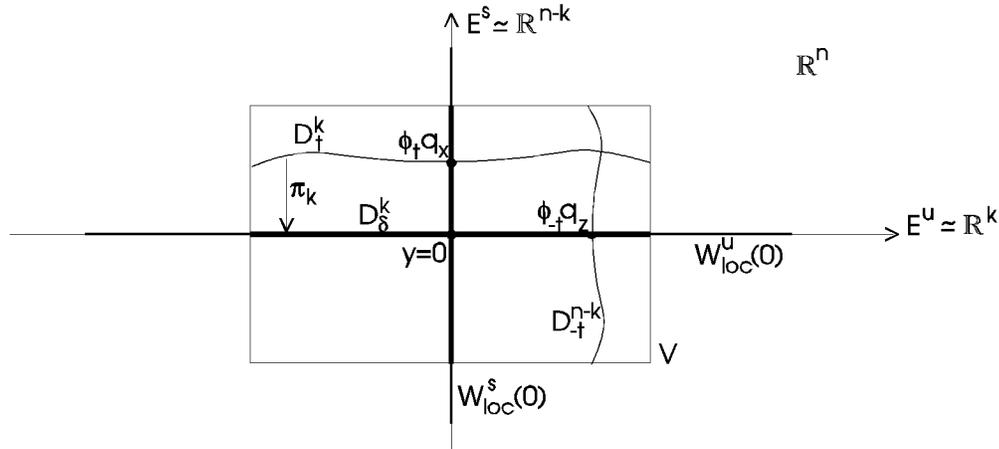


Figur 3.4

Das  $\lambda$ -Lemma 3.1 liefert nun zu jedem  $\epsilon > 0$  (also insbesondere zu  $\epsilon \in (0,1)$ ) ein  $t_x \in \mathbb{R}^+$ , so daß für alle  $t \geq t_x$   $D_t^k \in C^1$ -nahe zu  $D_\delta^k$  ist. Ebenso findet man ein  $t_z \in \mathbb{R}^+$ , so daß  $\forall t \geq t_z$  gilt:  $D_{-t}^{n-k}$  ist  $\epsilon$   $C^1$ -nahe zu  $D_\delta^{n-k}$ . Wir gehen nun unter Verwendung der Tatsache  $V \subset V(y)$  oBdA davon aus, daß gilt:

$$(3.5) \quad \pi_k(D_t^k) = D_\delta^k \quad \text{und} \quad \pi_{n-k}(D_{-t}^{n-k}) = D_\delta^{n-k} \quad , \quad \forall t > T_0 > \max\{t_x, t_z\} \quad , \quad T_0 \text{ hinreichend groß .}$$

$\pi_k$  bzw.  $\pi_{n-k}$  bezeichnen wie zuvor die Orthogonalprojektionen auf  $E^u$  bzw.  $E^s$ .



Figur 3.5

Unser Ziel ist es nun eine  $C^1$ -Abbildung  $F: D_\delta^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  zu konstruieren, so daß  $D_t^k$  der Graph von  $F$  ist; d.h. daß gilt:  $D_t^k = \{(x, F(x)) \mid x \in D_\delta^k \subset \mathbb{R}^k\}$ .

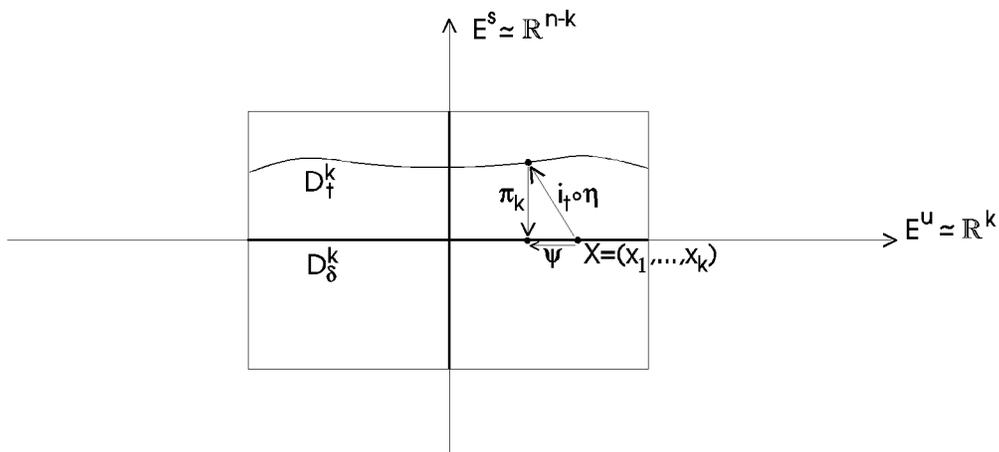
Sei  $0 < \epsilon < 1$ , dann liefert das  $\lambda$ -Lemma 3.1 ein  $t_x \in \mathbb{R}^+$ , so daß für alle reellen  $t > t_x$  gilt:  $D_t^k$  ist  $\epsilon$   $C^1$ -nahe zu  $D_\delta^k$ . Es existiert also ein  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\eta: D_\delta^k \rightarrow D_t^k \subset M$  ( $D_t^k \subset \mathbb{R}^n$  für geeignete Karte und  $\delta > 0$  hinreichend klein), so daß  $i_t \circ \eta: D_\delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  in der (schwachen)  $C^1$ -Topologie  $\epsilon$ -nahe bei  $i_\delta: D_\delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  liegt.  $i_t$  bzw.  $i_\delta$  bezeichnen die Inklusionen von  $D_t^k$  bzw.  $D_\delta^k$  in  $M$  (und damit in  $\mathbb{R}^n$  bzgl. der geeigneten Karte). Es gelten also

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \text{i)} \quad & \|i_\delta(x) - i_t \circ \eta(x)\| < \epsilon \quad , \quad \forall x \in D_\delta^k \subset \mathbb{R}^k \quad , \\ \text{ii)} \quad & \|Di_\delta(x) - D(i_t \circ \eta)(x)\| < \epsilon \quad , \quad \forall x \in D_\delta^k \subset \mathbb{R}^k \quad . \end{aligned}$$

Wie schon zuvor angedeutet, wollen wir nun die ganze Situation in einer Karte um  $y$  betrachten. Es muß dazu lediglich  $\delta > 0$  hinreichend klein gewählt werden.

Die Eigenschaft i) besagt nun, daß  $D_t^k$  in einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $D_\delta^k$  (bzgl.  $\mathbb{R}^n$ ) liegt. Dies ist nichts wesentlich Neues und hätte bereits aus dem G-H-Thm. 2.4 hergeleitet werden können.

Also ist der wichtige Punkt die Eigenschaft ii). Diese wollen wir jetzt genauer analysieren und einige Folgerungen aus ihr herleiten. Mit  $\pi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  sei die Orthogonalprojektion auf die ersten  $k$  Koordinaten bezeichnet, mit  $\pi_{n-k}$  jene auf die letzten  $(n-k)$  Koordinaten. Wir interessieren uns nun für die Abbildung  $\psi := \pi_k \circ (i_t \circ \eta): \mathbb{R}^k \supset D_\delta^k \rightarrow D_\delta^k \subset \mathbb{R}^k$ .



Figur 3.6

**Proposition 3.2** Die Abbildung  $\psi := \pi_k \circ (i_t \circ \eta) : D_\delta^k \rightarrow D_\delta^k$  ist, für  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, ein  $C^1$ -Diffeomorphismus.

BEWEIS Es ist  $\pi_k(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$ , hieraus ergibt sich

$$(3.7) \quad D\pi_k(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} k, k & 0_{k, n-k} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(k, n) \quad .$$

$$D(i_t \circ \eta)(x_1, \dots, x_k) : T_{(x_1, \dots, x_k)} D_\delta^k \simeq \mathbb{R}^k \rightarrow T_{(i_t \circ \eta)(x_1, \dots, x_k)} D_t^k \subset \mathbb{R}^n$$

hat bezüglich der kanonischen Koordinaten des  $\mathbb{R}^n$  die Gestalt (mit  $\vec{x} := (x_1, \dots, x_k)$ )

$$(3.8) \quad D(i_t \circ \eta)(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(i_t \circ \eta)_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial(i_t \circ \eta)_1}{\partial x_k}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(i_t \circ \eta)_n}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial(i_t \circ \eta)_n}{\partial x_k}(\vec{x}) \end{bmatrix} \in \text{Mat}(n, k) \quad .$$

Hieraus ergibt sich

$$(3.9) \quad D\psi(\vec{x}) = D(\pi_k \circ (i_t \circ \eta))(\vec{x}) = D\pi_k|_{(i_t \circ \eta)(\vec{x})} \circ D(i_t \circ \eta)(\vec{x})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial(i_t \circ \eta)_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial(i_t \circ \eta)_1}{\partial x_k}(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(i_t \circ \eta)_k}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial(i_t \circ \eta)_k}{\partial x_k}(\vec{x}) \end{bmatrix} \in \text{Mat}(k, k) \quad .$$

Weiter ergibt sich aus  $i_\delta(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$(3.10) \quad Di_\delta(\vec{x}) = \begin{bmatrix} k, k \\ 0_{n-k, k} \end{bmatrix} \in \text{Mat}(n, k) \quad .$$

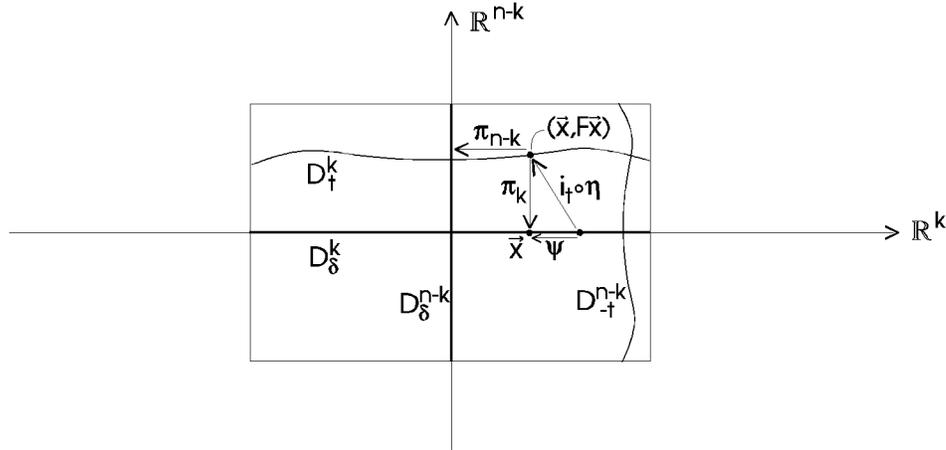
Jetzt kommt die Eigenschaft ii)  $\|Di_\delta(\vec{x}) - D(i_t \circ \eta)(\vec{x})\| < \epsilon$ ,  $\forall \vec{x} \in D_\delta^k$ , zum Tragen. Sie besagt, daß  $Di_\delta(\vec{x})$  im Raum  $\text{Mat}(n, k)$   $\epsilon$ -nahe bei  $D(i_t \circ \eta)(\vec{x})$  liegt. Hieraus folgern wir nun, daß die aus den oberen ersten  $k$  Zeilen von  $D(i_t \circ \eta)(\vec{x})$  bestehende  $(k \times k)$ -Matrix (welche dann gleich  $D(\pi_k \circ (i_t \circ \eta))(\vec{x})$  ist) nahe bei  ${}_{k,k} \in \text{Gl}(k, \mathbb{R})$  liegt. Da  $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$  offen in  $\text{Mat}(k, k)$  ist, folgern wir, daß  $D(\pi_k \circ (i_t \circ \eta))(\vec{x})$  für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$  invertierbar und damit ein Isomorphismus ist. Das Thm. 1.1.8 über inverse Funktionen besagt nun, daß  $\psi := \pi_k \circ (i_t \circ \eta)$  lokal bei  $\vec{x} \in D_\delta^k$  ein ( $C^1$ -) Diffeomorphismus ist. Da dies für alle  $\vec{x} \in D_\delta^k$  gilt, schließen wir, daß

$$\psi : D_\delta^k \rightarrow D_\delta^k$$

ein ( $C^1$ -) Diffeomorphismus ist. □

Es ist  $i_t \circ \eta : D_\delta^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus auf sein Bild  $(i_t \circ \eta)(D_\delta^k) = D_t^k$  und die Komposition  $(i_t \circ \eta) \circ \psi^{-1} : D_\delta^k \rightarrow D_t^k \subset \mathbb{R}^n$  dieser beiden Diffeomorphismen ist nun selbst ein Diffeomorphismus auf sein Bild  $D_t^k$ . Nach Konstruktion werden die ersten  $k$  Koordinaten  $(x_1, \dots, x_k)$  unter  $(i_t \circ \eta) \circ \psi^{-1}$  erhalten. Wir müssen  $(i_t \circ \eta) \circ \psi^{-1}(\vec{x})$  nun nur noch mittels  $\pi_{n-k}$  auf den  $\mathbb{R}^{n-k}$  projizieren, um die gesuchte  $C^1$ -Graphenabbildung  $F := \pi_{n-k} \circ (i_t \circ \eta) \circ \psi^{-1} : D_\delta^k \rightarrow D_\delta^{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k}$  zu erhalten. Nach Konstruktion ergibt sich

$$(3.11) \quad D_t^k = \{(\vec{x}, F\vec{x}) \mid \vec{x} \in D_\delta^k\} \quad .$$



Figur 3.7

Analog konstruieren wir die  $C^1$ -Graphenabbildung  $G: D_\delta^{n-k} \rightarrow D_\delta^k \subset \mathbb{R}^k$ , so daß gilt

$$(3.12) \quad D_{-t}^{n-k} = \{(G\vec{y}, \vec{y}) \mid \vec{y} \in D_\delta^{n-k}\} \quad .$$

Jetzt gilt unser Interesse dem Schnitt  $D_t^k \cap D_{-t}^{n-k}$ , wir werden zeigen, daß dieser Schnitt für jedes hinreichend große  $t \in \mathbb{R}$  aus genau einem Punkt besteht. Es ist

$$(3.13) \quad \begin{aligned} D_t^k \cap D_{-t}^{n-k} &= \{(\vec{x}, F\vec{x}) \mid \vec{x} \in D_\delta^k\} \cap \{(G\vec{y}, \vec{y}) \mid \vec{y} \in D_\delta^{n-k}\} \\ &= \{(\vec{x}, F\vec{x}) \in D_\delta^k \times D_\delta^{n-k} \mid \exists \vec{y} \in D_\delta^{n-k} \text{ so daß } (\vec{x}, F\vec{x}) = (G\vec{y}, \vec{y})\} \quad . \end{aligned}$$

Also ist für  $p \in V \subset \mathbb{R}^n$  mit  $p_x := (p_1, \dots, p_k)$  und  $p_y := (p_{k+1}, \dots, p_n)$

$$(3.14) \quad \begin{aligned} p = (p_x, p_y) \in D_t^k \cap D_{-t}^{n-k} &\Leftrightarrow (p_x, Fp_x) = (Gp_y, p_y) \\ &\Leftrightarrow p_x = Gp_y \text{ und } Fp_x = p_y \\ &\Leftrightarrow p_x = Gp_y = (G \circ F)(p_x) \\ &\Leftrightarrow p_x \text{ ist Fixpunkt der Abb. } G \circ F: D_\delta^k \rightarrow D_\delta^k \quad . \end{aligned}$$

Die **Existenz eines Fixpunktes** von  $G \circ F$ , und damit eines Schnittpunkts von  $D_t^k$  und  $D_{-t}^{n-k}$ , erhalten wir an dieser Stelle bereits aus dem **Brouwerschen Fixpunkt-Theorem** [H, S. 73], welches besagt, daß eine stetige Abbildung  $g: D^k \rightarrow D^k$  ( $D^k$  bezeichne hier die  $k$ -dimensionale Einheitsvollkugel im  $\mathbb{R}^k$ ) einen Fixpunkt besitzt.

Wenn eine Konstante  $0 < L < 1$  existiert, so daß gilt

$$(3.15) \quad |G \circ F(\vec{x}_1) - G \circ F(\vec{x}_2)| \leq L |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \quad , \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D_\delta^k \quad ,$$

so nennen wir  $G \circ F$  eine **strikte Kontraktion**. Es gilt das bekannte

**Theorem 3.3** [RS, Thm. V.18] *Eine strikte Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum besitzt einen eindeutigen Fixpunkt.*

Wegen

$$(3.16) \quad \frac{|G \circ F(\vec{x}_1) - G \circ F(\vec{x}_2)|}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \leq \sup_{\vec{x} \in D_\delta^k} \|D(G \circ F)(\vec{x})\| \quad , \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D_\delta^k \quad ,$$

genügt es zu zeigen

$$(3.17) \quad \sup_{\vec{x} \in D_\delta^k} \|D(G \circ F)(\vec{x})\| \leq L \quad , \quad \text{für } L \in (0, 1) \text{ geeignet,}$$

um zu folgern, daß  $G \circ F$  eine strikte Kontraktion ist, und somit nach Thm. 3.3 einen **eindeutigen Fixpunkt** in  $D_\delta^k$  besitzt. Hieraus folgt, wie oben gezeigt, daß  $D_t^k \cap D_{-t}^{n-k}$  aus genau einem Punkt besteht. Dieser hängt von der Lage von  $D_t^k$  und  $D_{-t}^{n-k}$  ab, welche sich stetig differenzierbar in  $t$  ändert. Also gilt das

**Lemma 3.4** Für  $\epsilon \in (0,1)$  und  $t > T_0$ ,  $T_0$  wie in (3.1), gilt:  $D_t^k \cap D_{-t}^{n-k}$  besteht aus genau einem Punkt, welcher stetig differenzierbar von  $t$  abhängt.

Es bleibt noch zu zeigen

**Proposition 3.5** Für  $\epsilon \in (0,1)$  ( $\epsilon$  wie in (3.6)) existiert ein  $L \in (0,1)$ , so daß gilt

$$\sup_{\vec{x} \in D_\delta^k} \|D(G \circ F)(\vec{x})\| < L \quad .$$

BEWEIS Wegen

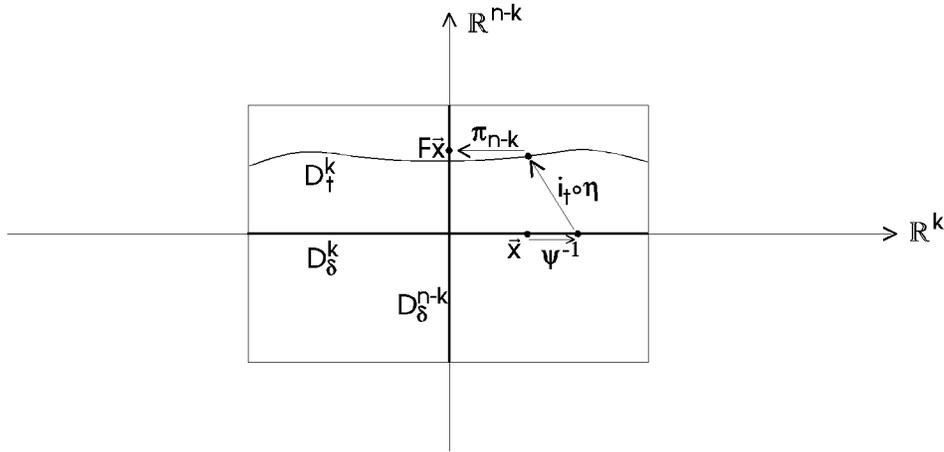
$$\|D(G \circ F)(\vec{x})\| \leq \|DG(F\vec{x})\| \cdot \|DF(\vec{x})\| \quad ,$$

reicht es zu zeigen  $\|DF(\vec{x})\| < L_F$ ,  $L_F \in (0,1)$ ,  $\vec{x} \in D_\delta^k$ , und eine analoge Abschätzung für  $DG(F\vec{x})$ . Es war

$$(3.18) \quad F := \pi_{n-k} \circ (i_t \circ \eta) \circ \psi^{-1} : D_\delta^k \rightarrow D_\delta^{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k} \quad , \text{ also}$$

$$(3.19) \quad DF : TD_\delta^k \rightarrow TD_\delta^{n-k} \quad , \text{ und}$$

$$(3.20) \quad DF(\vec{x}) : \mathbb{R}^k \simeq T_{\vec{x}}D_\delta^k \rightarrow T_{F\vec{x}}D_\delta^{n-k} \simeq \mathbb{R}^{n-k} \quad .$$



Figur 3.8

Mit der Kettenregel ergibt sich

$$(3.21) \quad DF(\vec{x}) = D\pi_{n-k}(i_t \circ \eta \circ \psi^{-1}(\vec{x})) \circ D(i_t \circ \eta)(\psi^{-1}\vec{x}) \circ D\psi^{-1}(\vec{x})$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{n-k,k} & 0_{n-k,n-k} \end{pmatrix}}_{\in \text{Mat}(n-k,n)} \circ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial(i_t \circ \eta)_1}{\partial x_1}(\psi^{-1}\vec{x}) & \dots & \frac{\partial(i_t \circ \eta)_1}{\partial x_k}(\psi^{-1}\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(i_t \circ \eta)_n}{\partial x_1}(\psi^{-1}\vec{x}) & \dots & \frac{\partial(i_t \circ \eta)_n}{\partial x_k}(\psi^{-1}\vec{x}) \end{bmatrix}}_{\in \text{Mat}(n,k)} \circ \underbrace{D\psi^{-1}(\vec{x})}_{\in \text{Mat}(k,k)}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial(i_t \circ \eta)_{k+1}}{\partial x_1}(\psi^{-1}\vec{x}) & \dots & \frac{\partial(i_t \circ \eta)_{k+1}}{\partial x_k}(\psi^{-1}\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(i_t \circ \eta)_n}{\partial x_1}(\psi^{-1}\vec{x}) & \dots & \frac{\partial(i_t \circ \eta)_n}{\partial x_k}(\psi^{-1}\vec{x}) \end{bmatrix}}_{=: B \in \text{Mat}(n-k,k)} \circ \underbrace{D\psi^{-1}(\vec{x})}_{\in \text{Mat}(k,k)} \quad .$$

Aus (3.6) ii) folgt, daß  $B$   $\epsilon$ -nahe bei  $0_{n-k,k}$  ist, denn mit (3.8), (3.9) und (3.10) ergibt sich

$$(3.22) \quad \left\| \begin{bmatrix} k,k \\ 0_{n-k,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D\psi(\vec{x}) \\ B \end{bmatrix} \right\| < \epsilon \Rightarrow \|B\| < \epsilon \text{ und } \|D\psi(\vec{x}) - \begin{bmatrix} k,k \\ 0_{n-k,k} \end{bmatrix}\| < \epsilon .$$

Aus (1.1.10) wissen wir  $D\psi^{-1}(\vec{x}) = [D\psi(\vec{x})]^{-1}$ .  $D\psi(\vec{x}):\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  ist ein linearer Operator, wir schreiben ihn als  $D\psi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} k,k \\ 0_{n-k,k} \end{bmatrix} + A$  mit

$$(3.23) \quad \|A\| = \|D\psi(\vec{x}) - \begin{bmatrix} k,k \\ 0_{n-k,k} \end{bmatrix}\| < \epsilon < \frac{1}{\| \begin{bmatrix} k,k \\ 0_{n-k,k} \end{bmatrix} \|} = 1 \quad , \text{ da } \epsilon \in (0, 1) .$$

Es gilt nach [Ka, Kap. 1.4, (4.24)]:

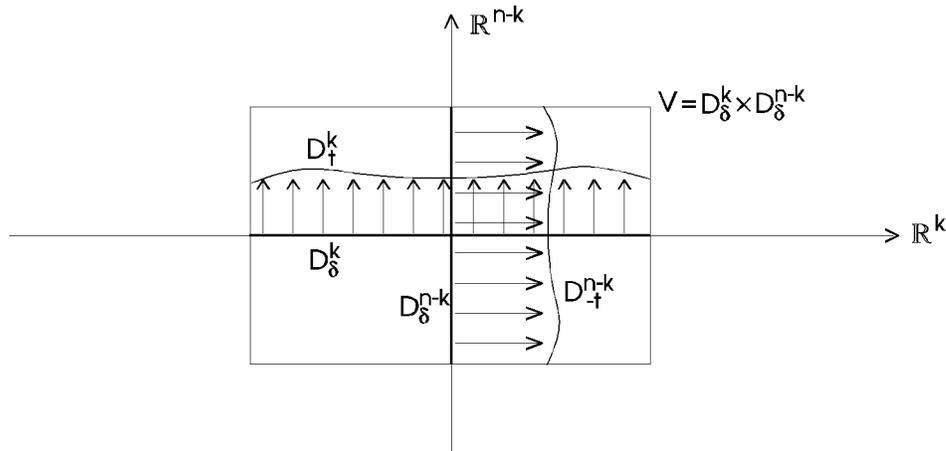
$$(3.24) \quad \|[D\psi(\vec{x})]^{-1}\| \leq \frac{\| \begin{bmatrix} k,k \\ 0_{n-k,k} \end{bmatrix} \|}{1 - \|A\| \cdot \| \begin{bmatrix} k,k \\ 0_{n-k,k} \end{bmatrix} \|} = \frac{1}{1 - \|A\|} \stackrel{(3.23)}{<} \frac{1}{1 - \epsilon} < 1 \quad , \text{ da } \epsilon \in (0, 1) .$$

Damit folgt

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \|DF(\vec{x})\| &= \|B \circ D\psi^{-1}(\vec{x})\| \leq \|B\| \cdot \|D\psi^{-1}(\vec{x})\| \\ &= \|B\| \cdot \|[D\psi(\vec{x})]^{-1}\| < \epsilon \cdot 1 = \epsilon =: L_F < 1 \quad , \forall \vec{x} \in D_\delta^k . \end{aligned}$$

Für  $\|DG(F\vec{x})\|$  gilt eine analoge Abschätzung. □

Eine **differentialtopologische Begründung** für die Existenz eines Schnittpunktes von  $D_t^k$  und  $D_{-t}^{n-k}$  soll im folgenden skizziert werden. Wir gehen von einer Situation wie in Figur 3.9 aus.



Figur 3.9

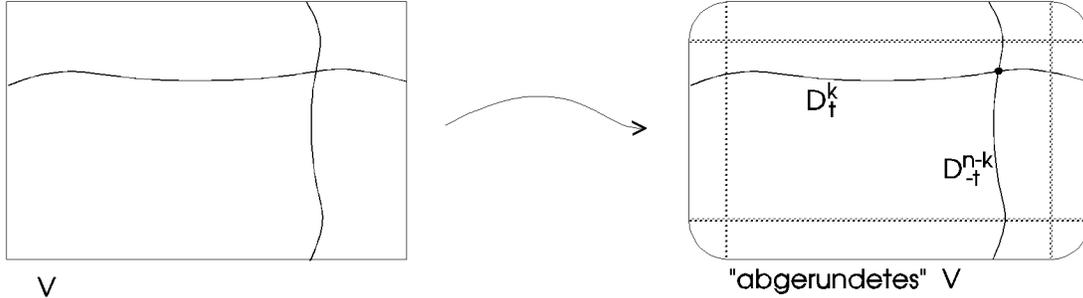
Da wir  $D_t^k$  und  $D_{-t}^{n-k}$  für hinreichend großes  $t \in \mathbb{R}$  als Graphen darstellen können, sind  $D_t^k$  bzw.  $D_{-t}^{n-k}$  homotop zu  $D_\delta^k$  bzw.  $D_\delta^{n-k}$ . Die Homotopien  $H^k: I \times D_\delta^k \rightarrow V$  und  $H^{n-k}: I \times D_\delta^{n-k} \rightarrow V$  können explizit angegeben werden:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} H^k(t, \vec{x}) &:= (\vec{x}, t \cdot F\vec{x}) \quad , \\ H^{n-k}(t, \vec{y}) &:= (t \cdot G\vec{y}, \vec{y}) \quad . \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen sind wie vorher,  $I := [0, 1]$ . Offensichtlich ist

$$(3.27) \quad \begin{aligned} H^k(0, D_\delta^k) &= (D_\delta^k, 0) \quad , \\ H^k(1, D_\delta^k) &= (D_\delta^k, F(D_\delta^k)) = D_t^k \quad , \end{aligned}$$

und der Rand von  $D_\delta^k$  ist während der Homotopie in  $\partial V$  enthalten, siehe Figur 3.9. Analoges gilt für  $H^{n-k}$ . Nun ist  $V$  als Produkt zweier berandeter Mannigfaltigkeiten selbst leider keine berandete Mannigfaltigkeit im Sinne von [H]. Wir können dies jedoch beheben, indem wir die "Ecken" von  $\partial V$  abrunden. Aufgrund, sowohl des G-H-Thm. 2.4, als auch der Gleichungen (3.6), können wir oBdA davon ausgehen, daß ein etwaiger Schnittpunkt von  $D_t^k$  und  $D_{-t}^{n-k}$  nicht im Bereich dieser Ecken liegen kann.



Figur 3.10

Eine Untermannigfaltigkeit  $A^a$  von  $N^n$  heißt **nett**, falls gilt

- (3.28)
- i)  $\partial A = A \cap \partial N$
  - ii)  $A$  wird durch Karten  $(\varphi, U)$  von  $N$  überdeckt, so daß  $A \cap U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^a)$ .

$D_\delta^k$  und  $D_\delta^{n-k}$  sind offenbar nette Untermannigfaltigkeiten von  $V$ . Jetzt brauchen wir den Begriff der **Schnittzahl**  $\#(A, B)$  zweier sich transversal schneidender netter Untermannigfaltigkeiten einer Mannigfaltigkeit  $W$  (insbesondere muß gelten  $\dim A + \dim B = \dim W$ ). [H, Kap. 5, Thm. 2.1] besagt, daß homotope Untermannigfaltigkeiten  $A$  und  $A'$  von  $W$ , welche transversal zu einer Untermannigfaltigkeit  $B$  von  $W$  sind, gleiche Schnittzahl haben, d.h.

$$(3.29) \quad \#(A, N) = \#(A', N) \quad .$$

Bei berandeten Mannigfaltigkeiten müssen wir mit den Rändern aufpassen. Es muß gelten (gleich für unseren Fall)

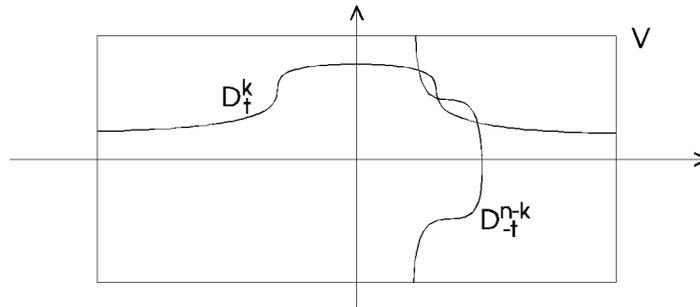
- (3.30)
- i)  $\partial D_\delta^k \subset \partial V - \partial D_\delta^{n-k}$
  - ii)  $H(t, \partial D_\delta^k) \subset \partial V - \partial D_\delta^{n-k} \quad , \forall t \in I \quad .$

i) besagt, daß die Ränder von  $D_\delta^k$  und  $D_\delta^{n-k}$  disjunkt in  $\partial V$  sein müssen. ii) heißt, daß sich die Ränder während der Homotopie nicht treffen dürfen. Diese Bedingungen sind hier erfüllt, deswegen gilt

$$(3.31) \quad \begin{aligned} 1 &= \#(D_\delta^k, D_\delta^{n-k}) && , \text{ offensichtlich} \\ &= \#(D_t^k, D_\delta^{n-k}) && , D_\delta^k \sim D_t^k \\ &= \#(D_t^k, D_{-t}^{n-k}) && , D_\delta^{n-k} \sim D_{-t}^{n-k} . \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, daß der Schnitt von  $D_\delta^k$  und  $D_\delta^{n-k}$ , sowie von  $D_t^k$  und  $D_\delta^{n-k}$ , nach Konstruktion bereits transversal ist. Der Schnitt von  $D_t^k$  und  $D_{-t}^{n-k}$  kann aufgrund des Transversalitäts-Theorems [H, Kap. 3, Thm. 2.1] oBdA als transversal angenommen werden (sonst muß eben  $t$  "ein wenig" variiert werden).

Aus  $\#(D_t^k, D_{-t}^{n-k}) = 1$  folgt bis jetzt die Existenz, sowie die ungerade Anzahl von Schnittpunkten. Jetzt müssten wir wieder  $\|DF(\vec{x})\|$  und  $\|DG(\vec{y})\|$  nach oben durch 1 abschätzen, um folgendes auszuschließen :



Figur 3.11

### DIE GLUEING-ABBILDUNG

Wir wollen jetzt die **Glueingabbildung**  $\hat{\#}$  definieren. Es seien hierzu  $x, y, z \in \text{Crit } f$  mit  $\text{Ind}_f(x) = \text{Ind}_f(y) + 1 = \text{Ind}_f(z) + 2 = k + 1$  fest gewählt,  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Weiter sei  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x,y} \times \hat{M}_{y,z}$  fest gewählt. Lemma 3.4 besagte:  $\forall \epsilon \in (0, 1) \exists T_0 \in \mathbb{R} \forall t > T_0 : D_t^k$  und  $D_t^{n-k}$  besitzen einen eindeutigen Schnittpunkt  $p_t$ , welcher stetig differenzierbar von  $t$  abhängt.

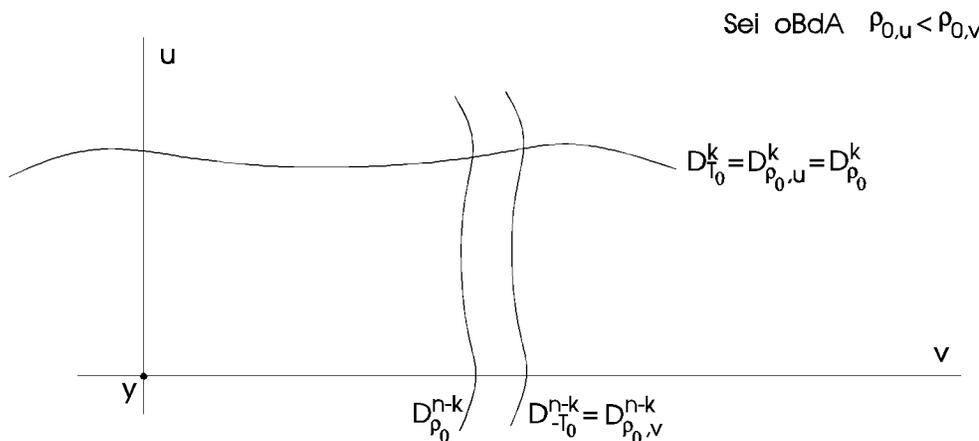
Wir wollen nun die Größe  $t$  durch eine neue Größe  $\rho$  ersetzen. Es ist  $\phi_{T_0} \tilde{q}_x$  der einzige Punkt von  $u = \mathcal{O}(\hat{u})$ , der den Funktionswert  $f(\phi_{T_0} \tilde{q}_x)$  besitzt (Kor. 1.3.5). Wir können also jedem  $q \in u$  eineindeutig den Parameter  $\rho(q) := |f(q) - f(y)|$  zuordnen, ebenso für  $q \in v$ . Für gegebenes  $\rho \in \mathbb{R}^+$  erhalten wir ein eindeutiges  $q \in u$  ( $q \in v$ ) zurück, indem wir definieren  $q := f^{-1}(f(y) \pm \rho) \cap u$  ( $v$ ). Seien nun

$$(3.32) \quad \rho_{\theta,u} := |f(\phi_{T_0} \tilde{q}_x) - f(y)| \quad , \quad \rho_{\theta,v} := |f(\phi_{-T_0} \tilde{q}_z) - f(y)|$$

und

$$(3.33) \quad \rho_0 := \min(\rho_{\theta,u}, \rho_{\theta,v}) \quad .$$

In den Bezeichnungen  $D_t^k$  und  $D_t^{n-k}$  ersetzen wir nun ebenfalls  $t$  durch  $\rho$  und erhalten  $D_\rho^k$  und  $D_\rho^{n-k}$ .  $\rho$  heißt **Glueing-Parameter**.



Figur 3.12

Lemma 3.4 lautet jetzt:  $\forall \epsilon \in (0, 1) \exists \rho_0 \in \mathbb{R}^+ \forall \rho \in (0, \rho_0) : D_\rho^k$  und  $D_\rho^{n-k}$  besitzen einen eindeutigen Schnittpunkt  $p_\rho$ , welcher stetig differenzierbar von  $\rho$  abhängt.

Jetzt definieren wir

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \cdot \hat{\#} \cdot \cdot : \hat{M}_{x,y} \times (0, \hat{\rho}_0) \times \hat{M}_{y,z} &\rightarrow \hat{M}_{x,z} \\ (\hat{u}, \rho, \hat{v}) &\mapsto \hat{u} \hat{\#}_\rho \hat{v} := \pi_a \circ p_\rho \end{aligned} \quad ,$$

wobei  $p_\rho$  den eindeutigen Schnittpunkt von  $D_\rho^k$  und  $D_\rho^{n-k}$  bezeichnet und

$$(3.35) \quad \hat{\rho}_0 := \min \{ \rho_0(\hat{u}, \hat{v}) \mid (\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x,y} \times \hat{M}_{y,z}, x, y, z \in \text{Crit } f \text{ (um 1 abnehmende Indizes)} \} .$$

$\pi_a : M_{x,z} \rightarrow \hat{M}_{x,z}$  sei die natürliche Projektion von  $M_{x,z}$  auf den Orbitraum  $\hat{M}_{x,z} := M_{x,z} \cap f^{-1}(a)$ ,  $a \in (f(z), f(x))$  regulärer Wert von  $f$ . Für  $p \in M_{x,z}$  gilt:

$$(3.36) \quad \text{Ker } D\pi_a(p) = \mathbb{R} \cdot \nabla f(p) \quad ,$$

denn wenn  $p$  längs eines Orbits variiert wird, liefert  $\pi_a$  jeweils dasselbe Element in  $\hat{M}_{x,z}$ , also ist  $D\pi_a(p)(\nabla f(p)) = 0$ .

**Lemma 3.6** Seien  $x, y, z \in \text{Crit } f$  mit  $\text{Ind}_f(x) = \text{Ind}_f(y) + 1 = \text{Ind}_f(z) + 2 = k + 1$ ,  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Dann ist  $\cdot \# \cdot : \hat{M}_{x,y} \times (0, \hat{\rho}_0) \times \hat{M}_{y,z} \rightarrow \hat{M}_{x,z}$  eine Einbettung.

BEWEIS Da die Zusammenhangskomponenten von  $\hat{M}_{x,y}$  und  $\hat{M}_{y,z}$  aus diskreten Punkten bestehen, genügt es zu zeigen: Für festes  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x,y} \times \hat{M}_{y,z}$  ist  $\hat{u} \# \cdot \hat{v} : (0, \hat{\rho}_0) \rightarrow \hat{M}_{x,z}$  eine Einbettung, d.h.

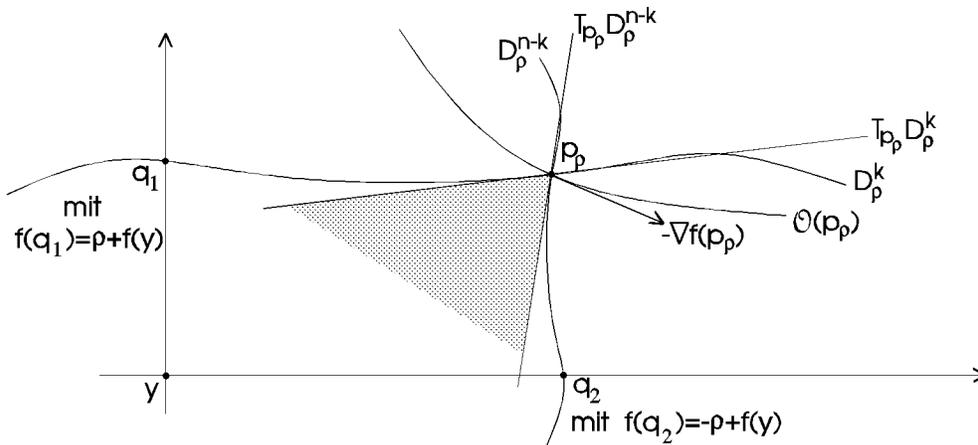
i)  $D(\hat{u} \# \cdot \hat{v})(\rho) : T_\rho(0, \hat{\rho}_0) \simeq \mathbb{R} \rightarrow T_{\hat{u} \# \rho \hat{v}} \hat{M}_{x,z} \simeq \mathbb{R}$  ist  $\forall \rho \in (0, \hat{\rho}_0)$  injektiv und

ii)  $\hat{u} \# \cdot \hat{v}$  ist ein Homöomorphismus auf sein Bild.

i) Sei  $\frac{\partial}{\partial \rho}$  der kanonische Basisvektor von  $T_\rho(0, \hat{\rho}_0) \simeq \mathbb{R}$ . Es ist zu zeigen:  $D(\hat{u} \# \cdot \hat{v})(\rho)(c \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}) = 0 \Rightarrow c = 0 \in \mathbb{R}$ .

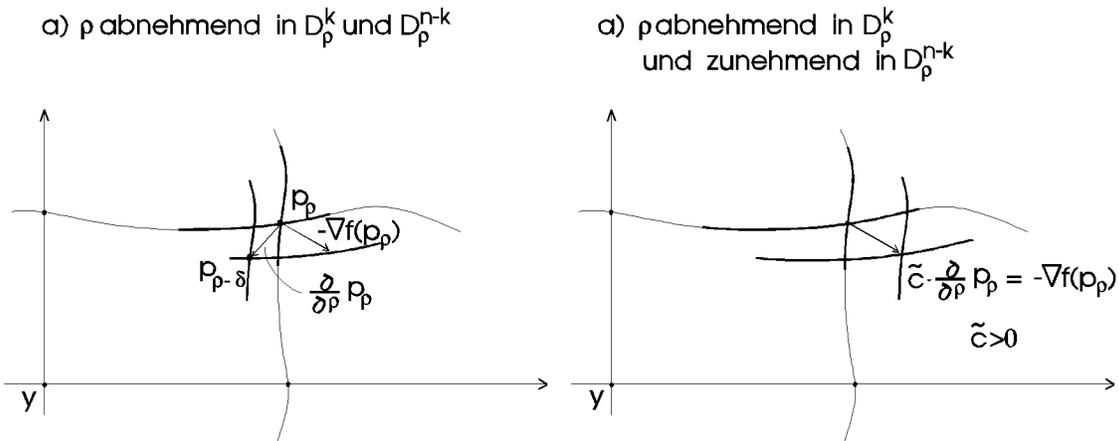
$$(3.37) \quad \begin{aligned} D(\hat{u} \# \cdot \hat{v})(\rho)(c \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}) &= c \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\hat{u} \#_\rho \hat{v}) \\ &= c \cdot (D\pi_a(p_\rho) \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} p_\rho) \\ &\stackrel{!}{=} 0 \quad . \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen:  $(\frac{\partial}{\partial \rho} p_\rho) \notin \text{Ker } D\pi_a(p_\rho)$ ,  $\forall \rho \in (0, \hat{\rho}_0)$ . Dazu müssen wir die  $\rho$ -Abhängigkeit von  $p_\rho$  genauer betrachten:



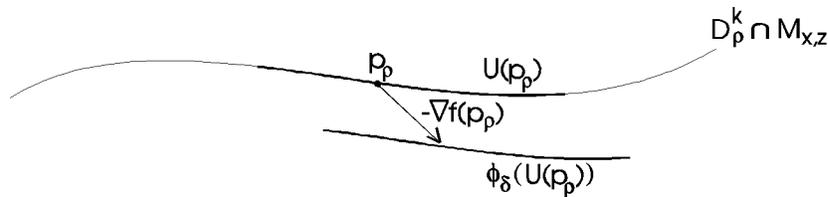
Figur 3.13

Wir wissen, daß  $-\nabla f(p_\rho)$  in  $M_{x,z}$  transversal zu  $D_\rho^k \cap M_{x,z}$ , als auch zu  $D_\rho^{n-k} \cap M_{x,z}$  ist. Da  $\dim M_{x,z} = 2$  ist, können wir im folgenden von der Anschauung Gebrauch machen. Mit abnehmendem  $\rho$  wird eine kleine Umgebung von  $p_\rho$  in  $D_\rho^k \cap M_{x,z}$  in Richtung von  $-\nabla f(p_\rho)$  verschoben, liegt also insbesondere auf einer (in Figur 3.13 der unteren) Seite von  $D_\rho^k$ . Eine kleine Umgebung von  $p_\rho$  in  $D_\rho^{n-k} \cap M_{x,z}$  wird mit abnehmendem  $\rho$  in Richtung von  $\nabla f(p_\rho)$  verschoben, liegt also ebenfalls auf einer (in Figur 3.13 der linken) Seite von  $D_\rho^{n-k}$ . Also zeigt der Vektor  $-\frac{\partial}{\partial \rho} p_\rho$  in den gestrichelten Bereich, ist also insbesondere linear unabhängig von  $-\nabla f(p_\rho)$ . Um von  $-\nabla f(p_\rho)$  linear abhängig zu werden, müssten wir abnehmendes  $\rho$  in  $D_\rho^k$  und zunehmendes  $\rho$  in  $D_\rho^{n-k}$  zulassen:



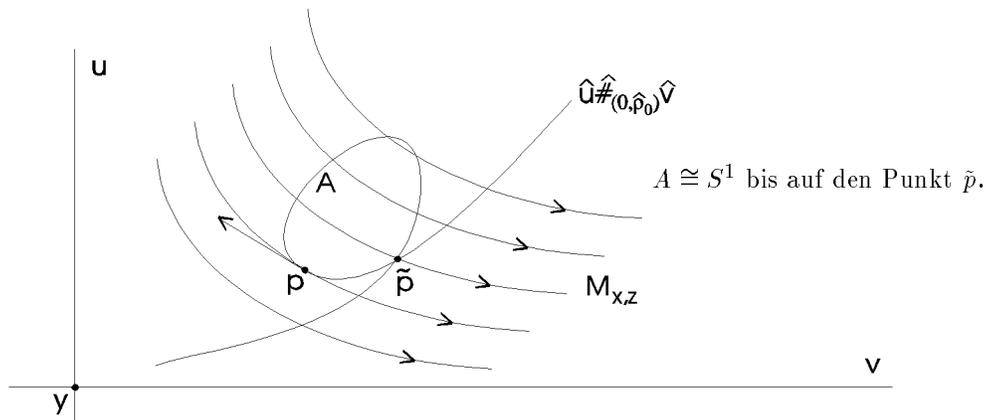
Figur 3.14

In dem uns hier interessierenden Fall a) gilt also für  $\frac{\partial}{\partial \rho} p_\rho \neq 0$ :  $\frac{\partial}{\partial \rho} p_\rho \notin \text{Ker } D\pi_a(p_\rho)$ .  $\frac{\partial}{\partial \rho} p_\rho = 0$  kann aber nicht gelten, denn sei  $U(p_\rho)$  eine kleine Umgebung von  $p_\rho$  in  $D_\rho^k \cap M_{x,z}$ , dann ist  $U(p_\rho)$  transversal zu  $\phi_\delta(U(p_\rho))$  für jedes  $\delta > 0$  hinreichend klein. Der neue Schnittpunkt liegt also nicht mehr in  $U(p_\rho)$ , kann also insbesondere nicht gleich  $p_\rho$  sein. Also gilt  $\frac{\partial}{\partial \rho} p_\rho \neq 0, \forall \rho \in \rho(0, \hat{\rho}_0)$ .



Figur 3.15

ii) Zunächst können keine Selbstüberschneidungen auftreten :

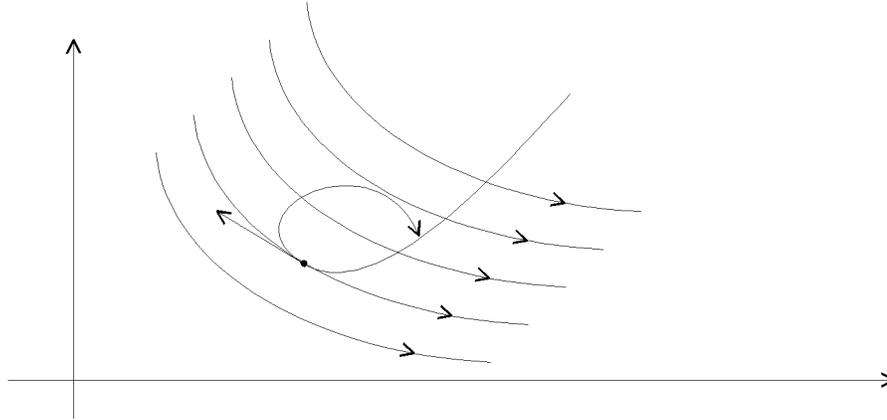


Figur 3.16

Bei einer Selbstüberschneidung würden wir mindestens einen Punkt  $p \in \hat{u} \#_{(0, \hat{\rho}_0)} \hat{v}$  finden, an dem gilt:  $\frac{\partial}{\partial \rho} (\hat{u} \#_{\rho} \hat{v}) = c \cdot \nabla f(p)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  geeignet, was ein Widerspruch zu i) wäre. Die Existenz so eines Punktes

folgt daraus, daß die Kurve  $\hat{u} \#_{(0,\hat{\rho}_0)} \hat{v}$  Bereiche von  $M_{x,z}$  einschließt, welche bis auf isolierte Punkte diffeomorph zu  $S^1$  sind.

Dieselbe Argumentation schließt aus, daß so etwas auftritt :



Figur 3.17

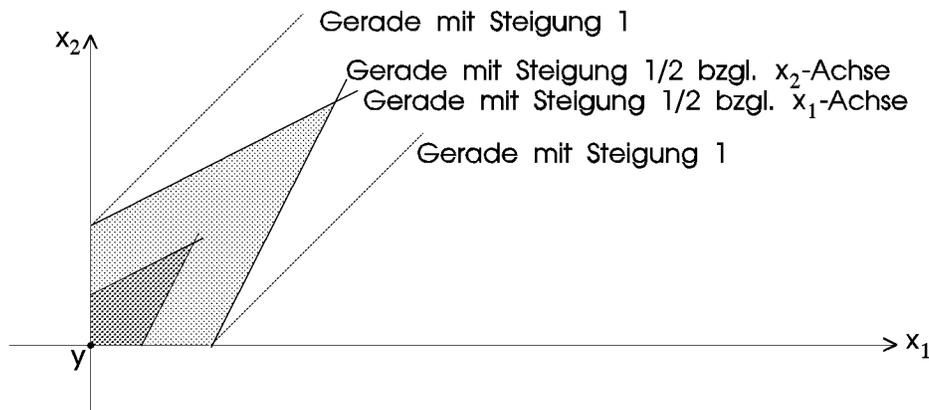
□

**Lemma 3.7** Seien  $x, y, z \in \text{Crit } f$  mit  $\text{Ind}_f(x) = \text{Ind}_f(y) + 1 = \text{Ind}_f(z) + 2 = k + 1$ ,  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ . Seien  $\hat{u} \in \hat{M}_{x,y}$  und  $\hat{v} \in \hat{M}_{y,z}$ , dann gilt:

$$p_\rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} y \quad .$$

D.h.  $\hat{u} \#_{(0,\hat{\rho}_0)} \hat{v} \in \hat{M}_{x,z}$  ist kompakt bis auf den 1-fach gebrochenen Orbit  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x,y} \times \hat{M}_{y,z}$ .

BEWEIS OBdA betrachten wir das (2-dimensionale) Problem wieder in der Ebene. Da  $\epsilon \in (0, 1)$  gewählt war, wissen wir, daß die Steigung des Graphen von  $D_\rho^k \cap M_{x,z}$  an jeder Stelle  $\leq \epsilon < 1$  ist. Wir nehmen oBdA an  $\epsilon = \frac{1}{2}$ .



Figur 3.18

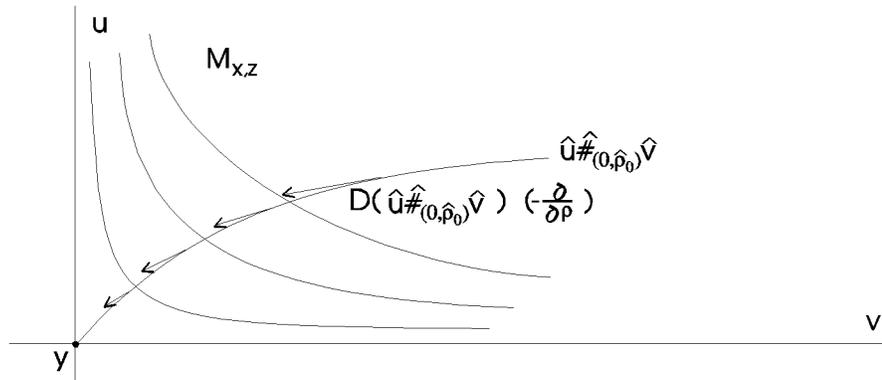
Für  $\epsilon = \frac{1}{2}$  sind obige zwei Geraden mit Steigung  $\frac{1}{2}$  gerade der "worst case" für  $D_\rho^k$  bzw.  $D_\rho^{n-k}$ . Der Schnittpunkt ist also im schraffierten Bereich zu finden. Dieser schrumpft nun für  $\rho \rightarrow 0$  auf  $y$  zusammen. Wir finden daher für jedes  $\tau > 0$  ein  $R \in (0, \hat{\rho}_0)$ , so daß für alle  $\rho \in (0, R)$  gilt:  $p_\rho = D_\rho^k \cap D_\rho^{n-k} \in U_\tau(y)$ . D.h.  $p_\rho \rightarrow y$  für  $\rho \rightarrow 0$ .

Wir betrachten jetzt die Folge  $\{\hat{u} \#_{1/n} \hat{v}\}_n$  mit  $N := 1/\hat{\rho}_0$ , diese konvergiert gegen einen Punkt auf  $\mathcal{O}(\hat{u}, \hat{v})$  mit dem regulären Wert  $a$ . Analog wie im Beweis von Thm. 2.1, zeigen wir nun

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists I \in \mathbb{N} \quad \forall i > I : \mathcal{O}(\hat{u} \#_{1/i} \hat{v}) \subset U_\epsilon(\overline{\mathcal{O}(\hat{u}) \cup \mathcal{O}(\hat{v})}) \quad .$$

□

Die Aussagen von Lemma 3.6 und Lemma 3.7 können wir uns durch folgende Skizze veranschaulichen :



Figur 3.19

## Kapitel 3

# Konstruktion des Morse-Witten Komplex

In diesem Kapitel soll der Morse-Witten Komplex definiert werden. Um zu zeigen, daß er wohldefiniert und ein algebraischer Kettenkomplex ist, werden wir die Resultate der Abschnitte 2.2 "Kompaktheit" und 2.3 "Glueing" verwenden.

In Abschnitt 3.1 "ORIENTIERUNG VON VEKTORRÄUMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN" definieren wir zunächst diese Begriffe. Es stellt sich heraus, daß die instabilen Mannigfaltigkeiten  $W^u(x)$ ,  $x \in \text{Crit} f$ , zusammenziehbar, also einfach zusammenhängend und damit orientierbar sind, und zwar unabhängig davon ob  $M$  orientierbar ist. Über die Orientierbarkeit von  $M$  setzen wir nichts voraus. Anschließend ordnen wir, ausgehend von Orientierungen  $[x]$  und  $[y]$  von  $T_x W^u(x)$  bzw.  $T_y W^u(y)$ , jedem isolierten Orbit  $\hat{u} \in \hat{M}_{x,y}$  ein charakteristisches Vorzeichen  $n_u \in \{\pm 1\}$  zu. Im Falle von cobordanten (siehe S. 76) 1-fach gebrochenen Orbits  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  und  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2)$  erhalten wir

$$n_{u_1} \cdot n_{v_1} = -n_{u_2} \cdot n_{v_2} \quad .$$

In Abschnitt 3.2 "DER RANDOPERATOR" konstruieren wir den Morse-Witten Komplex und zeigen, daß er ein algebraischer Kettenkomplex ist, d.h. daß für den kanonischen Randoperator  $\partial_k$  gilt:  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  (Thm 2.1). Wir definieren die Kettengruppen  $C_k(f, \sigma)$  als von den kritischen Punkten  $x \in \text{Crit} f$  zusammen mit einer Orientierung  $[x]$  von  $T_x W^u(x)$  frei abelsch erzeugten (unendlich zyklischen) Gruppen.  $n(x, y)$  sei die Summe der charakteristischen Vorzeichen der isolierten Orbits von  $x \in \text{Crit}_k f$  nach  $y \in \text{Crit}_{k-1} f$ , dann ist der kanonische Randoperator definiert als folgender auf den Erzeugern von  $C_k(f, \sigma)$  gegebener Gruppenhomomorphismus

$$\partial_k[x] := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1} f} n(x, y) [y] \quad .$$

Nun können wir Homologiegruppen definieren

$$H_k(f, g, \sigma) := \frac{\text{Ker } \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}} \quad .$$

Für verschiedene Morse-Funktionen  $f$ , Riemannsche Metriken  $g$  und Orientierungswahlen  $\sigma$  lassen sich Isomorphismen zwischen den entsprechenden Homologiegruppen angeben (siehe [Sa2], [Po], [Sch]). Auf diese soll hier nicht näher eingegangen werden.

Um  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  zu zeigen, führen wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $\hat{O}_{x,z}^1$  von 1-fach gebrochenen Orbits zwischen  $x \in \text{Crit}_k$  und  $z \in \text{Crit}_{k-2} f$  ein. Es stellt sich heraus, daß jede Äquivalenzklasse  $[(\hat{u}, \hat{v})]$  aus genau zwei verschiedenen Repräsentanten  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \neq (\hat{u}_2, \hat{v}_2)$  besteht. In der Summe, auf welche die Berechnung von  $\partial_{k-1} \circ \partial_k[x]$  führt, addieren sich nun (wegen  $n_{u_1} \cdot n_{v_1} = -n_{u_2} \cdot n_{v_2}$ ) je zwei Summanden zu Null.

Zum Schluß diskutieren wir noch kurz den Fall von Koeffizienten aus  $\mathbb{Z}_2$ , sowie die verschiedenen Typen der Zusammenhangskomponenten von  $M_{x,z}$  im Fall der Indexdifferenz 2 von  $x$  und  $z$ .

### 3.1 Orientierung

Im ersten Teil "ORIENTIERUNG VON VEKTORRÄUMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN" werden wir diese Begriffe einführen und diskutieren.

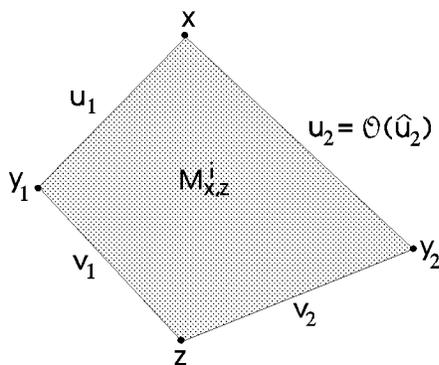
Im zweiten Teil "DIE CHARAKTERISTISCHEN VORZEICHEN" gehen wir wieder von unserer geschlossenen glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M^n$  aus. Wir wollen betonen, daß **keine Orientierbarkeitsannahmen für  $M$**  gemacht werden. Ausgehend von einer willkürlichen Orientierung  $\sigma$  aller instabilen Mannigfaltigkeiten  $W^u(x)$ ,  $x \in Crit f$ , werden wir den isolierten Orbits  $u_i = \mathcal{O}(\hat{u}_i)$ ,  $\hat{u}_i \in \hat{M}_{x,y}$ ,  $x, y \in Crit f$  mit  $Ind_f(x) - Ind_f(y) = 1$ ,  $i \in \{1, \dots, \#\hat{M}_{x,y}\}$ , charakteristische Vorzeichen  $n_{u_i} \in \{\pm 1\}$  zuordnen.

Im dritten Teil "DER FALL  $Ind_f(x) - Ind_f(z) = 2$ " betrachten wir eine (2-dimensionale) Zusammenhangskomponente  $M_{x,z}^i$  von  $M_{x,z}$ , von der wir annehmen, daß  $(\hat{u}_j, \hat{v}_j) \in \hat{M}_{x,y_j} \times \hat{M}_{y_j,z}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , existieren mit

$$\{x, y_1, y_2, z\} \cup \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{O}(\hat{u}_j) \cup \mathcal{O}(\hat{v}_j) = \partial M_{x,z}^i \quad \text{und} \quad (\hat{u}_1, \hat{v}_1) \neq (\hat{u}_2, \hat{v}_2).$$

Aus Abschnitt 2.2 wissen wir, daß dann für  $y_j \in Crit f$  gelten muß:

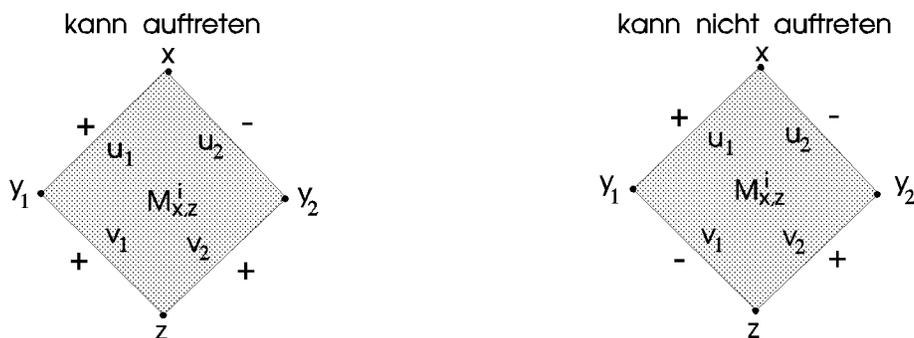
$$Ind_f(x) - Ind_f(y_j) = 1 \quad , \quad j \in \{1, 2\} \quad .$$



Figur 1.1 Typische Gestalt von  $M_{x,z}^i$  im Fall  $Ind_f(x) - Ind_f(z) = 2$ .

Zum Schluß leiten wir das im nächsten Abschnitt äußerst wichtige Resultat ab, daß gilt (siehe Figur 1.2):

$$(1.1) \quad n_{u_1} \cdot n_{v_1} = -n_{u_2} \cdot n_{v_2} \quad .$$



Figur 1.2 Beispiel für eine mögliche und eine unmögliche Kombination der charakteristischen Vorzeichen.

## ORIENTIERUNG VON VEKTORRÄUMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Zuerst also wollen wir definieren, was eine Orientierung eines Vektorraumes bzw. einer Mannigfaltigkeit ist. Wir orientieren uns hierbei an [H, Kap. 4.4]. Sei  $V$  ein (reeller) Vektorraum der Dimension  $n > 0$ . Zwei Basen  $\{r_1, \dots, r_n\}, \{s_1, \dots, s_n\}$  heißen **äquivalent**, falls für die lineare Abbildung

$$(1.2) \quad \begin{aligned} A : V &\rightarrow V \\ r_i &\mapsto Ar_i := s_i \quad , \end{aligned}$$

gilt

$$(1.3) \quad \det A > 0 \quad .$$

Eine **Orientierung von  $V$**  ist nun eine Äquivalenzklasse  $[r_1, \dots, r_n]$  von Basen. Im Fall  $\dim V > 0$  gibt es genau zwei Orientierungen, wir bezeichnen sie mit  $\omega$  und  $-\omega$ .

Sei  $L : V \rightarrow W$  ein Vektorraum-Isomorphismus und  $\omega = [r_1, \dots, r_n]$  eine Orientierung von  $V$ , dann heißt  $\mathbf{L}(\omega) := [Lr_1, \dots, Lr_n]$  die durch  $L$  auf  $W$  **induzierte Orientierung** (da  $L$  ein Isomorphismus ist, bildet  $\{Lr_1, \dots, Lr_n\}$  eine Basis von  $W$  und die Definition macht Sinn).

Im Fall  $\dim V = 0$  wollen wir unter einer Orientierung von  $V$  ein Element aus  $\{+1, -1\}$  verstehen.

Unter einem **orientierten Vektorraum** verstehen wir ein Tupel  $(V, \omega)$ , wobei  $\omega$  eine Orientierung von  $V$  ist. Für gegebenes  $(V, \omega)$  und  $(V', \omega')$  heißt ein Isomorphismus  $L : V \rightarrow V'$  **orientierungserhaltend**, falls  $L(\omega) = \omega'$ ; ansonsten heißt  $L$  **orientierungsumkehrend**.

Unter der **Standardorientierung des  $\mathbb{R}^n$** ,  $n > 0$ , verstehen wir die Orientierung  $\omega^n := [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]$ , wobei  $\epsilon_i$  den  $i$ -ten kanonischen Einheitsvektor bezeichnet. Die Standardorientierung des  $\mathbb{R}^0$  sei  $+1$ .

Nun betrachten wir eine **exakte Sequenz** von Vektorräumen der Form

$$(1.4) \quad 0 \rightarrow E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E'' \rightarrow 0 \quad ,$$

d.h. alle Abbildungen sind linear und der Kern einer Abbildung ist genau das Bild der vorhergehenden Abbildung. Die spezielle exakte Sequenz (1.4) heißt **kurze exakte Sequenz** und es gilt:  $\varphi$  ist injektiv und  $\psi$  surjektiv.

Sei nun  $\omega' = [r_1, \dots, r_m]$  bzw.  $\omega'' = [s_1, \dots, s_n]$  eine Orientierung von  $E'$  bzw.  $E''$ , dann ist durch

$$(1.5) \quad \omega := [\varphi r_1, \dots, \varphi r_m, g_1, \dots, g_n] \quad , \text{ mit } \psi g_i = s_i \quad , \quad i = \{1, \dots, n\} \quad ,$$

eine Orientierung von  $E$  gegeben; diese ist unabhängig von der Wahl der  $g_i$  [H, Kap. 4.4].

Je zwei der drei Orientierungen  $\omega', \omega, \omega''$  legen die dritte eindeutig fest. Wir drücken dies durch folgende Notationen aus:

$$(1.6) \quad \omega = \omega' \oplus \omega'' \quad , \quad \omega' = \omega / \omega'' \quad \text{ und } \quad \omega'' = \omega / \omega' \quad .$$

Sei nun  $N^n$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.  $N$  heißt **orientierbar**, falls ein Atlas von  $N$  existiert, so daß jeder Kartenwechsel an jedem Punkt eine positive Jacobi-Determinante besitzt. Ein maximaler solcher Atlas heißt **orientierte differenzierbare Struktur**. Ist  $N$  zusammenhängend, so besitzt  $N$  genau zwei Orientierungen  $\omega$  und  $-\omega$ . Eine Orientierung  $\omega$  ist durch eine Orientierung  $\omega_p$  eines Tangentialraumes  $T_p N$ ,  $p \in N$ , bereits eindeutig festgelegt:

Seien  $(\varphi_i, U_i), (\varphi_j, U_j)$  Karten von  $N$  mit  $p \in U_i \cap U_j$  und  $\omega_p$  sei eine Orientierung von  $T_p N$ . Da  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $D\varphi_i(q) : T_q U_i = T_q N \rightarrow \mathbb{R}^n$  für alle  $q \in U_i$  ein Isomorphismus, dieser hängt stetig von  $q$  ab. Sei  $\tilde{\omega}$  eine Orientierung des  $\mathbb{R}^n$ , so daß gilt  $D\varphi_i(q)(\omega_p) = \tilde{\omega}$ . Wir nehmen oBdA an  $\det D\varphi_i(p) > 0$ . Da  $\det : \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls eine stetige Funktion ist, ist für alle  $q \in U_i$   $\det D\varphi_i(q) > 0$ . Nehmen wir an dies wäre nicht so, d.h. es gäbe ein  $\tilde{q} \in U_i$  mit  $\det D\varphi_i(\tilde{q}) < 0$ , so würden wir auf jedem Weg von  $q$  nach  $\tilde{q}$  einen Punkt  $q_0$  finden mit  $\det D\varphi_i(q_0) = 0$  (wegen der Stetigkeit von  $\det D\varphi_i(\cdot)$ ), dies wäre ein Widerspruch. Also induziert die Orientierung  $\tilde{\omega}$  von  $\mathbb{R}^n$  für alle  $q \in U_i$  dieselbe Orientierung  $D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(q))(\tilde{\omega})$  auf  $T_q N$ , d.h.

$$(1.7) \quad D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(q))(\tilde{\omega}) = D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(\tilde{q}))(\tilde{\omega}) \quad , \quad \forall q, \tilde{q} \in U_i \quad .$$

Wir sehen dies folgendermaßen ein: Ein Isomorphismus von  $T_q N \rightarrow T_{\tilde{q}} N$  ist gegeben durch

$$D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(\tilde{q})) \circ D\varphi_i(q) : T_q N \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} T_{\tilde{q}} N \quad .$$

Es gilt

$$\text{Det} (D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(\tilde{q})) \circ D\varphi_i(q)) = \underbrace{\text{Det} D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(\tilde{q}))}_{>0} \cdot \underbrace{\text{Det} D\varphi_i(q)}_{>0} > 0 \quad ,$$

d.h. dieser Isomorphismus ist orientierungserhaltend. Weiter ist

$$\begin{aligned} D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(\tilde{q})) \circ \underbrace{D\varphi_i(q) (D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(q)) (\tilde{\omega}))}_{=, \text{ siehe (1.1.10)}} &= D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(\tilde{q})) (\tilde{\omega}) \quad , \\ &= \quad , \text{ siehe (1.1.10)} \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Sei nun  $q \in U_i \cap U_j$ , da nach Voraussetzung gilt

$$0 < \text{Det} D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(q)) = \text{Det} D\varphi_j(q) \cdot \underbrace{\text{Det} D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(q))}_{>0} \quad ,$$

ist auch  $\text{Det} D\varphi_j(q) > 0$ . Wie oben folgern wir nun  $\text{Det} D\varphi_j(q) > 0$  für alle  $q \in U_j$ , damit induziert die Orientierung  $\tilde{\omega}$  von  $\mathbb{R}^n$  wieder dieselbe Orientierung  $\text{Det} D\varphi_j^{-1}(\varphi_j(q)) (\tilde{\omega})$  auf  $T_q N$ ,  $\forall q \in U_j$ . Dieses Verfahren können wir nun iterativ fortsetzen und erhalten Orientierungen  $\omega_q$  auf allen Tangentialräumen  $T_q N$ ,  $q \in N$ , so daß gilt  $D\varphi_i(q)(\omega_q) = \tilde{\omega}$ . Die Wahl von  $-\omega_p$  würde uns die Orientierungen  $-\omega_q$ ,  $\forall q \in N$ , liefern. Alle Abbildungen  $D\varphi_i(q)$  wären für alle  $i$  und alle  $q \in N$  orientierungsumkehrend, d.h. hätten negative Determinante. Sie würden also die Orientierung  $-\omega$  von  $N$  repräsentieren.

Es reicht daher im Falle einer orientierbaren Mannigfaltigkeit in jeder Zusammenhangskomponente einen Tangentialraum zu orientieren, um die Orientierung aller Tangentialräume und damit die Orientierung der Mannigfaltigkeit festzulegen.

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **zusammenziehbar** (auf  $x_0 \in X$ ), falls  $Id_X$  nullhomotop ist (d.h. homotop zur konstanten Abbildung  $c_{x_0}(x) = x_0 \in X$ ,  $\forall x \in X$ ).  $X$  heißt **einfach zusammenhängend**, falls gilt:  $X$  ist wegzusammenhängend und jeder geschlossene Weg in  $X$  ist nullhomotop.

**Lemma 1.1** [H, Kap. 4.4, S. 105] *Jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist orientierbar.*

Wir wollen jetzt wieder auf unseren Fall des Gradientenflusses  $\phi_t$  auf  $M^n$  zurückkommen.

**Proposition 1.2** *Sei  $x \in \text{Crit} f$ , dann ist  $W^u(x)$  zusammenziehbar (also insbesondere einfach zusammenhängend).*

BEWEIS Es ist  $W^u(x) := \{p \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t p = x\}$ . Betrachte den Homöomorphismus

$$\begin{aligned} \tau : I = [0, 1] &\rightarrow [0, \infty) \\ t &\mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

und die stetige Abbildung  $H : I \times W^u(x) \rightarrow W^u(x)$  mit  $H(t, p) := \phi_{-\tau(t)} p$ . Sie erfüllt  $H(0, p) = \phi_{-\tau(0)} p = \phi_0 p = p$  und  $H(1, p) = \phi_{-\infty} p = x$ , also  $H(0, \cdot) = Id_{W^u(x)}(\cdot)$  und  $H(1, \cdot) = c_x(\cdot) = x$ ,  $\forall p \in W^u(x)$ . Also ist  $Id_{W^u(x)}(\cdot)$  nullhomotop, was beweist, daß  $W^u(x)$  zusammenziehbar ist. Offenbar ist nun jeder geschlossene Weg in  $W^u(x)$  auf den Punkt  $x$  zusammenziehbar (mittels obiger Homotopie), also ist  $W^u(x)$  einfach zusammenhängend.  $\square$

Wir wollen nun für jedes  $x \in \text{Crit} f$  eine Orientierung  $[x]$  für  $W^u(x)$  wählen. Dazu genügt es also eine Orientierung  $\omega_x$  für  $T_x W^u(x)$ ,  $\forall x \in \text{Crit} f$ , zu wählen. Es seien

$$\begin{aligned} (1.8) \quad \sigma &:= \{[x] \mid x \in \text{Crit} f\} \quad , \quad \sigma_k := \{[x] \mid x \in \text{Crit}_k f\} \quad , \\ \Sigma &:= \{\text{aller möglichen } \sigma\} \quad , \quad \Sigma_k := \{\text{aller möglichen } \sigma_k\} \quad , \end{aligned}$$

mit

$$|\Sigma| = 2^{|\text{Crit } f|} \quad , \quad |\Sigma_k| = 2^{|\text{Crit}_k f|} \quad .$$

$\sigma$  ist also die Menge der von uns (willkürlich) festgelegten Orientierungen der instabilen Mannigfaltigkeiten aller kritischen Punkte von  $f$ .  $\Sigma$  ist die Menge aller möglichen Orientierungsfestlegungen  $\sigma$ .

### DIE CHARAKTERISTISCHEN VORZEICHEN

Seien  $x, y \in \text{Crit } f$  mit  $\text{Ind}_f(x) = \text{Ind}_f(y) + 1 = k + 1$  und seien  $[x]$  und  $[y]$  fest gewählte Orientierungen von  $T_x W^u(x)$  und  $T_y W^u(y)$ . Nach Kor. 2.2.2 besteht der Orbitraum  $M_{x,y}$  aus endlich vielen Punkten  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ . Wir wollen nun jedem  $u_i = \mathcal{O}(\hat{u}_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , eine Zahl  $\mathbf{n}_{u_i} \in \{+1, -1\}$  zuordnen.  $\mathbf{n}_{u_i}$  heißt **charakteristisches Vorzeichen** des isolierten Orbits  $u_i$ .

Sei  $p \in u_i$ , dann definieren wir

$$(1.9) \quad \dot{u}_i(p) := \frac{\left. \frac{d}{dt} \phi_t p \right|_{t=0}}{\left\| \left. \frac{d}{dt} \phi_t p \right|_{t=0} \right\|} \in T_p u_i = T_p(W^u(x) \cap W^s(y)) \quad .$$

$\dot{u}_i(p)$  bezeichnet also den Einheitstangentenvektor an den Orbit  $u_i$  im Punkt  $p$ , welcher in Richtung von  $-\nabla f(p)$  weist. Durch  $\dot{u}_i(p)$  ist nun ein  $k$ -dimensionaler Untervektorraum von  $T_p W^u(x) \simeq \mathbb{R}^{k+1}$  festgelegt, nämlich dessen Faktorraum nach  $\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(p) = T_p u_i \simeq \mathbb{R}^1$ :

$$(1.10) \quad E_i^u(x, p) := \frac{T_p W^u(x)}{\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(p)} \simeq \mathbb{R}^k \quad .$$

Also ist  $T_p W^u(x) = E_i^u(x, p) \oplus \mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(p)$  und die Orientierungen von  $T_p W^u(x)$  (welche durch  $[x]$  festgelegt ist) und von  $T_p u_i$  (welche durch  $\dot{u}_i(p)$  festgelegt ist) induzieren eine Orientierung  $[E_i^u(x, p)]$  von  $E_i^u(x, p)$ ; mit (1.4) und (1.6) bleibt zu zeigen, daß

$$(1.11) \quad 0 \rightarrow E_i^u(x, p) \xrightarrow{i} T_p W^u(x) = E_i^u(x, p) \oplus \mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(p) \xrightarrow{j} \mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(p) \rightarrow 0$$

mit

$$(1.12) \quad \begin{aligned} i(\xi) &:= \xi \quad , \quad \forall \xi \in E_i^u(x, p) \quad , \\ j(\xi, \zeta) &:= \zeta \quad , \quad \forall (\xi, \zeta) \in E_i^u(x, p) \oplus \mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(p) \quad , \end{aligned}$$

eine kurze exakte Sequenz darstellt. Die zu zeigende Injektivität von  $i$  bzw. Surjektivität von  $j$  ist jedoch offensichtlich, ebenso die Relation  $\text{Im } i = \text{Ker } j$ .

Nun wollen wir zeigen, daß der Tangentialfluß  $D\phi_t(p): T_p W^u(x) \rightarrow T_{\phi_t p} W^u(x)$  die eben definierten Orientierungen  $[\dot{u}_i(p)]$  und  $[E_i^u(x, p)]$  invariant läßt. Hieraus folgt nämlich, daß der Punkt  $p$ , den wir für die Definition dieser Orientierungen gewählt haben, keine ausgezeichnete Bedeutung hat.

Wähle  $q \in u_i$  und sei  $T \in \mathbb{R}$  so, daß  $\phi_T p = q$ . Dann ist

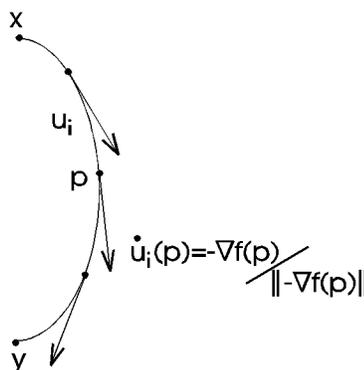
$$(1.13) \quad \begin{aligned} D\phi_T(p)([E_i^u(x, p)]) &= [D\phi_T(p)(E_i^u(x, p))] && , \text{ induz. Or.} \\ &= \left[ D\phi_T(p) \left( \frac{T_p W^u(x)}{\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(p)} \right) \right] && , \text{ Def. von } E_i^u(x, p) \\ &= \left[ \frac{D\phi_T(p)(T_p W^u(x))}{D\phi_T(p)(\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(p))} \right] && \begin{array}{l} \text{Faktorbildung} \\ \text{, ist verträgl.} \\ \text{mit lin. Abb.} \end{array} \\ &= \frac{[D\phi_T(p)(T_p W^u(x))]}{[\mathbb{R} \cdot D\phi_T(p)(\dot{u}_i(p))]} && , (1.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[T_q W^u(x)]}{\left\| \frac{d}{dt} \phi_{t^p} \Big|_{t=0} \right\| [\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q)] \left\| \frac{d}{dt} \phi_{t^p} \Big|_{t=T} \right\|} \quad , (2.3.3) \\
 &= \frac{[T_q W^u(x)]}{[\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q)]} \quad , \text{ beide Normen strikt positiv} \\
 &= \left[ \frac{T_q W^u(x)}{\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q)} \right] \quad , (1.6) \\
 &= [E_i^u(x, q)] \quad , \text{ Def. von } E_i^u(x, q).
 \end{aligned}$$

Es bleibt die fünfte Gleichheit zu rechtfertigen. Wenn  $[D\phi_T(p)(T_p W^u(x))] \neq [T_q W^u(x)]$  wäre, so hätte  $\text{Det}(D\phi_t(p))$ ,  $t \in [0, T]$ , für  $T > 0$  bzw.  $t \in [T, 0]$  für  $T < 0$ , für mindestens ein  $t$  eine Nullstelle. Dies wäre aber ein Widerspruch, da  $D\phi_t(p)$  ein Isomorphismus ist. Ein analoges Argument zeigt

$$(1.14) \quad [\mathbb{R} \cdot D\phi_T(p)(\dot{u}_i(p))] = [\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q)] \quad .$$

Eine eindimensionale zusammenhängende (unberandete) differenzierbare Mannigfaltigkeit ist entweder diffeomorph zu  $(0, 1)$  oder zu  $S^1$ . Die Zusammenhangskomponente  $u_i$  von  $M_{x,y}$  ist diffeomorph zu  $(0, 1)$ , denn ein Orbit eines Gradientenflusses kann kein geschlossener Weg sein; dies ist eine Konsequenz aus Prop. 1.3.4.  $u_i$  ist also zusammenziehbar, damit einfach zusammenhängend (siehe den Beweis von Prop. 1.2), also nach Lemma 1.1 orientierbar. Um  $u_i$  zu orientieren, genügt es, wie am Anfang dieses Abschnitts gezeigt, einen Tangentialraum an  $u_i$  zu orientieren. Wir haben  $T_p u_i$  durch  $[\dot{u}_i(p)]$  orientiert (siehe Figur 1.3); daß die Orientierung der Mannigfaltigkeit  $u_i$  nun unabhängig vom hierzu gewählten Punkt  $p \in u_i$  ist, folgt, sowohl aus der obigen Diskussion des Tangentialflusses, als auch aus der, zu Anfang dieses Abschnitts diskutierten, Orientierung von Mannigfaltigkeiten.



Figur 1.3

Da nun die Tangentialräume von  $W^u(x)$  und  $u_i$  durch die Orientierungen  $[x]$  von  $T_x W^u(x)$  und  $[\dot{u}_i(p)]$  von  $T_p u_i$  alle fest orientiert sind (unabhängig von  $p$ ), ist auch  $E_i^u(x, q)$ ,  $\forall q \in u_i$ , fest orientiert.

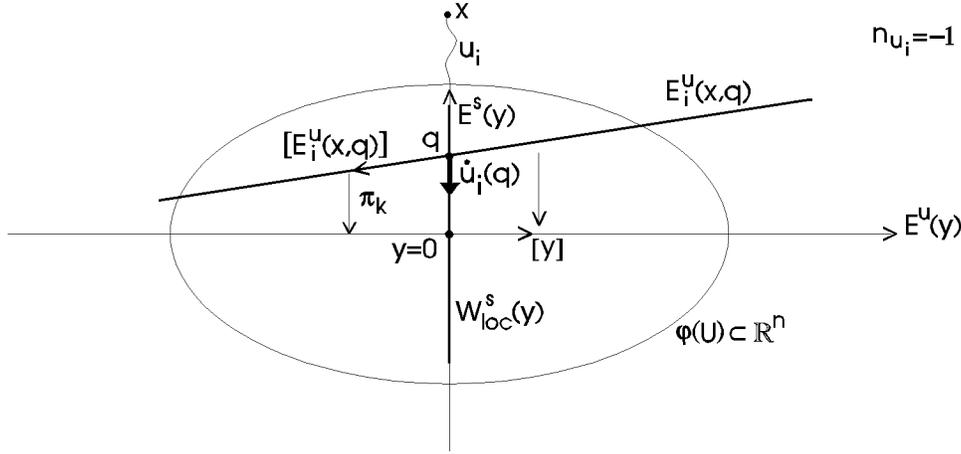
Wenn nun  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}_i(\phi_t p)$  existieren würde, so wäre  $\lim_{t \rightarrow \infty} E_i^u(x, \phi_t p) = W^u(y)$  und wir könnten die Orientierungen der beiden  $k$ -dimensionalen Vektorräume vergleichen. Leider können wir über die Existenz von  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}_i(\phi_t p)$  im Allgemeinen nichts aussagen, so daß wir einen anderen Weg einschlagen müssen: Wir betrachten  $\phi_t p$  für große  $t \in \mathbb{R}$ , dann ist also  $\phi_t p$  "nahe bei"  $y$ . Weiter nutzen wir aus, daß  $W_{loc}^s(y) \subset E^s(y)$  (siehe Ende von Abschnitt 1.3) und daß für  $q \in u_i \cap W_{loc}^s(y)$  gilt (wir betrachten die Situation jetzt mittels einer Karte um  $y$ , verändern die Bezeichnungen jedoch nicht!)

$$(1.15) \quad E^u(y) \oplus E^s(y) = \mathbb{R}^n = E_i^u(x, q) \oplus E^s(y) \quad , \text{ siehe Figur 1.4} \quad .$$

Die Orthogonalprojektion  $\pi_k: E_i^u(x, q) \rightarrow E^u(y)$  ist also ein Isomorphismus und wir können die durch  $\pi_k$  auf  $E^u(y)$  induzierte Orientierung  $\pi_k([E_i^u(x, q)])$  mit der gegebenen Orientierung  $[y]$  vergleichen.

Wir definieren nun

$$(1.16) \quad n_{u_i}(q) := \begin{cases} +1 & , \text{ falls } \pi_k \text{ orientierungserhaltend ,} \\ -1 & , \text{ falls } \pi_k \text{ orientierungsumkehrend .} \end{cases}$$



Figur 1.4

Zunächst müssen wir noch (1.15) rechtfertigen. Sei  $(\varphi, U)$  eine Karte um  $y$ , so daß  $W_{loc}^s(y) \subset E^s(y)$  (siehe Ende von Abschnitt 1.3). OBdA nehmen wir an  $q \in U$ . In dieser Karte wollen wir uns nun die Situation betrachten; die Bezeichnungen wollen wir dabei zur Vereinfachung der Notation nicht verändern, d.h. statt von  $\varphi(y)$  reden wir weiter von  $y$  usw. .

$$(1.17) \quad \begin{aligned} E^u(y) \oplus E^s(y) &= T_y \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \\ &= T_q W^u(x) + T_q W^s(y) && , W^u(x) \pitchfork W^s(y) \\ &= (E_i^u(x, q) \oplus \mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q)) + T_q W^s(y) \\ &= E_i^u(x, q) + \mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q) + T_q W^s(y) && , \dot{u}_i(q) \notin E_i^u(x, q) \\ &= E_i^u(x, q) \oplus T_q W^s(y) && , \dot{u}_i(q) \in T_q M_{x, y} \subset T_q W^s(y) \\ &= E_i^u(x, q) \oplus T_q W_{loc}^s(y) && , q \in W_{loc}^s(y) \subset W^s(y) \text{ offen} \\ &= E_i^u(x, q) \oplus E^s(y) && , W_{loc}^s(y) \subset E^s(y) . \end{aligned}$$

Also ist  $\pi_k : E_i^u(x, q) \rightarrow E^u(y)$  ein Vektorraumisomorphismus.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß eine andere Wahl von  $q \in u_i \cap W_{loc}^s(y)$  dasselbe  $n_{u_i}$  liefert. Sei  $q' \in u_i \cap W_{loc}^s(y)$ , dann ist

$$(1.18) \quad n_{u_i}(q') = \text{sign Det}(\pi_k |_{E_i^u(x, q')}) .$$

Die Lage von  $E_i^u(x, q')$  in  $\mathbb{R}^n$  hängt, insbesondere stetig, von  $q'$  ab, damit hängt  $n_{u_i}(q')$  stetig von  $q'$  ab. Wenn für ein  $q'$  gelten würde:  $n_{u_i}(q') = -n_{u_i}(q)$ , so hätte die stetige Funktion  $n_{u_i}(\cdot)$  auf dem Orbitstück von  $u_i$  zwischen  $q$  und  $q'$  eine Nullstelle. Dieses würde bedeuten, daß  $\pi_k$  an dieser Stelle kein Isomorphismus wäre, ein Widerspruch. Also liefern alle  $q \in u_i \cap W_{loc}^s(y)$  dasselbe  $n_{u_i}(q) \in \{+1, -1\}$ , das wir nur noch mit  $\mathbf{n}_{u_i}$  bezeichnen. Diese Zahl heißt **charakteristisches Vorzeichen des Orbits  $u_i$** .

Weiter gilt

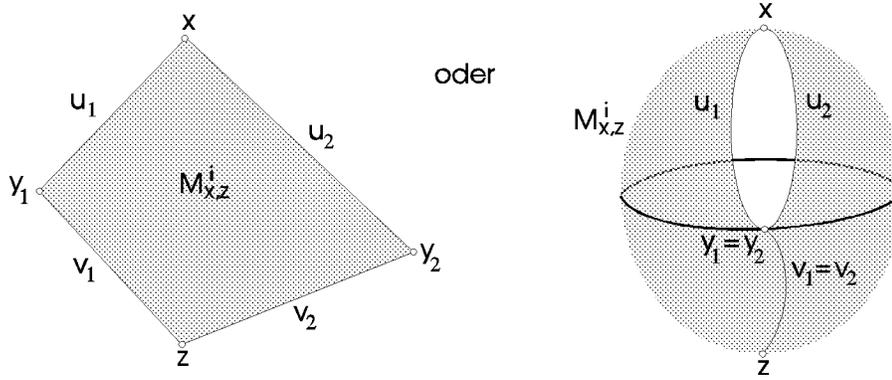
$$(1.19) \quad \begin{aligned} [x] &= [T_q W^u(x)] && , W^u(x) \text{ orientierbar} \\ &= [E_i^u(x, q)] \oplus [\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q)] && , \text{ Def. von } E_i^u(x, q) \\ &= n_{u_i} \cdot \pi_k([E_i^u(x, q)]) \oplus [\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q)] && , n_{u_i} \cdot \pi_k \text{ ist or.erh.} \\ &= n_{u_i} \cdot [\pi_k(E_i^u(x, q)) \oplus [\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q)]] && , \text{ Def. der ind. Or.} \\ &= n_{u_i} \cdot [E^u(y) \oplus [\mathbb{R} \cdot \dot{u}_i(q)]] && , \text{ Def. des Isom. } \pi_k \\ &= [y] \oplus [\mathbb{R} \cdot (n_{u_i} \cdot \dot{u}_i(q))] && . \end{aligned}$$

DER FALL  $Ind_f(x) - Ind_f(z) = 2$

Seien  $(\hat{u}_j, \hat{v}_j) \in \hat{M}_{x, y_j} \times \hat{M}_{y_j, z}$ ,  $j = 1, 2$  und  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \neq (\hat{u}_2, \hat{v}_2)$ , so daß sie dieselbe Zusammenhangskomponente  $\hat{M}_{x, z}^i$  von  $\hat{M}_{x, z}$  beranden. D.h. es soll gelten

$$\mathcal{O}(\hat{u}_j) \subset \overline{M_{x, z}^i} \quad \text{und} \quad \mathcal{O}(\hat{v}_j) \subset \overline{M_{x, z}^i}, \quad j = 1, 2.$$

Es ergibt sich also eine, der in Figur 1.5 skizzierten, Situationen (siehe Abschnitt 3.2).



Figur 1.5

Unter diesen Voraussetzungen gilt das

**Lemma 1.3** 
$$n_{u_1} \cdot n_{v_1} = -n_{u_2} \cdot n_{v_2} \quad .$$

BEWEIS Aus (1.19) wissen wir

$$(1.20) \quad \begin{aligned} [x] &= [y_j] \oplus [\mathbb{R} \cdot n_{u_j} \cdot \hat{u}_j(p_j)] \\ [y_j] &= [z] \oplus [\mathbb{R} \cdot n_{v_j} \cdot \hat{v}_j(q_j)] \end{aligned}$$

$p_j \in u_j$ ,  $q_j \in v_j$ ,  $j = 1, 2$ . Damit ergibt sich

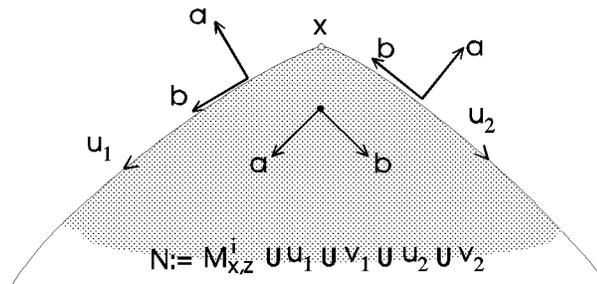
$$(1.21) \quad [x] = [z] \oplus [\mathbb{R} \cdot n_{v_j} \cdot \hat{v}_j(q_j)] \oplus [\mathbb{R} \cdot n_{u_j} \cdot \hat{u}_j(p_j)] \quad , \quad j = 1, 2 .$$

Also

$$(1.22) \quad \begin{aligned} [\mathbb{R} \cdot n_{v_1} \cdot \hat{v}_1(q_1)] \oplus [\mathbb{R} \cdot n_{u_1} \cdot \hat{u}_1(p_1)] &= [\mathbb{R} \cdot n_{v_2} \cdot \hat{v}_2(q_2)] \oplus [\mathbb{R} \cdot n_{u_2} \cdot \hat{u}_2(p_2)] \\ \Leftrightarrow n_{v_1} n_{u_1} [\hat{v}_1(q_1), \hat{u}_1(p_1)] &= n_{v_2} n_{u_2} [\hat{v}_2(q_2), \hat{u}_2(p_2)] \\ \Leftrightarrow n_{u_1} n_{v_1} [\hat{u}_1, \hat{v}_1] &= n_{u_2} n_{v_2} [\hat{u}_2, \hat{v}_2] \quad . \end{aligned}$$

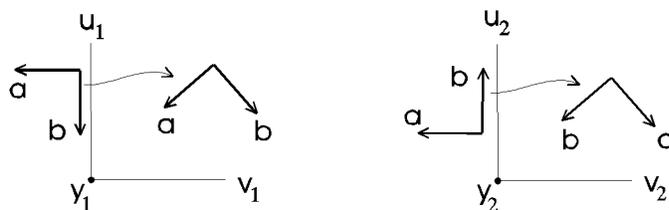
Wir müssen nun die Orientierungen  $[\hat{u}_1, \hat{v}_1]$  und  $[\hat{u}_2, \hat{v}_2]$  miteinander vergleichen. Dazu fassen wir diese jeweils als Orientierungen des Randes der berandeten Mannigfaltigkeit (Def. z.B. in [H, Kap. 1.4])  $N := M_{x, z}^i \cup u_1 \cup v_1 \cup u_2 \cup v_2$  auf. Dann betrachten wir jene Orientierungen von  $N$ , welche  $[\hat{u}_1, \hat{v}_1]$  bzw.  $[\hat{u}_2, \hat{v}_2]$  auf dem Rand induzieren. Es stellt sich heraus, daß diese verschieden sind, also ist  $[\hat{u}_1, \hat{v}_1] = -[\hat{u}_2, \hat{v}_2]$ .

Sei  $[a, b]$  eine Orientierung von  $N$ , diese induziert eine Orientierung von  $\partial N$  in folgender Weise: Wir transportieren  $[a, b]$  nach  $\partial N$ , so daß  $a$  nach außen zeigt und  $b$  tangential an  $\partial N$  ist.  $b$  gibt dann die von  $[a, b]$  auf  $\partial N$  induzierte Orientierung an. Wir treffen eine Wahl von  $[a, b]$  wie in Figur 1.6.



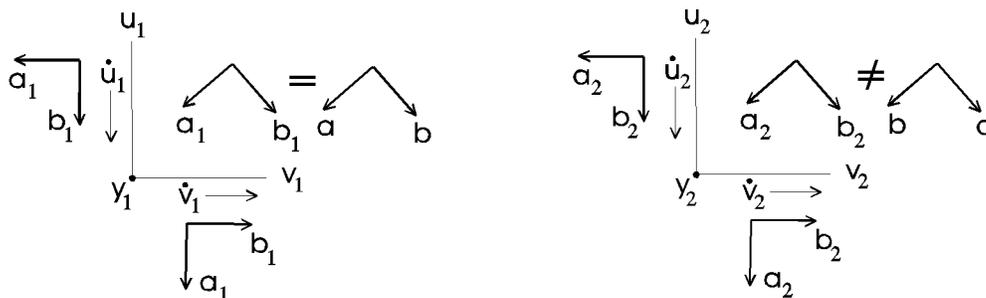
Figur 1.6

Die Randkomponente  $u_1$  ist also in  $u_2$  entgegen, der Flußrichtung orientiert. Nun können wir die Darstellung der Orientierung  $[a, b]$  von  $N$  nahe bei  $y_1$  bzw.  $y_2$  als geordnetes Vektorpaar ermitteln, denn wir wissen  $a$  zeigt nach außen und  $b$  auf  $u_1$  bzw.  $u_2$  in bzw. entgegen der Flußrichtung.



Figur 1.7

Jetzt betrachten wir die Orientierungen  $[\dot{u}_1, \dot{v}_1]$  und  $[\dot{u}_2, \dot{v}_2]$  von  $\partial N$  und ermitteln durch welche Orientierung  $[a_1, b_1]$  bzw.  $[a_2, b_2]$  von  $N$  diese induziert werden.



Figur 1.8

Es ergibt sich also  $[a_1, b_1] = [a, b]$  und  $[a_2, b_2] = -[a, b]$ , also ist  $[a_1, b_1] = -[a_2, b_2]$  und damit  $[\dot{u}_1, \dot{v}_1] = -[\dot{u}_2, \dot{v}_2]$  .

Aus (1.22) erhalten wir

$$n_{u_1} \cdot n_{v_1} = -n_{u_2} \cdot n_{v_2}$$

□

### 3.2 Der Randoperator

Wir wollen nun die Kettengruppen  $C_*(f, \sigma)$  und anschließend einen Gruppenhomomorphismus (den sogenannten **Randoperator**)  $\partial_k: C_k(f, \sigma) \rightarrow C_{k-1}(f, \sigma)$  definieren. Wir hatten bereits definiert

$$(2.1) \quad \text{Crit } f := \{x \mid Df(x) = 0\} \quad , \quad \text{Crit}_k f := \{x \in \text{Crit } f \mid \text{Ind}_f(x) = k\} \quad , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Sei  $x \in \text{Crit}_k f$ , dann bezeichnen wir mit  $[x]$  den kritischen Punkt  $x$  zusammen mit einer fest gewählten Orientierung des Vektorraumes  $T_x W^u(x)$  und damit der Mannigfaltigkeit  $W^u(x)$ , siehe Abschnitt 3.1. Eine Wahl der Orientierung aller instabilen Mannigfaltigkeiten hatten wir mit  $\sigma$  bezeichnet

$$(2.2) \quad \sigma := \{[x] \mid x \in \text{Crit } f\} \quad , \quad \sigma_k := \{[x] \mid x \in \text{Crit}_k f\} \quad .$$

Jetzt definieren wir die  **$k$ -te Kettengruppe  $C_k(f, \sigma)$**  als die von  $\sigma_k$  frei abelsch erzeugte (unendlich zyklische) Gruppe

$$(2.3) \quad C_k(f, \sigma) := \bigoplus_{[x] \in \sigma_k} \mathbb{Z} \cdot [x] \quad , \quad k \in \{0, \dots, n\} .$$

Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n\}$  sei

$$C_k(f, \sigma) := 0 \quad .$$

Die frei abelsch erzeugte (unendlich zyklische) **Kettengruppe  $C_*(f, \sigma)$**  definieren wir nun als

$$(2.4) \quad C_*(f, \sigma) := \bigoplus_{k=0}^n C_k(f, \sigma) \quad .$$

Die  $C_k(f, \sigma)$ , und damit auch  $C_*(f, \sigma)$ , hängen einerseits von den kritischen Punkten und damit von  $f$  ab, andererseits auch noch von den gewählten Orientierungen  $[x] \in \sigma$ .

Seien nun  $x, y \in \text{Crit } f$  mit  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) = 1$ , dann wissen wir aus Kor. 2.2.2, daß  $\hat{M}_{x,y}$  aus einer endlichen Anzahl von isolierten Orbits besteht. Das folgende Objekt ist daher wohldefiniert:

$$(2.5) \quad n(x, y) := \sum_{\hat{u} \in \hat{M}_{x,y}} n_u \quad ,$$

wobei  $n_u$  das in Abschnitt 3.1 definierte charakteristische Vorzeichen des Orbits  $u = \mathcal{O}(\hat{u})$  bezeichne, also  $n_u \in \{+1, -1\}$ , siehe (3.1.16). Der Gruppenhomomorphismus

$$(2.6) \quad \partial_k : C_k(f, \sigma) \rightarrow C_{k-1}(f, \sigma) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} ,$$

sei nun folgendermaßen definiert: Sei zunächst  $[x] \in \sigma_k$  (also ein Erzeuger von  $C_k(f, \sigma)$ ), dann sei

$$(2.7) \quad \partial_k[x] := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1} f} n(x, y) \cdot [y] \quad , \quad k \in \mathbb{Z} ,$$

wobei wir die Summe über eine leere Menge als 0 definieren.

D.h. dem kritischen Punkt werden (mit entsprechenden Koeffizienten) jene kritischen Punkte  $y$  zugeordnet, welche einen um Eins kleineren Morse-Index besitzen und zu denen isolierte Orbits vorhanden sind.  $\partial_k$  zählt also die isolierten Orbits von  $x$  nach  $y$  (mit ihren charakteristischen Vorzeichen). Da  $\partial_k$  nun ein Gruppenhomomorphismus (d.h.  $\mathbb{Z}$ -linear) sein soll und auf den Erzeugern der Gruppe  $C_k(f, \sigma)$  bereits definiert wurde, ist klar, daß sein Wert auf einem beliebigen  $\xi \in C_k(f, \sigma)$  eindeutig festgelegt ist. Seien  $[x_1], \dots, [x_m]$  die Erzeuger von  $C_k(f, \sigma)$ , dann läßt sich  $\xi$  schreiben als

$$(2.8) \quad \xi = a_1[x_1] + \dots + a_m[x_m]$$

für ein eindeutiges  $m$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$ . Nun gilt ( $\mathbb{Z}$ -Linearität von  $\partial_k$ )

$$(2.9) \quad \partial_k \xi = \partial_k(a_1[x_1] + \dots + a_m[x_m]) = a_1 \partial_k[x_1] + \dots + a_m \partial_k[x_m] \quad ,$$

wobei die einzelnen Summanden in (2.7) definiert wurden. Es sei

$$(2.10) \quad \partial_* := \bigoplus_{k=0}^n \partial_k \quad .$$

Das Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen, daß  $\partial_k$  ein **algebraischer Randoperator** ist, d.h. daß gilt

$$\textbf{Theorem 2.1} \quad \partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \quad .$$

Dann ist das Tupel  $(C_*(f, \sigma), \partial_*)$  ein **algebraischer Kettenkomplex** [DFN, §2, Def. 2.1], er heißt **Morse-Witten Komplex**. Die freie abelsche Gruppe

$$(2.11) \quad Z_k(f, g, \sigma) := \text{Ker } \partial_k \quad , k \in \mathbb{Z} ,$$

heißt  **$k$ -te Zyklengruppe**,

$$(2.12) \quad B_k(f, g, \sigma) := \text{Im } \partial_{k+1} \quad , k \in \mathbb{Z} ,$$

heißt  **$k$ -te Rändergruppe**. Die Faktorgruppe

$$(2.13) \quad H_k(f, g, \sigma) := \frac{Z_k(f, g, \sigma)}{B_k(f, g, \sigma)} = \frac{\text{Ker } \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}} \quad , k \in \mathbb{Z} ,$$

heißt  **$k$ -te Homologiegruppe** des Kettenkomplexes  $(C_*(f, \sigma), \partial_*)$ . Es sei

$$(2.14) \quad H_*(f, g, \sigma) := \bigoplus_{k=0}^n H_k(f, g, \sigma) \quad .$$

Die Abhängigkeit von  $f$  und  $\sigma$  ergibt sich dabei aus jener von  $C_k(f, \sigma)$  von  $f$  und  $\sigma$ , wie zuvor diskutiert. Daß  $H_k$  nun auch noch von der Metrik  $g$  abhängt, liegt daran, daß in der Definition von  $\partial_k$  die isolierten Orbits verwendet wurden, welche natürlich von  $g$  abhängen.

Es wäre nun naheliegend zu vermuten

$$(2.15) \quad H_*(f^\alpha, g^\alpha, \sigma^\alpha) \simeq H_*(f^\beta, g^\beta, \sigma^\beta) \quad ,$$

wobei  $f^\alpha, f^\beta$  Morse-Funktionen,  $g^\alpha, g^\beta$  Riemannsche Metriken und  $\sigma^\alpha, \sigma^\beta \in \Sigma$  Orientierungswahlen sind. Ein Isomorphismus

$$(2.16) \quad H_*(f, g, \sigma^\alpha) \simeq H_*(f, g, \sigma^\beta) \quad ,$$

wurde bereits in [Sch, Abschn. 4.1.4] angegeben, ebenso ein kanonischer Isomorphismus

$$(2.17) \quad H_*(f^\alpha, g^\alpha, \sigma) \simeq H_*(f^\beta, g^\beta, \sigma)$$

[Sch, Abschn. 4.1.3]. Letzterer findet sich auch, im Rahmen einer (der unseren analogen) differentialtopologischen Herangehensweise an den Morse-Witten Komplex, in [Po, Kap. 7]. Weiter stellte sich eine Isomorphie zur singulären Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  heraus:

$$(2.18) \quad H_*(f, g, \sigma) \simeq H_*(M, \mathbb{Z}) \quad .$$

Auf obige Isomorphismen soll in dieser Arbeit nicht im Detail eingegangen werden. Eventuell geschieht dies in einer folgenden Arbeit.

Seien  $x \in \text{Crit}_{k+1} f$ ,  $z \in \text{Crit}_{k-1} f$ ,  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Wir wollen auf der Menge  $\hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1$  von 1-fach gebrochenen Orbits zwischen  $x$  und  $y$  eine Äquivalenzrelation einführen. Sei also

$$(2.19) \quad \hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1 := \{(\hat{u}, \hat{v}) \mid \exists y \in \text{Crit}_k f, \text{ so daß } \hat{u} \in \hat{M}_{x,y}, \hat{v} \in \hat{M}_{y,z}\} \quad .$$

Wir nennen  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  und  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2)$  äquivalent, d.h.  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \sim (\hat{u}_2, \hat{v}_2)$ , oder auch **cobordant**, falls eine Zusammenhangskomponente  $M_{x,z}^1$  von  $M_{x,z}$  existiert, so daß ( $\partial$  bezeichne den topologischen Rand)

$$(2.20) \quad \partial M_{x,z} = \{x, y_1, y_2, z\} \cup \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{O}(\hat{u}_j) \cup \mathcal{O}(\hat{v}_j) \quad .$$

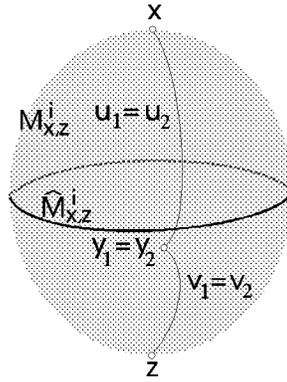
**Proposition 2.2** Eine Äquivalenzklasse  $[(\hat{u}_1, \hat{v}_1)] \in \hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1 / \sim$  besteht aus genau zwei Repräsentanten  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \neq (\hat{u}_2, \hat{v}_2) \in \hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1$ .

BEWEIS Sei  $[(\hat{u}_1, \hat{v}_1)] \in \hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1 / \sim$  und  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  ein Repräsentant dieser Äquivalenzklasse. Wegen  $\hat{M}_{x,z}^i \ni \hat{u}_1 \#_{\rho} \hat{v}_1 \rightarrow (\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  für  $\rho \rightarrow 0$  (Lemma 2.3.7), existiert also eine Zusammenhangskomponente  $M_{x,z}^i$  mit

$$\{x, y_1, z\} \cup \mathcal{O}(\hat{u}_1) \cup \mathcal{O}(\hat{v}_1) \subset \partial M_{x,z}^i, \quad ,$$

oder anders ausgedrückt:  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  liegt im topologischen Rand von  $\hat{M}_{x,z}^i$ .  $\hat{M}_{x,z}^i$  ist 1-dimensional und, da offenbar nicht kompakt, diffeomorph zu  $(0,1)$ . (Eine Zusammenhangskomponente einer 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist entweder diffeomorph zu  $(0,1)$  oder zu  $S^1$ ).  $(0,1)$  hat zwei Enden,  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  entspricht einem Endpunkt, dem anderen Endpunkt entspricht ein  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2) \in \hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1 / \sim$  mit  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2) \neq (\hat{u}_1, \hat{v}_1)$ . Die Gleichheit  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2) = (\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  würde folgender Situation entsprechen:

$$\overline{M_{x,z}^i} \sim S^1 \quad .$$



Figur 2.1

Dies wäre aber ein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Schnittpunktes  $p_{\rho}$  bei der Konstruktion der Glueing-Abbildung in Abschnitt 2.3. In der Situation wie in Figur 2.1 müßten  $D_{\rho}^k$  und  $D_{\rho}^{n-k}$  (siehe Abschnitt 2.3) für jedes  $\rho \in (0, \hat{\rho}_0)$  genau zwei Schnittpunkte haben, deren zugehörige Orbits für  $\rho \rightarrow 0$  beide gegen  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  konvergieren müssten.  $\square$

**Proposition 2.3** Jede Äquivalenzklasse  $[(\hat{u}_1, \hat{v}_1)] \in \hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1 / \sim$  entspricht genau einer Zusammenhangskomponente  $\hat{M}_{x,z}^i$  von  $\hat{M}_{x,z}$ , welche diffeomorph zu  $(0,1)$  ist.

BEWEIS Wie im Beweis von Prop. 2.2 ersichtlich, ist jeder Äquivalenzklasse (mittels der Glueingabbildung) eindeutig eine (nicht zu  $S^2$  homöomorphe) Zusammenhangskomponente  $\hat{M}_{x,z}^i$  zugeordnet,  $\hat{M}_{x,z}^i$  ist also diffeomorph zu  $(0,1)$ . Wenn wir umgekehrt von einer zu  $(0,1)$  diffeomorphen Zusammenhangskomponente  $\hat{M}_{x,z}^i$  ausgehen, so konvergieren deren zwei Enden gegen 1-fach gebrochene Orbits  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  und  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2)$ . Dies folgt aus dem Kompaktheitsresultat Thm. 2.2.1. Wie im Beweis von Prop. 2.2 schließen wir wieder  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \neq (\hat{u}_2, \hat{v}_2)$ . Also haben wir eine bijektive Beziehung zwischen den Äquivalenzklassen von  $\hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1 / \sim$  und den zu  $(0,1)$  diffeomorphen Zusammenhangskomponenten von  $\hat{M}_{x,z}$ .  $\square$

BEWEIS (von Thm. 2.1) Es ist zu zeigen  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  für  $k \in \{2, \dots, n\}$ , denn für andere  $k$  ist mindestens einer der Randoperatoren identisch Null und damit auch deren Komposition. Sei  $x \in \text{Crit}_k f$ , dann ist

$$\begin{aligned} (2.21) \quad \partial_{k-1} \circ \partial_k [x] &= \partial_{k-1} \left( \sum_{y \in \text{Crit}_k f} n(x, y) [y] \right) && , \text{ Def. von } \partial_k \\ &= \sum_{y \in \text{Crit}_k f} n(x, y) \partial_{k-1} [y] && , \mathbb{Z}\text{-Linearität} \\ &= \sum_{y \in \text{Crit}_k f} n(x, y) \sum_{z \in \text{Crit}_{k-1} f} n(y, z) [z] && , \text{ Def. von } \partial_{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{y \in \text{Crit}_{k-2}f} \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} n(x, y) \cdot n(y, z) [z] && , \mathbb{Z}\text{-Linearität} \\
 &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} \sum_{y \in \text{Crit}_{k-2}f} n(x, y) \cdot n(y, z) [z] && , \text{endl. Summen} \\
 &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} \sum_{y \in \text{Crit}_{k-2}f} \left( \sum_{\hat{u} \in \hat{M}_{x, y}} n_u \sum_{\hat{v} \in \hat{M}_{y, z}} n_v \right) [z] && , \text{Def. } n(\cdot, \cdot) \\
 &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} \sum_{y \in \text{Crit}_{k-2}f} \left( \sum_{\hat{u} \in \hat{M}_{x, y}} \sum_{\hat{v} \in \hat{M}_{y, z}} n_u \cdot n_v \right) [z] && , \text{endl. Summen} \\
 &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} \left( \sum_{(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{O}_{x, z}^1} n_u \cdot n_v \right) [z] && , \text{Def. } \hat{O}_{x, z}^1 \\
 &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} \left( \sum_{[(\hat{u}, \hat{v})] \in \hat{O}_{x, z}^1 / \sim} \underbrace{\sum_{(\hat{u}, \hat{v}) \in [(\hat{u}, \hat{v})]} n_u \cdot n_v}_{\substack{\text{Prop.} \\ 2.2} \underbrace{=}_{\text{Lemma} \\ 1.6} n_{u_1} n_{v_1} + n_{u_2} n_{v_2}} } \right) [z] && , \text{Def. } \hat{O}_{x, z}^1 / \sim \\
 &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} 0 \cdot [z] \\
 &= 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Da nun  $\partial_{k-1} \circ \partial_k [x] = 0$ , für alle Erzeuger  $[x]$  von  $C_k(f, \sigma)$ , gilt aufgrund der  $\mathbb{Z}$ -Linearität der Randoperatoren auch

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k \xi = 0 \quad , \forall \xi \in C_k(f, \sigma) ,$$

also ist

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \quad .$$

□

**Bemerkung 2.1** Wir könnten den Kettenkomplex  $(C_*(f, \sigma), \partial_*)$  auch mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}_2$  definieren. Das charakteristische Vorzeichen  $n_u$  des isolierten Orbits  $\hat{u} \in \hat{M}_{x, y}$  wäre definiert als

$$(2.22) \quad n_u := 1 \quad ,$$

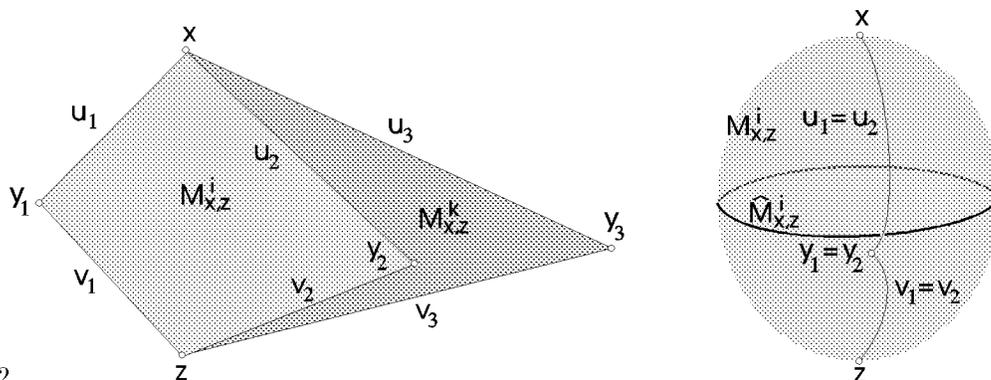
d.h.  $n(x, y)$  wäre dann gleich der Anzahl der  $x$  mit  $y$  verbindenden Orbits.  $n(x, y)$  ersetzen wir jetzt durch

$$(2.23) \quad n_2(x, y) := \left( \sum_{\hat{u} \in \hat{M}_{x, y}} n_u \right) \text{ mod } 2 = (\#\hat{M}_{x, y}) \text{ mod } 2 \quad .$$

Wie im vorigen Beweis ergibt sich

$$(2.24) \quad \partial_{k-1} \circ \partial_k [x] = \dots = \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}f} \left( \sum_{[(\hat{u}, \hat{v})] \in \hat{O}_{x, z}^1 / \sim} \underbrace{\sum_{(\hat{u}, \hat{v}) \in [(\hat{u}, \hat{v})]} \overbrace{n_u \cdot n_v}^{=1}}_{\substack{\text{Prop.} \\ 2.2} \underbrace{=}_{\text{Lemma} \\ 1.6} 2 \text{ mod } 2 = 0}} \right) [z] = 0 \quad .$$

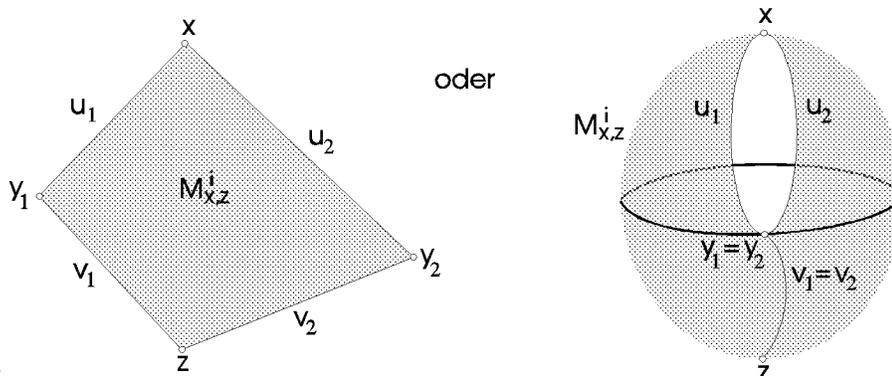
**Bemerkung 2.2** Durch eine Analyse der Glueing-Abbildung (wie im Beweis von Prop. 2.2) ergibt sich, daß folgende Möglichkeiten für die Gestalt der Zusammenhangskomponenten  $M_{x,z}^i$  ( $x \in Crit_{k,f}$ ,  $z \in Crit_{k-2f}$ ) ausgeschlossen sind:



Figur 2.2

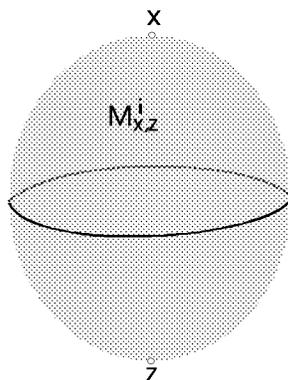
Es bleiben folgende mögliche Typen übrig:

a) Falls  $\hat{M}_{x,z}^i \cong (0,1)$



Figur 2.3

b) Falls  $\hat{M}_{x,z}^i \cong S^1$



Figur 2.4

# Appendix A

## Lyapunov-Funktionen und Modifikation der Morse-Funktion

In diesem Appendix soll es darum gehen die Annahme

$$(A.1) \quad f^{-1}([f(y), f(x)]) \cap \text{Crit } f = \{x, y\}$$

in der Beweisversion 3 von Kor. 2.2.2 zu rechtfertigen. Zur Erinnerung: Es war  $\text{Ind}_f(x) - \text{Ind}_f(y) = 1$  und in Kor. 2.2.2 wurde behauptet  $\#\hat{M}_{x,y} < \infty$ . Es sei wieder  $M^n$  unsere geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $f \in C^r(M, \mathbb{R})$  die Morse-Funktion mit  $r \geq 2$  und  $\phi_t$  die von  $-\nabla f$  erzeugte Zeit- $t$ -Abbildung. Wir wollen nun zeigen, daß wir  $f$  durch eine Morse-Funktion  $f_{c,\bar{c}}$  ersetzen können, welche auf einer isolierenden Umgebung von

$$(A.2) \quad S(x, y) := M_{x,y} \cup \{x, y\}$$

mit  $f$  übereinstimmt und gleichzeitig (A.1) erfüllt. Die Idee hierzu stammt aus [Sa2, Bew. von Lemma 3.2].

Im ersten Teil "LYAPUNOV-FUNKTIONEN" geht es um die Existenz einer Lyapunov-Funktion zu einem Paar  $(A, R)$  von kompakten invarianten Mengen. Das Lemma A.1 sowie dessen Beweis stammen aus [RoSa].

Im zweiten Teil "MODIFIKATION DER MORSE-FUNKTION" konstruieren wir eine Morse-Funktion  $f_{c,\bar{c}}$ , welche dieselben kritischen Punkte wie  $f$  besitzt und auf einer isolierenden Umgebung  $N$  von  $S(x, y) := M_{x,y} \cup \{x, y\}$  mit  $f$  übereinstimmt. Die isolierten Orbits von  $x$  nach  $y$  werden also beim Übergang von  $f$  zu  $f_{c,\bar{c}}$  nicht verändert.

Leider benötigen wir an zwei Stellen ein Kompaktheitsresultat: Damit  $N$  eine isolierende Umgebung von  $S(x, y)$  ist, muß  $S(x, y)$  kompakt sein. Die Mengen  $A, R, \tilde{A}, \tilde{R}$  in (A.35), (A.36), (A.41) und (A.39) müssen ebenfalls kompakt sein um das Lemma A.1 anwenden zu können. Beides läßt sich mit Thm. 2.2.1 bzw. analog zu dessen Beweis zeigen. Allerdings wird nun die Beweisversion 3 von Kor. 2.2.2 überflüssig, denn dieses folgt sofort aus Thm. 2.2.1. Die Konstruktion der Lyapunov-Funktion und die anschließende Modifikation der Morse-Funktion sollen hier dennoch beschrieben werden.

Die folgenden Definitionen sind [Sa1] entnommen. Eine Menge  $S \subset M$  heißt **invariante Menge**, falls gilt

$$(A.3) \quad \phi S = S \quad (\text{d.h. } \{\phi_t s \mid t \in \mathbb{R}, s \in S\} = S) \quad .$$

Die **maximale invariante Teilmenge**  $I(N)$  einer Menge  $N \subset M$  ist definiert als

$$(A.4) \quad I(N) := \{p \in M \mid \phi p \subset N\} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(N) \quad .$$

Eine kompakte invariante Menge  $S \subset M$  heißt **isolierte invariante Menge**, falls gilt

$$(A.5) \quad \exists \text{ eine kompakte Umgebung } N \text{ von } S : S = I(N) \quad ,$$

die Umgebung  $N$  heißt dann **isolierende Umgebung von  $S$  in  $M$** . Eine kompakte invariante Menge  $A \subset M$  heißt **Attraktor in  $M$** , falls gilt

$$(A.6) \quad \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } A, \text{ so daß } \omega(U) = A \quad .$$

Eine kompakte invariante Menge  $R \subset M$  heißt **Repeller in  $M$**  (engl.: repel-abstoßen), falls gilt

$$(A.7) \quad \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } R, \text{ so daß } \alpha(U) = R \quad .$$

Sei

$$(A.8) \quad A^* := \{p \in M \mid \omega(p) \cap A = \emptyset\} \quad ,$$

dann ist  $A^*$  ein Repeller in  $M$  [Sa1, Lemma 3.2 iii].  $A^*$  heißt der **zu  $A$  komplementäre Repeller**. Weiter gilt [Sa1, Lemma 3.2 iv]

$$(A.9) \quad A = \{p \in M \mid \alpha(p) \cap A^* = \emptyset\} \quad .$$

## LYAPUNOV-FUNKTIONEN

Vom folgenden Lemma A.1 brauchen wir später den Teil (1) $\Rightarrow$ (2), der Vollständigkeit halber zeigen wir jedoch die Äquivalenz aller drei Aussagen.

**Lemma A.1** [RoSa, Prop. 1.4] *Sei  $(A, R)$  ein Paar von kompakten invarianten Mengen in  $M$ , dann sind äquivalent*

$$(1) \quad M = A \dot{\cup} [W^s(A) \cap W^u(R)] \dot{\cup} R$$

(2) *Es existiert eine stetige Funktion  $\theta : M \rightarrow [0, 1]$ , so daß*

$$A = \theta^{-1}(0) \quad , \quad R = \theta^{-1}(1) \quad \text{und}$$

$$\theta(\phi_t x) < \theta(x) \quad \text{für } x \in M \setminus (A \cup R), t > 0 \quad .$$

(3)  *$A$  ist ein Attraktor und  $R = A^*$  ist der zu  $A$  komplementäre Repeller.*

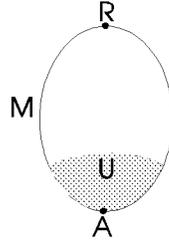
*Das Paar  $(A, R)$  heißt **Attraktor-Repeller Paar** und eine Funktion wie in (2) heißt **Lyapunov-Funktion**. In unserem Fall einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  und des glatten Diffeomorphismus  $\phi_t$  kann sogar Glattheit von  $\theta$  erreicht werden.*

**BEWEIS (3) $\Rightarrow$ (1)** Aufgrund von (A.8) und (A.9) sind  $A$  und  $A^*$  disjunkt. Sei  $p \in M \setminus (A \cup A^*)$ , dann ist  $p \in W^s(A) \cap W^u(A^*)$ : Falls  $p \notin W^s(A)$ , d.h.  $\omega(p) \cap A = \emptyset$ , so folgt  $p \in A^*$  (ein Widerspruch), und falls  $p \notin W^u(A^*)$ , d.h.  $\omega^*(p) \cap A^* = \emptyset$ , so folgt  $p \in A$  (auch ein Widerspruch). Sei umgekehrt  $p \in W^s(A) \cap W^u(A^*)$ , dann folgt aus (A.8) und (A.9) leicht  $p \in M \setminus (A \cup A^*)$ , also gilt

$$M = A \dot{\cup} [W^s(A) \cap W^u(R)] \dot{\cup} R \quad .$$

**(2) $\Rightarrow$ (3)** Sei  $U := \theta^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ , so ist  $\omega(U) = A$ , d.h.  $A$  ist ein Attraktor. Sei  $V := \theta^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ , so ist  $\omega^*(V) = R$ , d.h.  $R$  ist ein Repeller. Jedes  $p \in M$  mit  $\omega(p) \cap A = \emptyset$  muß in  $R$  liegen, da die Lyapunov-Funktion  $\theta$  auf  $M \setminus (A \cup R)$  längs Orbits streng monoton fallend ist. D.h. ein  $p \in M \setminus (A \cup R)$  wird durch den Fluß in positiver Zeitrichtung in jede Umgebung von  $A$  transportiert, also  $\omega(p) \subset A$ . Es folgt  $R = A^*$ .

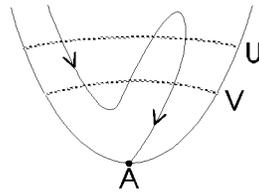
(1) $\Rightarrow$ (2) Sei also  $M = A \dot{\cup} [W^s(A) \cap W^u(R)] \dot{\cup} R$  mit  $A, R$  kompakte invariante Mengen und sei  $U$  eine Umgebung von  $A$ , so daß  $\bar{U} \cap R = \emptyset$  (Figur A.1).



Figur A.1

**Behauptung 1**  $\exists$  Umgebung  $V$  von  $A \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in V \quad : \quad \phi_t x \in U$ .

Hieraus folgt insbesondere  $V \subset U$ . Folgende Situation soll beispielsweise ausgeschlossen sein :

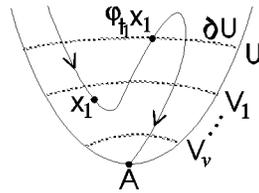


Figur A.2

Beweis: Wir machen die Widerspruchsannahme

$\forall$  Umgebung  $V$  von  $A \quad \exists t \geq 0 \quad \exists x \in V \quad : \quad \phi_t x \notin U$ .

Sei  $\{V_\nu\}_\nu \in \mathbb{N}$  eine Folge von offenen Umgebungen von  $A$  mit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} V_\nu = A$  und  $V_\nu \subset U, \forall \nu \in \mathbb{N}$ . Nach Voraussetzung existiert zu jedem  $V_\nu$  ein  $t_\nu \geq 0$  und ein  $x_\nu \in V_\nu$ , so daß  $\phi_{t_\nu} x_\nu \notin U$ . Wir bezeichnen mit  $t_\nu$  den Zeitpunkt zu dem der Punkt  $x_\nu$   $U$  zum ersten Mal verläßt (Figur A.3), d.h.  $\phi_{t_\nu} x_\nu \in \partial U := \bar{U} \setminus U$ . Also gilt für jedes  $\nu \in \mathbb{N}$ :  $\phi_s x_\nu \in U$  für  $0 \leq s \leq t_\nu$ .



Figur A.3

Die Folge  $\{\phi_{t_\nu} x_\nu\}_\nu \in \mathbb{N}$  besitzt nun eine in dem Kompaktum  $\partial U$  konvergente Teilfolge (selbe Bezeichnung). Es sei  $y := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \phi_{t_\nu} x_\nu$ . Es ist  $y \in \partial U$ , da  $\phi_{t_\nu} x_\nu \in \partial U$  und  $\partial U$  abgeschlossen. Hieraus folgt  $y \notin A$  ( $U$  Umgebung von  $A$ ) und  $y \notin R$  ( $\bar{U} \cap R = \emptyset$ ). Weiter ist  $(\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu) \in A$ , denn  $(\lim_{\nu \rightarrow \infty} V_\nu) = A$  und  $x_\nu \in V_\nu$ .

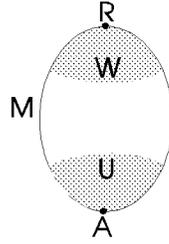
Die Annahme  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu =: c < \infty$  führt zu einem Widerspruch: Es würde gelten

$$y = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \phi_{t_\nu} x_\nu = \phi_c \left( \underbrace{\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu}_{=: a \in A} \right) = \phi_c a \in A \quad ,$$

was aber wegen  $y \in \partial U$  und  $\partial U \cap A = \emptyset$  nicht sein kann.

Wir betrachten jetzt die Folge  $\{\phi_{-t_\nu} y\}_\nu \in \mathbb{N}$ , es ist  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \phi_{-t_\nu} y = \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = a \in A$ , also  $y \notin W^u(R)$  und damit  $y \notin M$ , ein Widerspruch. QED

Sei nun  $W$  eine Umgebung von  $R$  mit  $\bar{W} \cap \bar{U} = \emptyset$  (Figur A.4).



Figur A.4

**Behauptung 2**  $\exists T > 0 \forall t \geq T \forall x \notin W : \phi_t x \in U$ .

Beweis: Wir machen die Widerspruchsannahme

$$\forall T > 0 \exists t \geq T \exists x \notin W : \phi_t x \notin U.$$

Hieraus folgt insbesondere  $x \notin A$  und  $x \notin R$ . Wir wählen eine Folge  $\{T_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  mit  $T_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ , so daß  $T_\nu \rightarrow \infty$  für  $\nu \rightarrow \infty$ . Zu jedem  $T_\nu$  existiert nach Voraussetzung ein  $t_\nu \geq T_\nu$  und ein  $x_\nu \notin W$ , so daß  $\phi_{t_\nu} x_\nu \notin U$ . Damit ist  $\phi_{t_\nu} x_\nu \notin V, \forall 0 \leq t \leq t_\nu$  (Behauptung 1). Die Folge  $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  besitzt eine in dem Kompaktum  $M \setminus W$  konvergente Teilfolge (selbe Bezeichnung), es ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu =: x_0 \in M \setminus W,$$

da  $M \setminus W$  abgeschlossen, also insbesondere  $x_0 \notin R$ . Es ist  $x_0 \notin A$ , da

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \underbrace{\phi_{t_\nu} x_\nu}_{\notin V, \forall 0 \leq t \leq t_\nu} = \phi_{\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu} x_0 \notin V,$$

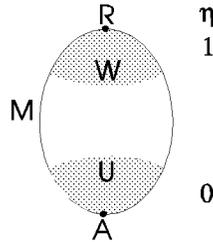
damit  $\phi_t x_0 \notin V, \forall 0 \leq t \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu = \infty$ . Also auch  $x_0 \notin W^s(A)$  und damit  $x_0 \notin M$  (ein Widerspruch). QED

Im folgenden werden wir nun die gesuchte Lyapunov-Funktion in drei Schritten konstruieren.

• Sei  $\eta : M \rightarrow [0, 1]$  eine stetige Funktion mit  $\eta^{-1}(1) = \bar{W}$  und  $\eta^{-1}(0) = \bar{U}$ . Wir könnten zum Beispiel

$$(A.10) \quad \eta(x) := \frac{d(x, \bar{U})}{d(x, \bar{U}) + d(x, \bar{W})}$$

nehmen, wobei  $d(\cdot, \cdot)$  der Riemannsche Abstand auf  $M$  ist. Am Ende dieses Beweises zeigen wir, daß wir  $\eta$  sogar als glatt voraussetzen können. Wir wollen dies im folgenden tun.



Figur A.5

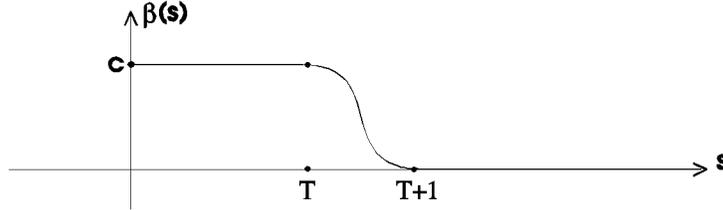
Es gilt

$$(A.11) \quad \begin{aligned} \eta(x) < 1 &\Rightarrow x \notin \bar{W} \\ &\Rightarrow x \notin W \\ &\Rightarrow \phi_t x \in U, \forall t \geq T, T > 0 \text{ geeignet} \quad , \text{ Behauptung 2} \\ &\Rightarrow \eta(\phi_t x) = 0, \forall t \geq T, T > 0 \text{ geeignet.} \end{aligned}$$

- Sei  $\beta: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte monoton fallende Abschnidefunktion mit

$$(A.12) \quad \beta(s) = \begin{cases} c > 0 & , 0 \leq s \leq T \\ 0 & , s \geq T+1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_0^+ \beta(s) ds = 1 \quad ,$$

wobei  $T > 0$  wie in Behauptung 2 gewählt sei.



Figur A.6

Es ist

$$(A.13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \beta'(s) ds = \beta(T+1) - \beta(T) = -c \quad .$$

Wir definieren

$$(A.14) \quad \rho(x) := \int_0^{\infty} \beta(s) \eta(\phi_s x) ds \quad ,$$

also

$$(A.15) \quad \rho: M \rightarrow [0, 1] \quad ,$$

denn für  $x \in M \setminus (A \cup R)$  gilt

$$(A.16) \quad \rho(x) \leq \underbrace{\left( \max_{s \in \mathbb{R}} \eta(\phi_s x) \right)}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \beta(s) ds}_{=1} \leq 1 \quad .$$

Für  $x \in A$  ist  $\eta(\phi_s x) = 0$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ , woraus folgt  $\rho(x) = 0$ . Für  $x \in R$  ist  $\eta(\phi_s x) = 1$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ , woraus folgt  $\rho(x) = \int_0^{\infty} \beta(s) ds = 1$ .  $\rho$  ist stetig (wegen der Stetigkeit von  $\eta$ ). Es muß jetzt noch das Verhalten von  $\rho$  längs Trajektorien untersucht werden. Die Abbildung

$$(A.17) \quad t \mapsto \rho(\phi_t x) = \int_0^{\infty} \beta(s) \cdot \eta(\phi_s \circ \phi_t x) ds$$

ist stetig differenzierbar, denn  $\phi_t$  ist  $C^r$  in  $t$ ,  $\eta$  ist glatt und die Integration ist ebenfalls eine stetig differenzierbare Operation. Wie wir anhand der nächsten Formel sehen, gilt dies auch falls  $\eta$  nur stetig ist, da die Differentiation nach geeigneter Variablen-Substitution, nur auf  $\beta$  wirkt.

$$(A.18) \quad \begin{aligned} \dot{\rho}(x) &= \frac{d}{dt} \rho(\phi_t x) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \beta(s) \cdot \eta(\phi_{s+t} x) ds \Big|_{t=0} \quad , \quad \tilde{s} := s + t \quad , \quad \frac{d\tilde{s}}{dt} = 1 \quad , \\ &= \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} \beta(\tilde{s} - t) \cdot \eta(\phi_{\tilde{s}} x) d\tilde{s} \Big|_{t=0} \quad . \end{aligned}$$

$t$  ist sowohl Integrationsgrenze, als auch Argument des Integranden.

**Proposition A.2** [Br, 3.1.9.2] Sind  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  zwei Funktionen, die für  $c \leq t \leq d$  definiert, stetig und differenzierbar sind, und besitzt  $f(\tilde{s}, t)$  in einem, die Punkte  $(\tilde{s}, t)$  mit  $\varphi(t) < \tilde{s} < \psi(t)$  ( $c \leq t \leq d$ ) enthaltenden, Gebiet eine stetige partielle Ableitung nach  $t$ , so ist das **Parameterintegral**

$$(A.19) \quad F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(\tilde{s}, t) d\tilde{s}$$

für  $c \leq t \leq d$  differenzierbar mit der Ableitung

$$(A.20) \quad F'(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\tilde{s}, t) d\tilde{s} + f(\psi(t), t) \cdot \psi' - f(\varphi(t), t) \cdot \varphi' .$$

Damit ergibt sich

$$(A.21) \quad \begin{aligned} \dot{\rho}(x) &= \int_t^{\infty} \frac{d}{dt} \beta(\tilde{s} - t) \cdot \eta(\phi_{\tilde{s}} x) d\tilde{s} \Big|_{t=0} + \beta(\infty - 0) \cdot \eta(\phi_{\infty} x) \cdot 0 - \beta(0 - 0) \cdot \eta(\phi_0 x) \cdot 1 \\ &= \int_0^{\infty} \beta'(\tilde{s}) \frac{d}{dt}(\tilde{s} - t) \Big|_{t=0} \eta(\phi_{\tilde{s}} x) d\tilde{s} - c \cdot \eta(x) \\ &= -c \cdot \eta(x) - \int_T^{T+1} \beta'(\tilde{s}) \cdot \eta(\phi_{\tilde{s}} x) d\tilde{s} \\ &\leq -c \cdot \eta(x) - \left( \max_{s \in [T, T+1]} \eta(\phi_s x) \right) \cdot \int_T^{T+1} \beta'(s) ds \\ &= c \cdot \left( \left( \max_{s \in [T, T+1]} \eta(\phi_s x) \right) - \eta(x) \right) . \end{aligned}$$

Sei  $x \in M \setminus (A \cup W)$ , dann ist  $\dot{\rho}(x) \leq c(0 - \eta(x)) \leq 0$  ( $= 0$  für  $x \in \bar{U}$ ). Für  $x \in W \setminus R$  ist  $\dot{\rho}(x) \leq c \cdot (\max_{s \in [T, T+1]} \eta(\phi_s x) - 1) \leq 0$  ( $= 0$  für  $x$  sehr nahe bei  $R$ ). Also ist  $\dot{\rho}(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in M \setminus (A \cup R)$ . Unsere Lyapunov-Funktion soll jedoch streng monoton fallend sein.

- Wir definieren deswegen

$$(A.22) \quad \theta(x) := \int_{-\infty}^{\infty} c(s) \cdot \rho(\phi_s x) ds ,$$

wobei  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine hinreichend schnell abfallende Lebesgue-integrierbare Funktion sei, so daß das Integral gleichmäßig in  $x$  konvergiert. Es soll weiter gelten

$$(A.23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} c(s) ds = 1 \quad \text{und} \quad c(s) > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} .$$

Zunächst ergibt sich die Glattheit (bzw. Stetigkeit, falls  $\eta$  nur stetig vorausgesetzt ist) von  $\theta$  aus jener von  $\rho$ . Wir erhalten  $\theta: M \rightarrow [0, 1]$ , denn für  $x \in M \setminus (A \cup R)$  gilt

$$(A.24) \quad \theta(x) \leq \left( \max_s \rho(\phi_s x) \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} c(s) ds \leq 1 .$$

Für  $x \in A$  gilt:  $\rho(\phi_s x) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow \theta(x) = 0$ . Für  $x \in R$  gilt:  $\rho(\phi_s x) = 1, \quad \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow \theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(s) ds = 1$ . Die Abbildung  $t \mapsto \theta(\phi_t x)$  ist, für hinreichend schnell abfallendes  $c(s)$ , stetig

differenzierbar. Es ist, wie vorher gezeigt,  $\rho(\phi_t x)$  stetig differenzierbar in  $t$ , die Multiplikation mit  $c(s)$  und anschließende Integration sind ebenfalls stetig differenzierbare Operationen. Es ist

$$\begin{aligned}
 (A.25) \quad \dot{\theta}(x) &= \frac{d}{dt} \theta(\phi_t x) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} c(s) \cdot \rho(\phi_s \circ \phi_t x) ds \Big|_{t=0} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} c(s) \frac{d}{dt} \rho(\phi_{s+t} x) \Big|_{t=0} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{c(s)}_{>0} \underbrace{\dot{\rho}(\phi_s x)}_{\leq 0} ds \quad .
 \end{aligned}$$

Sei  $x \in M \setminus (A \cup R)$ , dann ist  $\dot{\rho}(\phi_s x) < 0$  für ein  $s \in \mathbb{R}$  (da  $\rho$  längs einem Orbit von  $R$  nach  $A$  nicht konstant ist) und damit auch für eine Umgebung von  $s$  (wegen der Stetigkeit von  $\dot{\rho}$  int  $t$ ). Also ist

$$(A.26) \quad \dot{\theta}(x) < 0 \quad , \forall x \in M \setminus (A \cup R) .$$

• Es bleibt jetzt noch die Existenz einer glatten Funktion  $\eta: M \rightarrow [0, 1]$  zu rechtfertigen, für die gilt:  $\eta^{-1}(0) = \bar{U}$  und  $\eta^{-1}(1) = \bar{W}$ . Wir gehen hierzu nicht von vorher gewählten Umgebungen  $U$  und  $W$  von  $A$  bzw.  $R$  aus und konstruieren dann  $\eta$ , sondern wir gehen umgekehrt vor: Wir konstruieren ein spezielles  $\eta \in C^\infty(M, [0, 1])$  und zeigen dann, daß  $\bar{U} := \eta^{-1}(0)$  und  $\bar{W} := \eta^{-1}(1)$  (abgeschlossene) Umgebungen von  $A$  bzw.  $R$  sind, und daß für deren Inneres  $U$  bzw.  $W$  die Voraussetzungen der Behauptung 1 ( $U$  Umgebung von  $A$  mit  $\bar{U} \cap R = \emptyset$ ), sowie der Behauptung 2 ( $W$  Umgebung von  $R$  mit  $\bar{W} \cap \bar{U} = \emptyset$ ) zutreffen.

Zunächst benötigen wir einen weiteren Begriff, sowie ein wichtiges Resultat aus der Differentialtopologie, siehe [H, Kap. 2.2]. Sei  $N$  eine  $C^r$ -Mannigfaltigkeit,  $0 \leq r \leq \infty$ , und  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in \Lambda}$  eine offene Überdeckung von  $N$ . Eine  **$\mathcal{V}$  untergeordnete Zerlegung der Eins** ist eine Familie von  $C^r$ -Abbildungen

$$(A.27) \quad \lambda_i: M \rightarrow [0, 1] \quad , \quad i \in \Lambda \quad ,$$

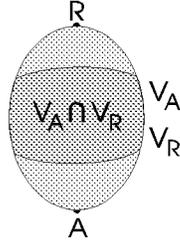
so daß gilt

- $\alpha)$   $\text{supp } \lambda_i \subset V_i, \quad i \in \Lambda.$
- $\beta)$   $\{\text{supp } \lambda_i\}_{i \in \Lambda}$  ist **lokal endlich** (d.h. jeder Punkt von  $N$  besitzt eine Umgebung auf der alle bis auf endlich viele  $\lambda_i$ 's Null sind).
- $\gamma)$   $\sum_{i \in \Lambda} \lambda_i(x) = 1, \quad x \in N.$

**Theorem A.3** [H, Kap. 2, Thm. 2.1] Sei  $N$  eine **parakompakte**  $C^r$ -Mannigfaltigkeit,  $0 \leq r \leq \infty$ , (d.h. jede offene Überdeckung besitzt eine lokal endliche Verfeinerung), dann gilt: Jede offene Überdeckung besitzt eine ihr untergeordnete  $C^r$  Zerlegung der Eins.

Seien  $V_A$  und  $V_R$  offene Teilmengen von  $M$  mit

$$\begin{aligned}
 (A.28) \quad & \text{i) } A \subset V_A \text{ und } R \subset V_R \\
 & \text{ii) } V_A \cup V_R = M \\
 & \text{iii) } (\overline{V_A \cap V_R}) \cap (A \cup R) = \emptyset .
 \end{aligned}$$



Figur A.7

Eigenschaft ii) besagt, daß  $\{V_A, V_R\}$  eine offene Überdeckung von  $M$  ist. Thm. A.3 liefert uns die Existenz einer  $\{V_A, V_R\}$  untergeordneten  $C^\infty$  Zerlegung der Eins. D.h. wir haben glatte Abbildungen  $\lambda_R, \lambda_A: M \rightarrow [0, 1]$  mit  $\text{supp } \lambda_R \subset V_R$  und  $\text{supp } \lambda_A \subset V_A$ . Wir definieren  $\bar{U} := \lambda_R^{-1}(0)$  und  $\bar{W} := \lambda_R^{-1}(1)$ , sowie  $U$  und  $W$  als das Innere von  $\bar{U}$  bzw.  $\bar{W}$ .

**Behauptung A**  $U$  ist eine offene Umgebung von  $A$  mit  $\bar{U} \cap R = \emptyset$ .

Beweis:  $U$  ist per definitionem offen.  $M \setminus \bar{V}_R$  ist eine offene Umgebung von  $A$ , denn

$$\text{iii) } \Rightarrow (\overline{V_A \cap V_R}) \cap A = \emptyset \stackrel{\text{ii)}}{\Rightarrow} \bar{V}_A \cap \bar{V}_R \cap A = \emptyset \stackrel{\text{i)}}{\Rightarrow} \bar{V}_R \cap A = \emptyset .$$

Da  $\bar{V}_R$  und  $A$  abgeschlossen und disjunkt sind, folgt daß das Komplement  $M \setminus \bar{V}_R$  von  $\bar{V}_R$  eine offene Umgebung von  $A$  ist (unsere Mannigfaltigkeiten sind Hausdorffsch). Wir folgern nun

$$\text{supp } \lambda_R \subset V_R \Rightarrow \lambda_R|_{M \setminus \bar{V}_R} \equiv 0 \Rightarrow M \setminus \bar{V}_R \subset U \Rightarrow U \text{ offene Umgebung von } A$$

und

$$\text{supp } \lambda_A \subset V_A \Rightarrow \lambda_R|_{M \setminus V_A} \equiv 1 \Rightarrow U \subset V_A \Rightarrow \bar{U} \subset \bar{V}_A .$$

Dies, zusammen mit  $\bar{V}_A \cap R = \emptyset$  (wie oben), liefert  $\bar{U} \cap R = \emptyset$ .

QED

**Behauptung B**  $W$  ist eine offene Umgebung von  $R$  mit  $\bar{W} \cap \bar{U} = \emptyset$ .

Beweis: Daß  $W$  eine offene Umgebung von  $R$  ist, folgt ganz analog wie im Beweis der Behauptung A. Wir machen nun die Widerspruchannahme  $\bar{W} \cap \bar{U} \neq \emptyset$ . Sei  $p \in \bar{W} \cap \bar{U}$ , wir wählen Folgen  $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset U$  und  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset W$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = p = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i$ . Die Stetigkeit von  $\eta$  impliziert nun

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta(u_i) = \eta(\lim_{i \rightarrow \infty} u_i) = p = \eta(\lim_{i \rightarrow \infty} w_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta(w_i) = 1 .$$

Dies ist ein Widerspruch, also gilt  $\bar{W} \cap \bar{U} = \emptyset$ .

QED

Jetzt definieren wir  $\eta(x) := \lambda_R(x)$ , also gilt  $\eta \in C^\infty(M, [0, 1])$ .

□

**Bemerkung A.1** Sei  $x \in M \setminus (A \cup R)$ , dann ist

$$0 > \dot{\theta}(x) = \frac{d}{dt} \theta(\phi_t x) |_{t=0} = D\theta(x) \left( \frac{d}{dt} \phi_t x |_{t=0} \right) = D\theta(x) (-\nabla f(\phi_t x) |_{t=0}) ,$$

also

$$(A.29) \quad D\theta(x) (\nabla f(x)) > 0 \quad , \quad \forall x \in M \setminus (A \cup R) .$$

## MODIFIKATION DER MORSE-FUNKTION

Seien wieder  $x, y \in \text{Crit } f$  mit  $\text{Ind}_f(x) = \text{Ind}_f(y) + 1 = k + 1$ , sei  $a := f(x)$  und  $b := f(y)$ . Wir haben folgendes Ziel:  $f$  soll derart modifiziert werden, daß die neue Funktion  $f_{c, \tilde{c}}$  ebenfalls eine Morse-Funktion ist und daß gilt

$$(A.30) \quad \text{Crit } f_{c, \tilde{c}} = \text{Crit } f \quad ,$$

$$(A.31) \quad f_{c, \tilde{c}}^{-1}([b, a]) \cap \text{Crit } f_{c, \tilde{c}} = \{x, y\} \quad ,$$

$$(A.32) \quad f_{c, \tilde{c}}|_N = f|_N \quad ,$$

wobei  $N$  eine isolierende Umgebung von

$$(A.33) \quad S(x, y) := M_{x, y} \cup \{x, y\}$$

sei. Aufgrund der letzten Eigenschaft (A.32), verändern wir beim Übergang von  $f$  zu  $f_{c, \tilde{c}}$  nicht die Menge der isolierten Orbits zwischen  $x$  und  $y$ . Da wir uns in der Version 3 des Beweises von Kor. 2.2.2 gerade für diese Menge interessieren, können wir also oBdA  $f$  durch  $f_{c, \tilde{c}}$  ersetzen, womit die geforderte Bedingung (A.31) erfüllt ist. Andererseits muß  $S(x, y)$  bereits kompakt sein, falls  $N$  eine isolierende Umgebung sein soll, damit wäre aber Kor. 2.2.2 schon gezeigt.

Zunächst einige Definitionen:

$$(A.34) \quad C_R := \{z \in \text{Crit } f \mid \text{Ind}_f(z) \geq \text{Ind}_f(x) + 1, z \neq x\} \quad ,$$

$$R := C_R \cup \bigcup_{z_1, z_2 \in C_R} M_{z_1, z_2} \quad ,$$

$$(A.35) \quad C_A := \{z \in \text{Crit } f \mid \text{Ind}_f(z) \leq \text{Ind}_f(y)\} \cup \{x\} \quad ,$$

$$A := C_A \cup \bigcup_{z_1, z_2 \in C_A} M_{z_1, z_2} \quad .$$

**Proposition A.4**  $A$  und  $R$  sind kompakte invariante Mengen, es gilt  $M = A \dot{\cup} [W^s(A) \cap W^u(R)] \dot{\cup} R$ .

BEWEIS  $A$  und  $R$  sind per definitionem disjunkt. Sei  $p \in M \setminus (A \cup R)$ . Nach Prop. 1.3.7 verbindet  $\mathcal{O}(p)$  genau zwei kritische Punkte  $z_1, z_2$  von  $f$ . Es gibt drei Fälle:

$$z_1, z_2 \in A \quad \Rightarrow \quad p \in A \quad , \text{ Widerspruch.}$$

$$z_1, z_2 \in R \quad \Rightarrow \quad p \in R \quad , \text{ Widerspruch.}$$

$$z_1 \in A, z_2 \in R \quad \Rightarrow \quad p \in W^s(A) \cap W^u(R) \quad .$$

Sei umgekehrt  $p \in W^s(A) \cap W^u(R)$ , dann gilt

$$\left. \begin{array}{l} p \in W^s(A) \quad \Rightarrow \quad p \notin R \\ p \in W^u(R) \quad \Rightarrow \quad p \notin A \end{array} \right\} \Rightarrow p \in M \setminus (A \cup R) \quad .$$

Also ist  $M \setminus (A \cup R) = W^s(A) \cap W^u(R)$ , womit die Disjunktheit obiger Mengen gezeigt wäre. Die Invarianz von  $A$  und  $R$  folgt sofort aus ihrer Definition. Ihre Kompaktheit läßt sich mit Argumenten wie im Beweis von Thm. 2.2.1 zeigen, wir wollen die Idee nur kurz skizzieren: Sei  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i =: p \notin A$ . Nun verbindet  $\mathcal{O}(p)$  genau zwei kritische Punkte  $z_1, z_2 \in \text{Crit } f$ , diese sind im Abschluß von  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}(p_i)$ . Hieraus ergibt sich (sei oBdA  $\text{Ind}_f(z_1) > \text{Ind}_f(z_2)$ )  $\text{Ind}_f(z_1) < \text{Ind}_f(y)$  oder  $z_1 = x$ , also ist auch  $\text{Ind}_f(z_2) < \text{Ind}_f(y)$  und damit  $\{z_1, z_2\} \subset C_A$ ,  $p \in A$ .  $A$  ist also abgeschlossen und, aufgrund der Kompaktheit von  $M$ , auch kompakt. Analog ergibt sich die Kompaktheit von  $R$ .

Wir können  $\text{Crit } f$  auch als Morse-Zerlegung von  $M$  auffassen, die Kompaktheit von  $A$  und  $R$  ist nun die Aussage von [Sa1, Prop. 3.4 (v)].

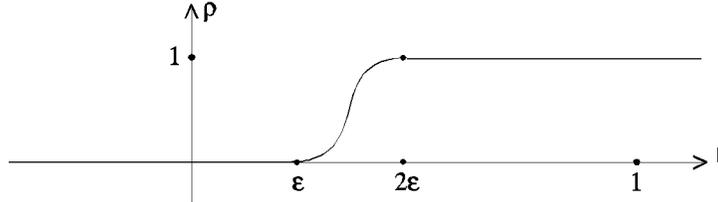
□

Lemma A.1 liefert nun die Existenz einer glatten Lyapunov-Funktion  $\theta: M \rightarrow [0, 1]$  mit

$$(A.36) \quad \theta^{-1}(1) = R \quad , \quad \theta^{-1}(0) = A \quad \text{und} \quad D\theta(p)(\nabla f(p)) > 0, \quad \forall p \in M \setminus (A \cup R) \quad .$$

Sei  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine glatte monoton wachsende Abschneidefunktion mit

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & , r \leq \epsilon \\ 1 & , r \geq 2\epsilon \end{cases} \quad , \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{2} \text{ hinreichend klein} .$$



Figur A.8

Sei nun  $f_c: M \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$(A.37) \quad f_c(p) := f(p) + c \cdot \rho(\theta(p)) \quad , \quad c > 0 .$$

Der zweite Summand bewirkt ein Anheben von  $R$ : Auf  $A$  ist  $\rho$  identisch Null (da  $\theta|_A \equiv 0$ ), beim Entfernen von  $A$  nimmt  $\theta$  zu, wodurch dann  $\rho$  schnell seinen maximalen Wert 1 annimmt.

**Proposition A.5** i) Für jedes  $c > 0$  und jedes hinreichend kleine  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$  gilt:  $\text{Crit } f_c = \text{Crit } f$ .

ii) Es existiert eine isolierende Umgebung  $N$  von  $A$ , so daß gilt:  $f_c|_N = f|_N$ .

iii) Für  $c > b - \inf(f)$  gilt:  $R \subset f_c^{-1}(b, \infty)$ .

BEWEIS i) Die Abbildung  $Df_c(p): T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt sich zu

$$Df_c(p) = Df(p) + c \cdot \rho'(\theta(p)) \cdot D\theta(p) \quad .$$

"  $\supset$  " Sei  $p \in A \cap \text{Crit } f$ , dann ist  $Df(p) = 0$  und  $\rho'(\theta(p)) = 0$  (da  $\theta(p) = 0$ ), woraus folgt  $Df_c(p) = 0$ .

Sei  $p \in R \cap \text{Crit } f$ , dann ist  $Df(p) = 0$  und  $\rho'(\theta(p)) = 0$  (da  $\theta(p) = 1$ ), woraus folgt  $Df_c(p) = 0$ .

"  $\subset$  " Sei  $p \in \text{Crit } f_c$ , wir wählen  $\xi = \nabla f(p) \in T_p M$ , dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= Df_c(p)(\nabla f(p)) = Df(p)(\nabla f(p)) + c \cdot \rho'(\theta(p)) \cdot D\theta(p)(\nabla f(p)) \\ &= \underbrace{\|\nabla f(p)\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{c}_{>0} \cdot \underbrace{\rho'(\theta(p))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{D\theta(p)(\nabla f(p))}_{\geq 0} \quad . \end{aligned}$$

Also muß gelten  $\|\nabla f(p)\|^2 = 0$ , woraus folgt  $\nabla f(p) = 0$  und damit  $Df(p) = 0$ , d.h.  $p \in \text{Crit } f$ .

ii) Sei  $N := \theta^{-1}([0, \epsilon])$ , dann ist für  $p \in N$ :  $f_c(p) = f(p)$ , da  $\theta(p) \in [0, \epsilon]$  und  $\rho|_{[0, \epsilon]} \equiv 0$ . Für  $p \in M \setminus (A \cup R)$  ist  $\theta(p) < 0$ , woraus folgt  $\omega(N) = A$ . Also ist  $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_t N = A$ , d.h.  $N$  ist eine isolierende Umgebung von  $A$ .

iii) Sei  $c > b - \inf(f)$ , also  $c > 0$ . Für  $p \in R$  ist

$$\begin{aligned} f_c(p) &= f(p) + c \cdot \rho(1) = f(p) + c \\ &> f(p) + b - \inf(f) = \underbrace{(f(p) - \inf(f))}_{\geq 0} + b \\ &\geq b \quad . \end{aligned}$$

Also gilt  $f_c^{-1}(b, \infty) \supset R$ . □

Jetzt definieren wir

$$(A.38) \quad C_{\tilde{R}} := \{z \in \text{Crit } f \mid \text{Ind}_f(z) \geq \text{Ind}_f(x)\} \cup \{y\} \quad ,$$

$$(A.39) \quad \tilde{R} := C_{\tilde{R}} \cup \bigcup_{z_1, z_2 \in C_{\tilde{R}}} M_{z_1, z_2} \quad ,$$

$$(A.40) \quad C_{\tilde{A}} := \{z \in \text{Crit } f \mid \text{Ind}_f(z) \leq \text{Ind}_f(y), z \neq y\} \quad ,$$

$$(A.41) \quad \tilde{A} := C_{\tilde{A}} \cup \bigcup_{z_1, z_2 \in C_{\tilde{A}}} M_{z_1, z_2} \quad ,$$

**Proposition A.6**  $\tilde{A}$  und  $\tilde{R}$  sind kompakte invariante Mengen, es gilt  $M = \tilde{A} \dot{\cup} [W^s(\tilde{A}) \cap W^u(\tilde{R})] \dot{\cup} \tilde{R}$ .

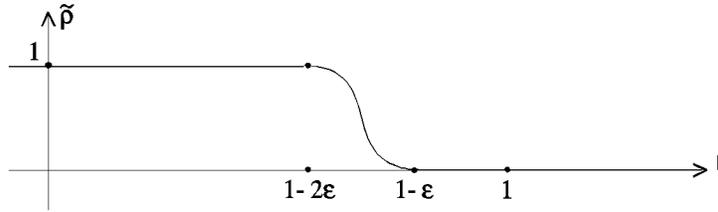
BEWEIS Analog zum Beweis von Prop. A.4.  $\square$

Lemma A.1 liefert nun die Existenz einer glatten Lyapunov-Funktion  $\tilde{\theta}: M \rightarrow [0, 1]$  mit

$$(A.42) \quad \tilde{\theta}^{-1}(1) = \tilde{R} \quad , \quad \tilde{\theta}^{-1}(0) = \tilde{A} \quad \text{und} \quad D\tilde{\theta}(p)(\nabla f(p)) > 0, \quad \forall p \in M \setminus (\tilde{A} \cup \tilde{R}) \quad .$$

Sei  $\tilde{\rho}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine glatte monoton wachsende Abschneidefunktion mit

$$\tilde{\rho}(r) = \begin{cases} 1 & , r \leq 1 - 2\epsilon \\ 0 & , r \geq 1 - \epsilon \end{cases} \quad , \quad 0 < \epsilon < \frac{1}{2} \text{ hinreichend klein} \quad .$$



Figur A.9

Sei nun  $f_{\tilde{c}}: M \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$(A.43) \quad f_{\tilde{c}}(p) := f(p) + \tilde{c} \cdot \tilde{\rho}(\tilde{\theta}(p)) \quad , \quad \tilde{c} < 0 \quad .$$

Der zweite Summand bewirkt ein Absenken von  $\tilde{A}$ : Auf  $\tilde{R}$  ist  $\tilde{\rho}$  identisch Null (da  $\tilde{\theta}|_{\tilde{R}} \equiv 1$ ), beim Entfernen von  $\tilde{R}$  nimmt  $\tilde{\theta}$  ab, wodurch dann  $\tilde{\rho}$  schnell seinen maximalen Wert 1 annimmt.

**Proposition A.7** i) Für jedes  $\tilde{c} < 0$  und jedes hinreichend kleine  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$  gilt:  $\text{Crit } f_{\tilde{c}} = \text{Crit } f$ .

ii) Es existiert eine isolierende Umgebung  $\tilde{N}$  von  $\tilde{R}$ , so daß gilt:  $f_{\tilde{c}}|_{\tilde{N}} = f|_{\tilde{N}}$ .

iii) Für  $\tilde{c} < a - \sup(f)$  gilt:  $\tilde{A} \subset f_{\tilde{c}}^{-1}((-\infty, a))$ .

BEWEIS i) Die Abbildung  $Df_{\tilde{c}}(p): T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt sich zu

$$Df_{\tilde{c}}(p) = Df(p) + \tilde{c} \cdot \tilde{\rho}'(\tilde{\theta}(p)) \cdot D\tilde{\theta}(p) \quad .$$

" $\supset$ " Sei  $p \in \tilde{A} \cap \text{Crit } f$ , dann ist  $Df(p) = 0$  und  $\tilde{\rho}'(\tilde{\theta}(p)) = 0$  (da  $\tilde{\theta}(p) = 0$ ), woraus folgt  $Df_{\tilde{c}}(p) = 0$ .

Sei  $p \in \tilde{R} \cap \text{Crit } f$ , dann ist  $Df(p) = 0$  und  $\tilde{\rho}'(\tilde{\theta}(p)) = 0$  (da  $\tilde{\theta}(p) = 1$ ), woraus folgt  $Df_{\tilde{c}}(p) = 0$ .

" $\subset$ " Sei  $p \in \text{Crit } f_{\tilde{c}}$ , wir wählen  $\xi = \nabla f(p) \in T_p M$ , dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= Df_{\tilde{c}}(p)(\nabla f(p)) = Df(p)(\nabla f(p)) + \tilde{c} \cdot \tilde{\rho}'(\tilde{\theta}(p)) \cdot D\tilde{\theta}(p)(\nabla f(p)) \\ &= \underbrace{\|\nabla f(p)\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{c} \cdot \tilde{\rho}'(\tilde{\theta}(p))}_{< 0} \cdot \underbrace{D\tilde{\theta}(p)(\nabla f(p))}_{\geq 0} \quad . \end{aligned}$$

Also muß gelten  $\|\nabla f(p)\|^2 = 0$ , woraus folgt  $\nabla f(p) = 0$  und damit  $Df(p) = 0$ , d.h.  $p \in \text{Crit } f$ .

ii) Sei  $\tilde{N} := \tilde{\theta}^{-1}([1 - \epsilon, 1])$ , dann ist für  $p \in \tilde{N}$ :  $f_{\tilde{c}}(p) = f(p)$ , da  $\tilde{\theta}(p) \in [1 - \epsilon, 1]$  und  $\tilde{\rho}|_{[1 - \epsilon, 1]} \equiv 0$ . Für  $p \in M \setminus (\tilde{A} \cup \tilde{R})$  ist  $\tilde{\theta}(p) < 0$ , woraus folgt  $\alpha(\tilde{N}) = \tilde{R}$ . Also ist  $\bigcap_{t \in [0, 1 - \epsilon]} \phi_t \tilde{N} = \tilde{R}$ , d.h.  $\tilde{N}$  ist eine isolierende Umgebung von  $\tilde{R}$ .

iii) Sei  $\tilde{c} < a - \sup(f)$ , also  $\tilde{c} < 0$ . Für  $p \in \tilde{A}$  ist

$$\begin{aligned}
f_{\tilde{c}}(p) &= f(p) + \tilde{c} \cdot \tilde{\rho}(0) = f(p) + \tilde{c} \\
&< f(p) + a - \sup(f) = \underbrace{(f(p) - \sup(f))}_{\leq 0} + a \\
&\leq a \quad .
\end{aligned}$$

Also gilt  $f_{\tilde{c}}^{-1}((-\infty, a)) \supset \tilde{A}$ . □

Sei nun  $f_{c, \tilde{c}}: M \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$(A.44) \quad f_{c, \tilde{c}}(p) := f(p) + c \cdot \rho(\theta(p)) + \tilde{c} \cdot \tilde{\rho}(\tilde{\theta}(p)) \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \tilde{c} < 0 .$$

Wie in (A.37) bewirkt der zweite Summand ein Anheben von  $R$ , der dritte bewirkt wie in (A.43) ein Absenken von  $\tilde{A}$ . Es ist zu beachten, daß sowohl  $x$  als auch  $y$  weder in  $R$  noch in  $\tilde{A}$  enthalten sind.

**Lemma A.8** i) Für jedes  $c > 0$ ,  $\tilde{c} < 0$  und jedes hinreichend kleine  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$  gilt:  $\text{Crit } f_{c, \tilde{c}} = \text{Crit } f$ .

ii)  $N \cap \tilde{N}$  ist eine isolierende Umgebung von  $S(x, y)$  und es gilt:  $f_{c, \tilde{c}}|_{N \cap \tilde{N}} = f|_{N \cap \tilde{N}}$ .

iii) Für  $c > b - \inf(f)$  und  $\tilde{c} < a - \sup(f)$  gilt:  $f_{c, \tilde{c}}^{-1}([a, b]) \cap \text{Crit } f_{c, \tilde{c}} = \{x, y\}$ .

BEWEIS i) Die Abbildung  $Df_{c, \tilde{c}}(p): T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt sich zu

$$Df_{c, \tilde{c}}(p) = Df(p) + c \cdot \rho'(\theta(p)) \cdot D\theta(p) + \tilde{c} \cdot \tilde{\rho}'(\tilde{\theta}(p)) \cdot D\tilde{\theta}(p) \quad .$$

" $\supset$ " Sei  $p \in \text{Crit } f$ , d.h.  $Df(p) = 0$ . Andererseits ist  $p \in (A \cup R) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{R}) = (A \cap \tilde{A}) \cup (R \cap \tilde{A}) \cup (A \cap \tilde{R}) \cup (R \cap \tilde{R})$ , wir unterscheiden also vier Fälle:

$$\begin{aligned}
p \in (A \cap \tilde{A}) &\Rightarrow \begin{cases} \theta(p) = 0 \\ \tilde{\theta}(p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho'(0) = 0 \\ \tilde{\rho}'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow Df_{c, \tilde{c}}(p) = 0 \\
p \in (R \cap \tilde{A}) &\Rightarrow \begin{cases} \theta(p) = 1 \\ \tilde{\theta}(p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho'(1) = 0 \\ \tilde{\rho}'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow Df_{c, \tilde{c}}(p) = 0 \\
p \in (A \cap \tilde{R}) &\Rightarrow \begin{cases} \theta(p) = 0 \\ \tilde{\theta}(p) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho'(0) = 0 \\ \tilde{\rho}'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow Df_{c, \tilde{c}}(p) = 0 \\
p \in (R \cap \tilde{R}) &\Rightarrow \begin{cases} \theta(p) = 1 \\ \tilde{\theta}(p) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho'(1) = 0 \\ \tilde{\rho}'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow Df_{c, \tilde{c}}(p) = 0
\end{aligned}$$

" $\subset$ " Sei  $p \in \text{Crit } f_{c, \tilde{c}}$ , wir wählen  $\xi = \nabla f(p) \in T_p M$ , dann ist

$$\begin{aligned}
0 &= Df_{c, \tilde{c}}(p)(\nabla f(p)) = Df(p)(\nabla f(p)) + c \cdot \rho'(\theta(p)) \cdot D\theta(p)(\nabla f(p)) + \tilde{c} \cdot \tilde{\rho}'(\tilde{\theta}(p)) \cdot D\tilde{\theta}(p)(\nabla f(p)) \\
&= \underbrace{\|\nabla f(p)\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{c}_{> 0} \cdot \underbrace{\rho'(\theta(p))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{D\theta(p)(\nabla f(p))}_{\geq 0} + \underbrace{\tilde{c}}_{< 0} \cdot \underbrace{\tilde{\rho}'(\tilde{\theta}(p))}_{\leq 0} \cdot \underbrace{D\tilde{\theta}(p)(\nabla f(p))}_{\geq 0} \quad .
\end{aligned}$$

Also muß gelten  $\|\nabla f(p)\|^2 = 0$ , woraus folgt  $\nabla f(p) = 0$  und damit  $Df(p) = 0$ , d.h.  $p \in \text{Crit } f$ .

ii) Es ist  $N \cap \tilde{N} = \theta^{-1}([0, \epsilon]) \cap \tilde{\theta}^{-1}([1 - \epsilon, 1])$ , dann ist für  $p \in N \cap \tilde{N}$ :  $f_{c, \tilde{c}}(p) = f(p)$ , da  $\theta(p) \in [0, \epsilon]$  und  $\rho|_{[0, \epsilon]} \equiv 0$ , sowie  $\tilde{\theta}(p) \in [1 - \epsilon, 1]$  und  $\tilde{\rho}|_{[1 - \epsilon, 1]} \equiv 0$ . Es war  $\theta^{-1}([0, \epsilon])$  eine isolierende Umgebung von  $A$  und  $\tilde{\theta}^{-1}([1 - \epsilon, 1])$  eine ebensolche von  $\tilde{R}$ , dann besagt [Sal, Bem. vor Lemma 3.7], daß  $\theta^{-1}([0, \epsilon]) \cap \tilde{\theta}^{-1}([1 - \epsilon, 1])$  eine isolierende Umgebung von  $A \cap \tilde{R}$  ist. Aus der Definition von  $A$  und  $\tilde{R}$  erhalten wir  $A \cap \tilde{R} = \{x, y\} \cup M_{x, y} = S(y, x)$ .

iii) Es ist  $\text{Crit } f_{c, \tilde{c}} = \text{Crit } f = C_R \dot{\cup} C_{\tilde{A}} \dot{\cup} \{x, y\}$ . Sei  $z \in \text{Crit } f_{c, \tilde{c}} \setminus \{x, y\}$ , also  $z \in C_R \dot{\cup} C_{\tilde{A}}$ . Wir unterscheiden nun diese beiden Fälle:

$$\begin{aligned}
z \in C_R &\Rightarrow z \notin C_{\bar{A}}, \text{ also } z \in C_{\bar{R}} \Rightarrow f_{c, \bar{c}}(z) = f(z) + c \cdot \overbrace{\rho(\theta(z))}^{\substack{=1 \\ =1}} + \bar{c} \cdot \overbrace{\tilde{\rho}(\tilde{\theta}(z))}^{\substack{=0 \\ =1}} \\
&= f(z) + c > f(z) + b - \inf(f) \\
&= \underbrace{f(z) - \inf(f)}_{\geq 0} + b \geq b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z \in C_{\bar{A}} &\Rightarrow z \notin C_R, \text{ also } z \in C_A \Rightarrow f_{c, \bar{c}}(z) = f(z) + c \cdot \overbrace{\rho(\theta(z))}^{\substack{=0 \\ =0}} + \bar{c} \cdot \overbrace{\tilde{\rho}(\tilde{\theta}(z))}^{\substack{=1 \\ =0}} \\
&= f(z) + \bar{c} > f(z) + a - \sup(f) \\
&= \underbrace{f(z) - \sup(f)}_{\leq 0} + a \leq a
\end{aligned}$$

Also gilt  $f_{c, \bar{c}}^{-1}([a, b]) \cap \text{Crit } f_{c, \bar{c}} = \{x, y\}$ .

□

## *Appendix B*

# *Kompaktheit von Trajektorienfolgen - analytischer Ansatz*

Wir wollen in diesem Appendix ein, Thm 2.2.1 entsprechendes, Kompaktheitsresultat für Trajektorien diskutieren. Dieses findet sich in einer Arbeit von M. Poźniak [Po, Prop. 1.1] und geht zurück auf eine Idee von D. Salamon zum Beweis der Kompaktheit der Trajektorienräume in der Floer-Homologie [Sa2, Prop. 4.2]. Das Kompaktheitsresultat liefert eine vierte Version des Beweises der endlichen Anzahl von isolierten Orbits.

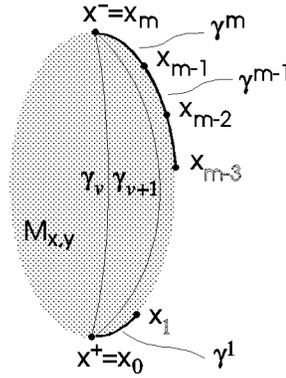
Sei  $M^n$  eine glatte geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^r(M, \mathbb{R})$  mit  $r \geq 2$  sei eine Morse-Funktion. Wie in Abschnitt 1.1 gezeigt (siehe (1.1.15) und (1.1.17)), sind die Trajektorien  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  des negativen Gradientenvektorfeldes – also die Lösungen der ODE  $\frac{d}{dt} \gamma(t) = -\nabla f(\gamma(t))$  – Elemente des Funktionenraumes  $C^r(\mathbb{R}, M)$ .

Seien  $x^-, x^+ \in \text{Crit } f$ , wir definieren den **Trajektorienraum von  $x^-$  und  $x^+$**

$$(B.1) \quad \mathcal{M}_{x^-, x^+} := \{ \text{Trajektorien } \gamma: \mathbb{R} \rightarrow M \text{ von } -\nabla f \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) = x^\pm \} \subset C^r(\mathbb{R}, M) \quad .$$

**Lemma B.1** Sei  $x^- \neq x^+$ , dann gilt: Jede Folge  $\{\gamma_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{x^-, x^+}$  besitzt eine konvergente Teilfolge (selbe Bezeichnung) in folgendem Sinn: Es existieren kritische Punkte  $x^+ = x_0, x_1, \dots, x_m = x^-$  von  $f, m \in \{1, \text{Ind}_f(x^-) - \text{Ind}_f(x^+)\}$  geeignet, Trajektorien  $\gamma^k \in \mathcal{M}_{x_k, x_{k-1}}$  und Folgen von Zeit-Translationen  $\{s_\nu^k\}_{\nu \in \mathbb{N}}, k = 1, \dots, m$ , so daß  $\gamma_\nu(\cdot + s_\nu^k)$  samt den ersten  $r$  Ableitungen gleichmäßig auf kompakten Zeitintervallen gegen  $\gamma^k(\cdot)$  konvergiert, d.h. es gilt

$$\gamma_\nu(\cdot + s_\nu^k) \xrightarrow{C_{loc}^r(\cdot, M)} \gamma^k(\cdot) \quad .$$



Figur B.1

BEWEIS Zuerst überlegen wir uns, daß es reicht  $\{s_\nu^k\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  und  $\gamma^k$  zu finden, so daß gilt

$$(B.2) \quad \gamma_\nu(s_\nu^k) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \gamma^k(0) \quad .$$

Sei  $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  der zu  $-\nabla f$  gehörende Gradientenfluß, d.h. es ist  $\phi_t \cdot p = \gamma(\cdot)$  falls  $\gamma(0) = p$ . Nun folgt unter Verwendung von  $\phi_t \cdot p \in C^r(\mathbb{R}, M)$

$$(B.3) \quad \begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \gamma_\nu(t + s_\nu^k) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\gamma_\nu(t + h + s_\nu^k) - \gamma_\nu(t + s_\nu^k)}{h} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\phi_{t+h}(\gamma_\nu(s_\nu^k)) - \phi_t(\gamma_\nu(s_\nu^k))}{h} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \phi_t(\gamma_\nu(s_\nu^k)) \\ &= \frac{d}{dt} \phi_t \left( \lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_\nu(s_\nu^k) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \phi_t(\gamma^k(0)) \\ &= \frac{d}{dt} \gamma^k(t) \quad . \end{aligned}$$

Analog folgt

$$(B.4) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{d^s}{dt^s} \gamma_\nu(t + s_\nu^k) = \frac{d^s}{dt^s} \gamma^k(t) \quad , \quad 1 \leq s \leq r \quad .$$

Diese Konvergenz ist zunächst punktweise für festes  $t$ . Jetzt betrachten wir die stetige Funktion

$$(B.5) \quad g_\nu(t) := \left| \frac{d^s}{dt^s} \gamma_\nu(t + s_\nu^k) - \frac{d^s}{dt^s} \gamma^k(t) \right| \quad , \quad t \in [-\tau, \tau] \quad , \quad 1 \leq s \leq r \quad .$$

Sie nimmt für jedes  $\nu$  auf dem Kompaktum  $[-\tau, \tau] \subset \mathbb{R}$  ein Maximum  $m_\nu := g_\nu(t_\nu)$  an einer Stelle  $t_\nu$  an.  $\{t_\nu\}_\nu \in \mathbb{R}$  besitzt im Kompaktum  $[-\tau, \tau]$  eine (gleichbezeichnete) konvergente Teilfolge. Es gilt  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} m_\nu = 0$ , denn sonst würde  $\gamma_\nu^{(s)}(t + s_\nu^k)$  an der Stelle  $t_0 := \lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu$  nicht gegen  $\gamma^{k(s)}(t_0)$  konvergieren, was ein Widerspruch zur oben gezeigten punktweisen Konvergenz wäre. Das hochgestellte  $s$  gibt hier den Grad der Ableitung an.

Die punktweise Konvergenz  $\gamma_\nu(s_\nu^k) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \gamma^k(0)$  liefert also die gleichmäßige Konvergenz

$$(B.6) \quad \max_{t \in [-\tau, \tau]} \left| \frac{d^s}{dt^s} \gamma_\nu(t + s_\nu^k) - \frac{d^s}{dt^s} \gamma^k(t) \right| \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \quad , \quad 1 \leq s \leq r \quad ,$$

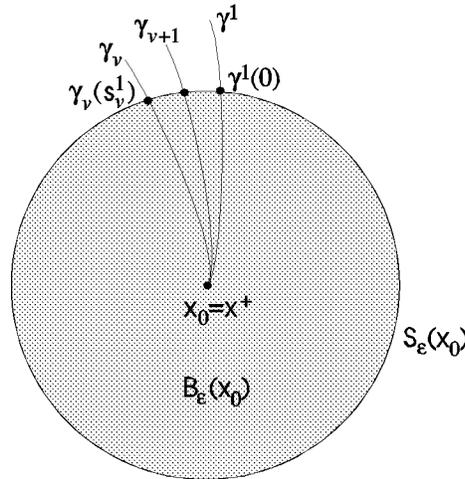
der ersten  $r$  Ableitungen auf Kompakta.

Zum Existenzbeweis der kritischen Punkte  $x_0, \dots, x_m$ , Trajektorien  $\gamma^k \in \mathcal{M}_{x_k, x_{k-1}}$  und Folgen  $\{s_\nu^k\}_\nu \in \mathbb{R}$  gehen wir induktiv (in  $k$ ) vor. Zuerst wählen wir jedoch ein  $\epsilon > 0$ , so daß  $d(x, y) > 2\epsilon$  für alle  $x, y \in \text{Crit } f$ . Da  $f$  nur endlich viele kritische Punkte besitzt (Prop. 1.2.5), existiert so ein  $\epsilon$ .

**Induktionsverankerung:** Sei  $k = 1$ , wir definieren

$$(B.7) \quad s_\nu^1 := \sup \{s \in \mathbb{R} \mid d(\gamma_\nu(s), x_0) > \epsilon\} \quad .$$

$\gamma_\nu(s_\nu^1)$  liegt also auf der  $\epsilon$ -Sphäre  $S_\epsilon(x_0)$  um  $x_0$  und  $\gamma_\nu([s_\nu^1, \infty)) \subset B_\epsilon(x_0)$ . Die Folge  $\{\gamma_\nu(s_\nu^1)\}_\nu \in S_\epsilon(x_0)$  besitzt wegen der Kompaktheit von  $S_\epsilon(x_0)$  eine konvergente Teilfolge (selbe Bezeichnung). Wir bezeichnen mit  $\gamma^1$  die Trajektorie, die den Anfangswert  $\gamma^1(0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_\nu(s_\nu^1) \in S_\epsilon(x_0)$  besitzt. Es ergibt sich qualitativ ein Bild wie in Figur B.2.



Figur B.2

Jetzt ist noch zu zeigen:  $\gamma^1 \in \mathcal{M}_{x_1, x_0}$ , wobei  $x_1 \in \text{Crit } f$  ist. Es ist

$$(B.8) \quad \begin{aligned} d(\gamma^1(t), x_0) &= d\left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_\nu(s_\nu^1 + t), x_0\right) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} d(\gamma_\nu(s_\nu^1 + t), x_0) \leq \epsilon \quad , \quad \text{für } t > 0 \text{ beliebig,} \end{aligned}$$

weil für jedes  $\nu$  und  $t > 0$  gilt:  $d(\gamma_\nu(s_\nu^1 + t), x_0) < \epsilon$ .

Sei  $\{t_l\}_l \in \mathbb{R}$  eine Folge mit  $t_l > 0$  und  $\lim_{l \rightarrow \infty} t_l = \infty$ . Dann ist

$$(B.9) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} d(\gamma^1(t_l), x_0) \leq \epsilon \quad ,$$

da

$$(B.10) \quad d(\gamma^1(t_l), x_0) \leq \epsilon \quad \text{für jedes } t_l > 0 \quad .$$

Es ist also

$$(B.11) \quad \omega(\gamma^1(0)) \subset \overline{B_\epsilon(x_0)} \quad .$$

Die einzige invariante Menge in  $\overline{B_\epsilon(x_0)}$  ist jedoch der kritische Punkt  $x_0$ , also  $\omega(\gamma^1(0)) = x_0$ . Anders ausgedrückt:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma^1(t) = x_0$ .

Da eine Trajektorie eines Gradientenflusses auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M$  genau zwei kritische Punkte verbindet (Prop. 1.3.7), gilt:

$$(B.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma^1(t) = x_1 \quad , \quad x_1 \in \text{Crit } f \text{ geeignet .}$$

**Induktionsvoraussetzung:** Es seien bereits kritische Punkte  $x_k$ , Trajektorien  $\gamma^k \in \mathcal{M}_{x_k, x_{k-1}}$  und Folgen  $\{s_\nu^k\}_\nu \in \mathbb{R}$  für  $k = 1, \dots, j$  gefunden, so daß gilt :

$$(B.13) \quad \gamma_\nu(\cdot + s_\nu^k) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \gamma^k(0) \quad .$$

**Induktionsschritt ( $j \Rightarrow j+1$ ):** Sei  $x_j \neq x_m$ , sonst wären wir schon fertig. Es ist  $d(\gamma_\nu(t), x_j) > \epsilon$  für  $-t$  hinreichend groß, denn es gilt  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_\nu(t) = x_m$  nach Voraussetzung und  $d(x_m, x_j) > 2\epsilon$ , ebenfalls nach Voraussetzung. Weiterhin existiert ein  $s^* < 0$  derart, daß

$$(B.14) \quad d(\gamma^j(t), x_j) < \epsilon \quad \text{für } t \leq s^* \quad .$$

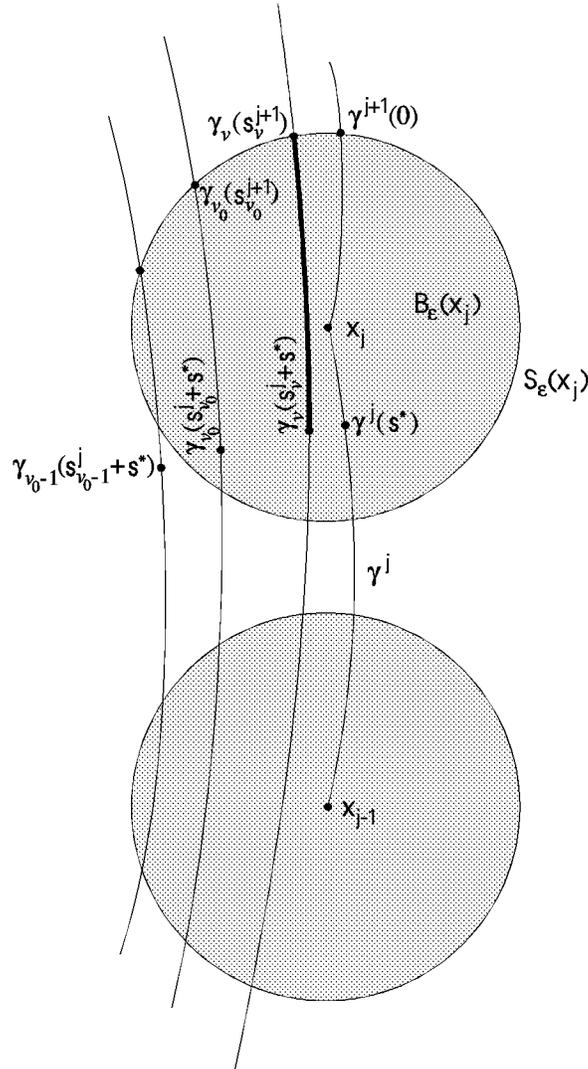
Dies folgt aus  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma^j(t) = x_j$  nach der Induktionsvoraussetzung. Es ist

$$(B.15) \quad \begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} d(\gamma_\nu(s_\nu^j + s^*), x_j) &= d\left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_\nu(s_\nu^j + s^*), x_j\right) \\ &= d(\gamma^j(s^*), x_j) < \epsilon \quad , \end{aligned}$$

hieraus folgt die Existenz eines  $\nu_0 \in \mathbb{N}$  mit  $d(\gamma_\nu(s_\nu^j + s^*), x_j) < \epsilon$  für alle  $\nu \geq \nu_0$ . Für  $\nu \geq \nu_0$  definieren wir

$$(B.16) \quad s_\nu^{j+1} := \inf \{t \in \mathbb{R} \mid t < s_\nu^j + s^* \text{ und } d(\gamma_\nu(\sigma), x_j) < \epsilon \text{ für } t < \sigma < s_\nu^j + s^*\} \quad ,$$

für  $\nu < \nu_0$  sei  $s_\nu^{j+1} := 0$ . Wir haben qualitativ eine Situation wie in Bild B.3.



Figur B.3

$s_\nu^{j+1}$  ist also die kleinste Zeit, so daß  $\gamma_\nu([s_\nu^{j+1}, s_\nu^j + s^*]) \subset B_\epsilon(x_j)$  ist. Die Differenz  $(s_\nu^j + s^*) - s_\nu^{j+1}$  ist die Zeit, die benötigt wird, um von  $\gamma_\nu(s_\nu^{j+1})$  auf der Trajektorie  $\gamma_\nu$  nach  $\gamma_\nu(s_\nu^j + s^*)$  zu gelangen. Diese Strecke ist in Figur B.3 dick eingezeichnet. Es ist  $\{\gamma_\nu(s_\nu^{j+1})\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset S_\epsilon(x_j)$  und wir finden deswegen eine konvergente Teilfolge (selbe Bezeichnung).

Wir bezeichnen mit  $\gamma^{j+1}$  den Orbit, der den Anfangswert

$$(B.17) \quad \gamma^{j+1}(0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_\nu(s_\nu^{j+1}) \in S_\epsilon(x_j)$$

besitzt. Es bleibt zu zeigen:  $\gamma^{j+1} \in \mathcal{M}_{x_{j+1}, x_j}$  mit  $x_{j+1} \in \text{Crit } f$ . Daß  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma^{j+1}(t) =: x_{j+1}$  existiert und ein kritischer Punkt von  $f$  ist, folgt mit demselben Argument, wie in der Induktionsverankerung. Wir müssen also noch zeigen

$$(B.18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma^{j+1}(t) = x_j \quad .$$

Wir wissen, daß

$$(B.19) \quad \gamma_\nu([s_\nu^{j+1}, s_\nu^j + s^*]) \subset \overline{B_\epsilon(x_j)} \quad .$$

Die Strategie ist nun die Intervalllänge  $(s_\nu^j + s^*) - s_\nu^{j+1}$  für  $\nu \rightarrow \infty$  zu betrachten. Falls gilt

$$(B.20) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} (s_\nu^j + s^* - s_\nu^{j+1}) = \infty \quad ,$$

dann folgt, daß  $\gamma^{j+1}(t) \in \overline{B_\epsilon(x_j)}$  für jedes  $t \geq 0$  (weil  $\gamma^{j+1}(t)$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $\gamma_\nu(s_\nu^{j+1} + t) \in B_\epsilon(x_j)$  liegt, falls  $\nu$  hinreichend groß ist und weil die Zeit, um von  $\gamma_\nu(s_\nu^{j+1})$  nach  $\gamma_\nu(s_\nu^j + s^*)$  zu gelangen, gerade  $s_\nu^j + s^* - s_\nu^{j+1}$  ist). Damit ist dann wieder  $\omega(\gamma^{j+1}(0)) \subset \overline{B_\epsilon(x_j)}$  und – da  $x_j$  die einzige invariante Menge in  $\overline{B_\epsilon(x_j)}$  ist – gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma^{j+1}(t) = x_j$ .

Jetzt zur Intervalllänge: Wir nehmen an

$$(B.21) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} (s_\nu^j + s^* - s_\nu^{j+1}) =: c < \infty \quad \text{und} \quad c > 0 \quad .$$

Es ist

$$(B.22) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_\nu(s_\nu^j + s^*) = \gamma^j(s^*)$$

und

$$(B.23) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_\nu(s_\nu^{j+1}) = \gamma^{j+1}(0) \quad .$$

Die Zeit, um von  $\gamma_\nu(s_\nu^{j+1})$  nach  $\gamma_\nu(s_\nu^j + s^*)$  zu gelangen, ist  $s_\nu^j + s^* - s_\nu^{j+1}$ . Von  $\gamma^{j+1}(0)$  nach  $\gamma^j(s^*)$  wird die Zeit

$$(B.24) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} (s_\nu^j + s^* - s_\nu^{j+1}) = c$$

benötigt. Da  $0 < c < \infty$  ist, gilt  $\phi_c(\gamma^j(s^*)) = \gamma^{j+1}(0)$ , also  $\gamma^j(s^* - c) = \gamma^{j+1}(0)$ . Nach Konstruktion ist aber  $\gamma^{j+1}(0) \in S_\epsilon(x_j)$  und  $\gamma^j(s^* - c) \in B_\epsilon(x_j)$ , da  $-c < 0$  ist. Da  $S_\epsilon(x_j) \cap B_\epsilon(x_j) = \emptyset$  ist, haben wir einen Widerspruch. Damit ist der Induktionsschritt beendet.

Da nun  $f$  nur endlich viele kritische Punkte besitzt (Prop. 1.2.5), bricht das Induktionsverfahren nach endlich vielen Schritten ab. Aus der Morse-Smale Bedingung folgt, analog zu (2.2.5), daß gilt:

$$\text{Ind}_f(x^+ = x_0) < \text{Ind}_f(x_1) < \dots < \text{Ind}_f(x_m = x^-) \quad .$$

Hieraus folgt  $m \leq \text{Ind}_f(x^-) - \text{Ind}_f(x^+)$ . □

Aus Lemma B.1 folgt jetzt ein weiterer

BEWEIS (von Kor. 2.2.2, VERSION 4) Sei  $\text{Ind}_f(x^-) - \text{Ind}_f(x^+) = 1$ , dann besitzt nach Lemma B.1 jede Folge  $\{\gamma_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{x^-, x^+}$  eine Teilfolge (selbe Bezeichnung), welche gleichmäßig auf kompakten Zeitintervallen gegen eine Trajektorie  $\gamma^1 \in \mathcal{M}_{x^-, x^+}$  konvergiert. Der Raum  $\mathcal{M}_{x^-, x^+}$  ist also kompakt, insbesondere abgeschlossen.

Wir können nun  $\mathcal{M}_{x^-, x^+}/\mathbb{R}$  mit dem Orbitraum  $\hat{M}_{x^-, x^+}$  identifizieren: Seien zunächst  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{M}_{x^-, x^+}$ , wir definieren

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \gamma_1(\cdot) = \gamma_2(t + \cdot) \quad .$$

Durch diese Äquivalenzrelation ist  $\mathcal{M}_{x^-, x^+}/\mathbb{R}$  definiert. Die Identifikation mit  $\hat{M}_{x^-, x^+}$  ist nun so, daß wir ein  $[\gamma_1] \in \mathcal{M}_{x^-, x^+}/\mathbb{R}$  mit  $\gamma_1(\mathbb{R}) \cap f^{-1}(d) \in \hat{M}_{x^-, x^+}$  identifizieren ( $d \in [f(x^+), f(x^-)]$  sei ein regulärer Wert). Diese Identifikation stellt einen Isomorphismus dar.

Da nun jede Folge in  $\mathcal{M}_{x^-, x^+}$  eine konvergente Teilfolge besitzt, gilt dies auch für  $\mathcal{M}_{x^-, x^+}/\mathbb{R}$  (bzgl. der Quotiententopologie) und damit für  $\hat{M}_{x^-, x^+}$ , d.h. wir haben Kompaktheit dieser drei Räume. Wenn nun  $\#\hat{M}_{x^-, x^+} = \infty$  wäre, so hätte die Folge  $\{\hat{p}_i\}_i \in \hat{M}_{x^-, x^+}$ ,  $\hat{p}_i \in \hat{M}_{x^-, x^+}$  mit  $\hat{p}_i \neq \hat{p}_j$  für  $i \neq j$ , aufgrund der Kompaktheit von  $M$ , einen Häufungspunkt HP. Andererseits wäre aber  $\text{HP} \in \hat{M}_{x^-, x^+}$ , ein Widerspruch zur Tatsache, daß die Elemente von  $\hat{M}_{x^-, x^+}$  0-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von  $M$  und damit isoliert sind.  $\square$

## Appendix C

# Verträglichkeit von Glueing und Orientierung

Unter der Überschrift "ORIENTIERUNG VON  $\mathbb{R}^2$  UND DER VEKTORRAUM  $\wedge^2 \mathbb{R}^2$ " diskutieren wir, wie eine Orientierung von  $\mathbb{R}^2$  mit Elementen des antisymmetrischen Tensorprodukts  $\wedge^2 \mathbb{R}^2$  identifiziert werden kann.

Im folgenden Teil "ORIENTIERUNGS-GLUEING" modifizieren wir die, in Abschnitt 2.3 eingeführte, Glueing-Abbildung  $\cdot \# \cdot$  und erhalten eine neue Glueing-Abbildung

$$\cdot \tilde{\#} \cdot : U(p) \times U(q) \rightarrow M_{x,z}^i \quad ,$$

wobei  $U(p)$  und  $U(q)$  Umgebungen der Punkte  $p \in \mathcal{O}(\hat{u})$  bzw.  $q \in \mathcal{O}(\hat{v})$  sind,  $\hat{u} \in \hat{M}_{x,y}$ ,  $\hat{v} \in \hat{M}_{y,z}$  mit  $Ind_f(x) - Ind_f(z) = 2$ . Die Linearisierung  $D\tilde{\#}(p,q)$  ist ein Vektorraumisomorphismus, induziert daher eine Orientierung des Vektorraums  $T_{\tilde{\#}(p,q)} M_{x,z}^i$  und damit der Mannigfaltigkeit  $M_{x,z}^i$ .

Im letzten Teil "DIE AUF  $M_{x,z}^i$  INDUZIERT E ORIENTIERUNG" untersuchen wir selbige für cobordante 1-fach gebrochene Orbits. Für solche cobordanten 1-fach gebrochenen Orbits  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  und  $(\hat{u}_2, \hat{v}_2)$ , welche wir mittels der charakteristischen Vorzeichen aus Abschnitt 3.1 auf kanonische Weise durch  $(n_{u_1} \hat{u}_1, n_{v_1} \hat{v}_1)$  bzw.  $(n_{u_2} \hat{u}_2, n_{v_2} \hat{v}_2)$  orientieren, stellt sich heraus, daß die auf  $M_{x,z}^i$  induzierten Orientierungen übereinstimmen, d.h. daß gilt

$$D\tilde{\#}^{Or}(p_1, q_1) (n_{u_1} \hat{u}_1 \wedge n_{v_1} \hat{v}_1) = D\tilde{\#}^{Or}(p_2, q_2) (n_{u_2} \hat{u}_2 \wedge n_{v_2} \hat{v}_2) \quad .$$

ORIENTIERUNG VON  $\mathbb{R}^2$  UND DER VEKTORRAUM  $\wedge^2 \mathbb{R}^2$ 

Wir wollen noch einmal auf den Begriff der Orientierung eines Vektorraumes  $V$  im Falle  $V \simeq \mathbb{R}^2$  zurückkommen. Betrachten wir zunächst das Tensorprodukt  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ . Es ist  $\dim \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 = 4$ , eine Basis ist durch

$$(C.1) \quad \{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$$

gegeben. Hierbei sei  $\{e_1, e_2\}$  die kanonische ONB des  $\mathbb{R}^2$ . Eine andere Basis von  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  wäre z.B.

$$(C.2) \quad \{e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1), \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)\} .$$

Der sogenannte **Alternierungsoperator**  $\mathcal{A}$  ist definiert durch lineare Fortsetzung der Abbildung

$$(C.3) \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \\ e_i \otimes e_j &\mapsto \mathcal{A}(e_i \otimes e_j) := e_i \wedge e_j \\ &:= \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j) - \frac{1}{2}(e_j \otimes e_i) \quad , i, j \in \{1, 2\} . \end{aligned}$$

Wir definieren  $\wedge^2 \mathbb{R}^2 := \text{Im } \mathcal{A}$ .  $\wedge^2 \mathbb{R}^2$  ist ein Vektorraum der Dimension 1, denn nach dem Homomorphiesatz für Vektorräume gilt

$$(C.4) \quad \wedge^2 \mathbb{R}^2 := \text{Im } \mathcal{A} \simeq \frac{\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2}{\text{Ker } \mathcal{A}} \simeq \frac{\mathbb{R}^4}{\mathbb{R}^3} \simeq \mathbb{R} .$$

Es bleibt zu zeigen:  $\text{Ker } \mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^3$ . Dies zeigen wir durch Anwendung von  $\mathcal{A}$  auf drei Basiselemente von  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ :

$$(C.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}(e_1 \otimes e_1) &= \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_1) - \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_1) = 0 \\ \mathcal{A}(e_2 \otimes e_2) &= \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_2) - \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_2) = 0 \\ \mathcal{A}\left(\frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)\right) &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}(e_1 \otimes e_2) + \mathcal{A}(e_2 \otimes e_1)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2) - \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_1) + \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_1) - \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2)\right) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Weiter ist

$$(C.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}\left(\frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)\right) &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}(e_1 \otimes e_2) - \mathcal{A}(e_2 \otimes e_1)) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_2) - \frac{1}{2}(e_2 \wedge e_1) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_2) + \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_2) \\ &= e_1 \wedge e_2 . \end{aligned}$$

Also können wir  $e_1 \wedge e_2$  als Basiselement des 1-dimensionalen Vektorraumes  $\wedge^2 \mathbb{R}^2$  nehmen. Nach Definition von  $\mathcal{A}$  gilt offenbar:  $v \wedge w = -w \wedge v$ ,  $\forall v, w \in \mathbb{R}^2$ . Nun wollen wir ausnützen, daß, sowohl  $\wedge^2 \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , als auch  $Gl(2, \mathbb{R}) \simeq \{\text{geordnete Basen des } \mathbb{R}^2\}$ , aus zwei Zusammenhangskomponenten bestehen. Die eine Zusammenhangskomponente von  $Gl(2, \mathbb{R})$  besteht aus denjenigen Elementen mit positiver, die andere aus denen mit negativer Determinante.

**Proposition C.1** Sei  $\{e_1, e_2\}$  die Standard-ONB des  $\mathbb{R}^2$  und  $\{f_1, f_2\}$  irgendeine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] = [f_1, f_2] &\Leftrightarrow e_1 \wedge e_2 = k \cdot (f_1 \wedge f_2) \quad , k > 0 , \\ [e_1, e_2] = -[f_1, f_2] &\Leftrightarrow e_1 \wedge e_2 = k \cdot (f_1 \wedge f_2) \quad , k < 0 . \end{aligned}$$

BEWEIS Stelle  $f_1$  und  $f_2$  bzgl. der Basis  $\{e_1, e_2\}$  dar. Es ergibt sich  $f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$  und  $f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$ . Die Matrix  $A = (a_{ij})$  dieses Basiswechsels erfüllt  $\text{Det } A \neq 0$ , da  $\{e_1, e_2\}$  und  $\{f_1, f_2\}$  Basen sind,  $A$  also ein Isomorphismus ist. Wir berechnen nun

$$(C.7) \quad \begin{aligned} f_1 \wedge f_2 &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= a_{11}a_{22}(e_1 \wedge e_2) + a_{12}a_{21}(e_2 \wedge e_1) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(e_1 \wedge e_2) \\ &= \text{Det } A \cdot (e_1 \wedge e_2) \quad , \quad k := \text{Det } A \end{aligned}$$

$$= k \cdot (e_1 \wedge e_2) \quad \square$$

Aufgrund dieses Resultates können wir nun alle Elemente von  $\wedge^2 \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , die in derselben Zusammenhangskomponente wie  $(e_1 \wedge e_2)$  liegen, mit der Standardorientierung  $\omega^2 = [e_1, e_2]$  des  $\mathbb{R}^2$  identifizieren und alle Elemente in derselben Zusammenhangskomponente wie  $-(e_1 \wedge e_2)$  mit  $-\omega^2$ .

**Proposition C.2** Seien  $V, W$  2-dimensionale Vektorräume,  $\omega$  sei eine Orientierung von  $V$ ,  $F \in \mathcal{L}(V, W)$  sei ein Isomorphismus. Dann gilt

$$F(\omega) = F^{Or}(f_1 \wedge f_2) := F(f_1) \wedge F(f_2) \quad ,$$

wobei  $\{f_1, f_2\}$  eine Basis von  $V$  sei mit  $[f_1, f_2] = \omega$ .  $F(\omega)$  bezeichnet die durch  $F$  und  $\omega$  in  $W$  induzierte Orientierung.

BEWEIS Per definitionem ist  $F(\omega) := [F(f_1), F(f_2)]$ . Sei  $\{w_1, w_2\}$  eine Basis von  $W$ , wir nennen  $[w_1, w_2]$  für den Moment Standardorientierung von  $W$ . Nach Prop. 1.3 gilt

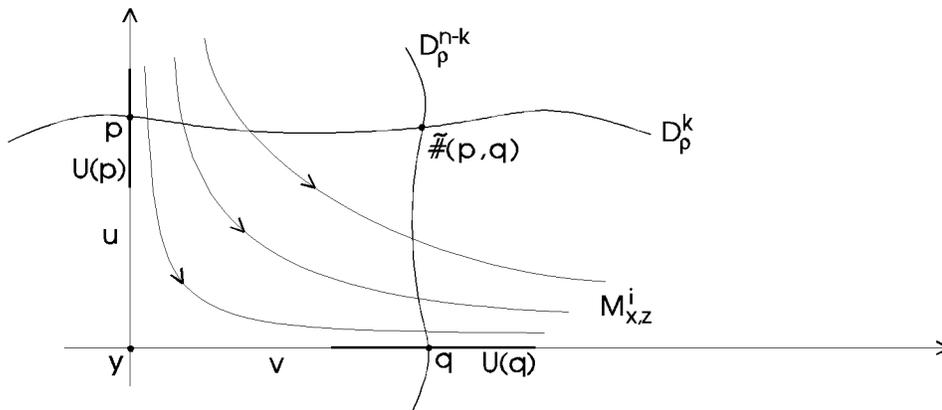
$$\begin{aligned} [w_1, w_2] = [F(f_1), F(f_2)] &\Leftrightarrow w_1 \wedge w_2 = k \cdot (F(f_1) \wedge F(f_2)) \quad , k > 0 \quad , \\ [w_1, w_2] = -[F(f_1), F(f_2)] &\Leftrightarrow w_1 \wedge w_2 = k \cdot (F(f_1) \wedge F(f_2)) \quad , k < 0 \quad . \end{aligned}$$

Im ersten Fall, in dem  $F(\omega)$  gleich der Standardorientierung von  $W$  ist, ist offenbar auch  $F(f_1) \wedge F(f_2)$  gleich der Standardorientierung (da  $k > 0$ ). Im zweiten Fall sind sowohl  $F(\omega)$ , als auch  $F(f_1) \wedge F(f_2)$  ungleich der Standardorientierung (da  $k < 0$ ).  $\square$

### ORIENTIERUNGS-GLUEING

Seien  $x, y, z \in Crit f$  mit  $Ind_f(x) = Ind_f(y) + 1 = Ind_f(z) + 2 = k + 1$ ,  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ , und sei  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{M}_{x, y} \times \hat{M}_{y, z}$  ein fest gewähltes Orbitpaar. Wir wählen nun einen Glueingparameter  $\rho \in (0, \hat{\rho}_0)$ , siehe Abschnitt 2.3. Zu  $\rho$  gehören die beiden Kreisscheiben  $D_\rho^k \subset W^u(x)$  und  $D_\rho^{n-k} \subset W^s(z)$ , welche den eindeutigen Schnittpunkt  $p_\rho \in M_{x, z}^i$  haben,  $i \in \{1, \dots, \# Zsh.komp. \text{ von } M_{x, z}\}$  geeignet. Seien nun  $p := D_\rho^k \cap u$  und  $q := D_\rho^{n-k} \cap v$ , wobei  $u := \mathcal{O}(\hat{u})$  und  $v := \mathcal{O}(\hat{v})$ . Seien weiter  $U(p)$  und  $U(q)$  hinreichend kleine Umgebungen von  $p$  bzw.  $q$  in  $u$  bzw.  $v$  (Figur C.1), dann können die Elemente aus  $U(p)$  mit denen aus  $U(q)$  in eindeutiger Weise zu Punkten in  $M_{x, z}^i$  verklebt werden (indem wir ihnen den eindeutigen Schnittpunkt, der zu ihnen gehörenden Kreisscheiben zuordnen). Wir bezeichnen diese Abbildung mit

$$(C.8) \quad \tilde{\#} : U(p) \times U(q) \rightarrow M_{x, z}^i \quad .$$



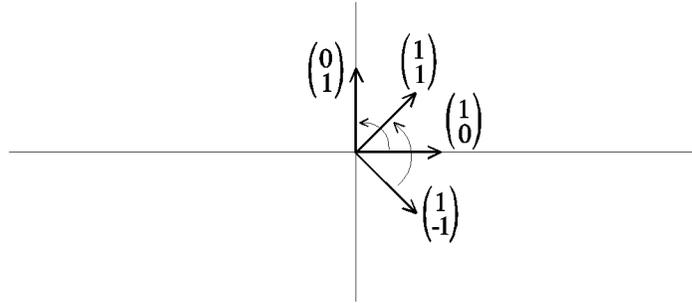
Figur C.1

Nun betrachten wir deren Linearisierung an der Stelle  $(p, q) \in U(p) \times U(q)$

$$(C.9) \quad D\tilde{\#}(p, q) : T_p U(p) \times T_q U(q) = T_p u \times T_q v \rightarrow T_{\tilde{\#}(p, q)} M_{x, z}^i \quad .$$

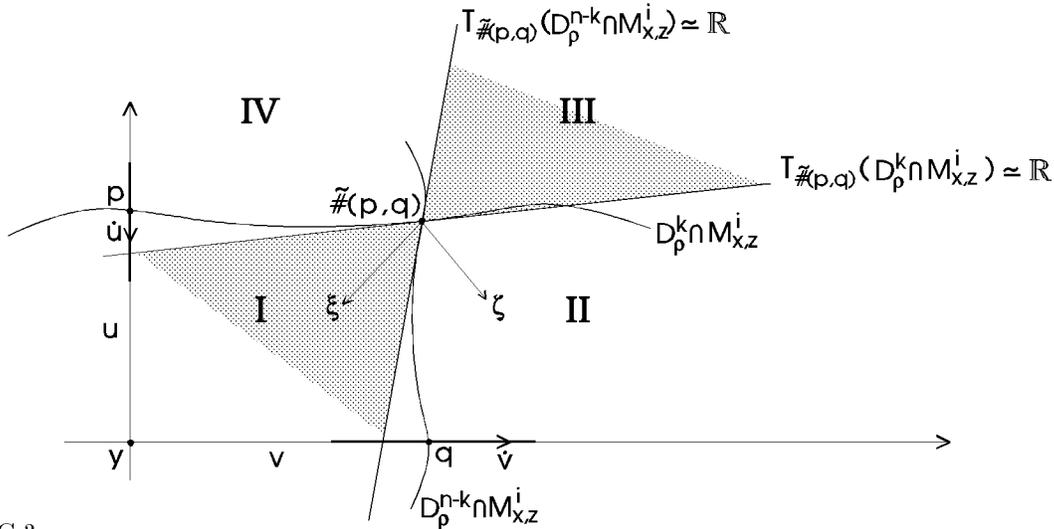
**Proposition C.3** Die Abbildung  $D\tilde{\#}(p, q)$  ist ein Vektorraumisomorphismus.

BEWEIS Eine Basis von  $T_p u \times T_q v$  ist gegeben durch  $\{(\dot{u}(p), 0), (0, -\dot{v}(p))\}$  oder auch durch  $\{(\dot{u}(p), \dot{v}(p)), (\dot{u}(p), -\dot{v}(p))\}$ . Dies entspricht dem Fall  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  bzw.  $\{(1, 1), (1, -1)\}$  in  $\mathbb{R}^2$  (siehe Figur C.2).



Figur C.2

Nun ist zu zeigen, daß  $D\tilde{\#}(p, q)(\dot{u}(p), \dot{v}(p))$  und  $D\tilde{\#}(p, q)(\dot{u}(p), -\dot{v}(p))$  in  $T_{\tilde{\#}(p, q)} M_{x, z}^i \simeq \mathbb{R}^2$  linear unabhängig sind. Dies sehen wir ganz analog, wie im Beweis von Lemma 2.3.6, ein. Zunächst teilen wir  $T_{\tilde{\#}(p, q)} M_{x, z}^i$  in vier Bereiche ein, diese sind durch den transversalen Schnitt von  $D_\rho^{n-k} \cap M_{x, z}^i$  und  $D_\rho^k \cap M_{x, z}^i$  festgelegt (Figur C.3).



Figur C.3

Mittels einer Argumentation, analog wie im Beweis von Lemma 2.3.6, welche auf den Verschiebungen von  $D_\rho^k$  bzw.  $D_\rho^{n-k}$  in Richtung von  $\dot{u}(p) =: \dot{u}$  bzw.  $\dot{v}(q) =: \dot{v}$  und  $-\dot{v}$  beruht, folgern wir

$$(C.10) \quad \xi := D\tilde{\#}(p, q)(\dot{u}, -\dot{v}) \in \text{Bereich I} \quad ,$$

$$\zeta := D\tilde{\#}(p, q)(\dot{u}, \dot{v}) \in \text{Bereich II} \quad .$$

Außerdem sind die Bildvektoren beide ungleich Null, da  $p$  und  $q$ , und somit  $\tilde{\#}(p, q) \in M_{x, z}^i$ , keine Fixpunkte des Gradientenflusses  $\phi_t$  sind. Also sind die Bildvektoren linear unabhängig.  $\square$

Aufgrund von Prop. C.3 induziert  $D\tilde{\#}(p, q)$  die Orientierung

$$(C.11) \quad D\tilde{\#}^{Or}(p, q)((\dot{u}_1, \dot{v}_1) \wedge (\dot{u}_1, -\dot{v}_1)) := D\tilde{\#}(p, q)(\dot{u}_1, \dot{v}_1) \wedge D\tilde{\#}(p, q)(\dot{u}_1, -\dot{v}_1)$$

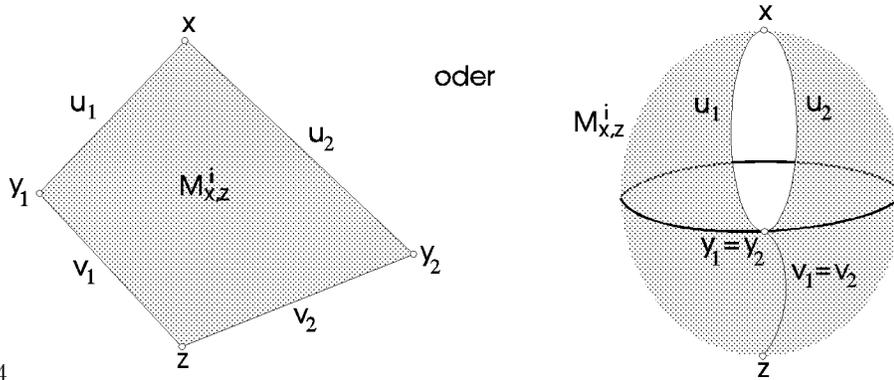
auf  $T_{\tilde{\#}(p, q)} M_{x, z}^i$  und damit auf  $M_{x, z}^i$ .

DIE AUF  $M_{x,z}^i$  INDUZIerte ORIENTIERUNG

Seien  $(\hat{u}_j, \hat{v}_j) \in \hat{M}_{x,y_j} \times \hat{M}_{y_j,z}$ ,  $j = 1, 2$  und  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1) \neq (\hat{u}_2, \hat{v}_2)$ , so daß sie dieselbe Zusammenhangskomponente  $\hat{M}_{x,z}^i$  von  $\hat{M}_{x,z}$  beranden. D.h. es soll gelten

$$(C.12) \quad \mathcal{O}(\hat{u}_j) \subset \overline{M_{x,z}^i} \quad \text{und} \quad \mathcal{O}(\hat{v}_j) \subset \overline{M_{x,z}^i}, \quad j = 1, 2.$$

Es ergibt sich also eine, der in Figur C.4 skizzierten, Situationen (siehe Abschnitt 3.2).



Figur C.4

Die Abbildungen

$$(C.13) \quad D\tilde{\#}(p_j, q_j) : T_{p_j}U(p_j) \times T_{q_j}U(q_j) = T_{p_j}u_j \times T_{q_j}v_j \rightarrow T_{\tilde{\#}(p_j, q_j)}M_{x,z}^i$$

sind mit den, durch die charakteristischen Vorzeichen gegebenen, Orientierungen

$$(C.14) \quad [n_{u_j} \cdot \hat{u}_j, n_{v_j} \cdot \hat{v}_j]$$

von  $T_{p_j}u_j \times T_{q_j}v_j$  verträglich, d.h. es gilt das

**Lemma C.4** Voraussetzungen wie zuvor, dann ist

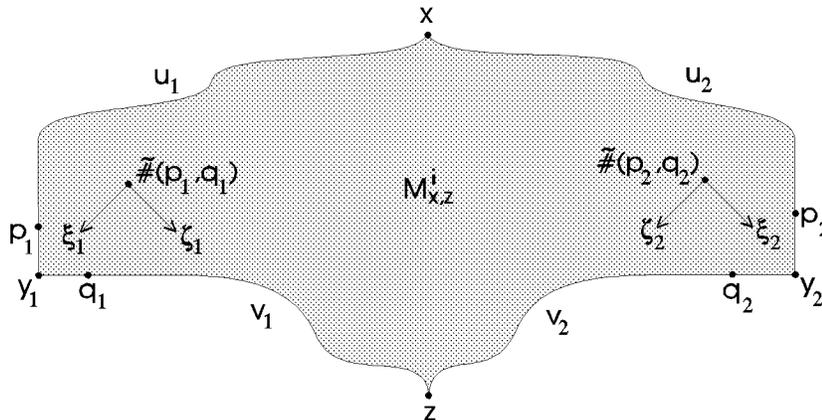
$$D\tilde{\#}^{Or}(p_1, q_1)(n_{u_1}\hat{u}_1 \wedge n_{v_1}\hat{v}_1) = D\tilde{\#}^{Or}(p_2, q_2)(n_{u_2}\hat{u}_2 \wedge n_{v_2}\hat{v}_2) \quad .$$

Damit können wir nun in kanonischer Weise eine Orientierung von  $M_{x,z}^i$  festlegen, nämlich

$$[M_{x,z}^i] := D\tilde{\#}^{Or}(p_1, q_1)(n_{u_1}\hat{u}_1 \wedge n_{v_1}\hat{v}_1) \quad .$$

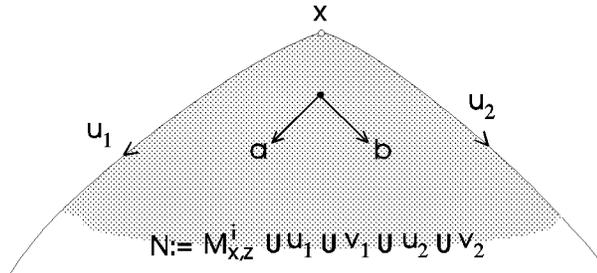
BEWEIS (von Lemma C.4) Seien  $\xi_j, \zeta_j$  wie in (C.10), dann ist wie wir anhand von Figur C.5 sehen können

$$(C.15) \quad \zeta_1 \wedge \xi_1 = -\zeta_2 \wedge \xi_2 \quad .$$



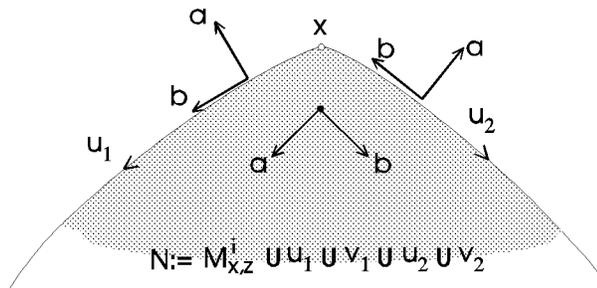
Figur C.5

(C.15) läßt sich natürlich auch mathematisch beweisen:  $N := M_{x,z}^i \cup u_1 \cup v_1 \cup u_2 \cup v_2$  ist eine 2-dimensionale berandete Mannigfaltigkeit, siehe [H, Kap. 1.4]. Sei nun  $[a, b]$  eine Orientierung von  $M_{x,z}^i$ , diese induziert eine Orientierung auf  $\partial N$ .



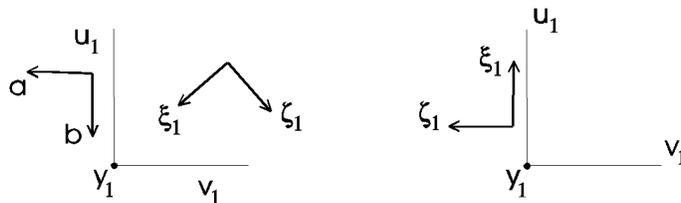
Figur C.6

$a$  soll auf  $\partial N$  nach außen weisen, dann induziert  $b$  die Orientierung von  $\partial N$ .



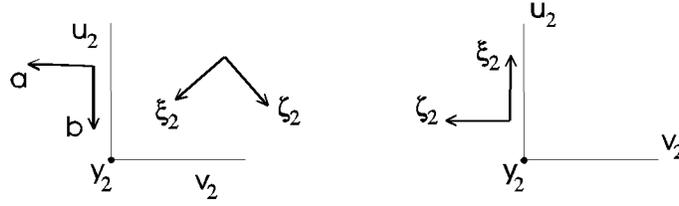
Figur C.7

Die Randkomponente  $u_1$  ist damit in Flußrichtung orientiert,  $u_2$  entgegen dieser. Wenn nun  $\zeta_1 \wedge \xi_1 = \zeta_2 \wedge \xi_2$  wäre, so würden beide Orientierungen dieselbe Orientierung auf  $\partial N$  induzieren. Bei  $y_1$  haben wir folgende Situation:



Figur C.8

Wenn nun  $\zeta_1$  auf  $u_1 \subset \partial N$  nach außen weist, so ist  $\xi_1$  entgegengesetzt der Flußrichtung.  $\zeta_1 \wedge \xi_1$  repräsentiert also die Orientierung  $-(a \wedge b)$  von  $M_{x,z}^i$ . Bei  $y_2$  sieht die Situation folgendermaßen aus:



Figur C.9

Wir orientieren wieder  $\zeta_2$  auf  $u_2 \subset \partial N$  nach außen und erhalten, daß  $\xi_2$  wieder entgegengesetzt der Flußrichtung weist, also jetzt dieselbe Orientierung auf  $\partial N$  induziert wie  $a \wedge b$ . Es ist also  $\zeta_2 \wedge \xi_2 = a \wedge b$  und damit

$$\zeta_1 \wedge \xi_1 = -\zeta_2 \wedge \xi_2 \quad ,$$

was zu zeigen war.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 D\tilde{\#}^{Or}(p_1, q_1)(n_{u_1}\dot{u}_1 \wedge n_{v_1}\dot{v}_1) &= n_{u_1}n_{v_1} D\tilde{\#}^{Or}(p_1, q_1)(\dot{u}_1 \wedge \dot{v}_1) \\
 &= n_{u_1}n_{v_1} D\tilde{\#}^{Or}(p_1, q_1)((\dot{u}_1, \dot{v}_1) \wedge (\dot{u}_1, -\dot{v}_1)) \\
 &= n_{u_1}n_{v_1} D\tilde{\#}(p_1, q_1)(\dot{u}_1, \dot{v}_1) \wedge D\tilde{\#}(p_1, q_1)(\dot{u}_1, -\dot{v}_1) \\
 &= -n_{u_2}n_{v_2} \zeta_1 \wedge \xi_1 \\
 &= n_{u_2}n_{v_2} \zeta_2 \wedge \xi_2 \\
 &= n_{u_2}n_{v_2} D\tilde{\#}(p_2, q_2)(\dot{u}_2, \dot{v}_2) \wedge D\tilde{\#}(p_2, q_2)(\dot{u}_2, -\dot{v}_2) \\
 &= n_{u_2}n_{v_2} D\tilde{\#}^{Or}(p_2, q_2)((\dot{u}_2, \dot{v}_2) \wedge (\dot{u}_2, -\dot{v}_2)) \\
 &= n_{u_2}n_{v_2} D\tilde{\#}^{Or}(p_2, q_2)(\dot{u}_2 \wedge \dot{v}_2) \\
 &= D\tilde{\#}^{Or}(p_2, q_2)(n_{u_2}\dot{u}_2 \wedge n_{v_2}\dot{v}_2)
 \end{aligned}$$

□

# Literatur

- [Ar] V.I. Arnol'd, *Ordinary differential equations*, Springer, Berlin Heidelberg 1992.
- [Bo] R. Bott, *Morse theory indomitable*, Publ. Math. I.H.E.S. **68** (1988), 99-114.
- [Br] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun 1987.
- [DFN] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern geometry - methods and applications Part III : Introduction to homology theory*, Graduate texts in mathematics **124**, Springer, New York 1990.
- [F1] A. Floer, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Diff. Geom. **30** (1989), 207-221.
- [F2] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Diff. Geom. **28** (1988), 513-547.
- [F3] A. Floer, *A relative Morse index for the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 393-407.
- [F4] A. Floer, *The unregularized gradient flow of the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 775-813.
- [F5] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), 575-611.
- [H] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate texts in mathematics **33**, Springer, New York 1976.
- [Ka] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer 1984.
- [Mi1] J. Milnor, *Morse theory*, Annals of mathematics studies 51, Princeton Univ. Press 1963.
- [Mi2] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes 1, Princeton Univ. Press 1965.
- [PdM] J. Palis Jr., W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer, New York 1982.
- [Po] M. Poźniak, *The Morse complex, Novikov cohomology and Fredholm theory*, University of Warwick, Preprint 08/1991.
- [RS] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I : Functional analysis*, revised and enlarged edition, Academic Press, San Diego 1980.

- [RoSa] J.W. Robbin, D.A. Salamon, *Lyapunov maps, simplicial complexes and the Stone functor*, University of Warwick, Preprint 10/1990.
- [Sa1] D.A. Salamon, *Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets*, Trans. AMS **291** (1985), 1-41.
- [Sa2] D.A. Salamon, *Morse theory, the Conley index and Floer homology*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 113-140.
- [Sch] M. Schwarz, *Morse-Homologie*, Diplomarbeit Ruhr-Universität Bochum 1992.
- [Sm] S. Smale, *On gradient dynamical systems*, Ann. of Math. **74** (1961), 199-206.
- [Sm2] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. AMS **73** (1967), 747.
- [StZi] R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, B.G. Teubner, Stuttgart 1988.
- [Th] R. Thom, *Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété*, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 661-692.
- [Wi] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 661-692.

# Verwendete Symbole

|                             |   |    |
|-----------------------------|---|----|
| $\bar{\mathbb{R}}$          | Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$              | 3  |
| $\mathfrak{X}^r(M)$         | Menge der $C^r$ -Vektorfelder auf $M$   | 5  |
| $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ | Lineare Abbildungen bzw. lineare Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$                    | 5  |
| $Spec(L)$                   | Komplexes Spektrum von $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$                            | 7  |
| $Ind(L)$                    | Index des hyperbolischen linearen Vektorfeldes $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$    | 7  |
| $E^{(u)s}$                  | Bzgl. hyp. Isom. $A \in Gl(\mathbb{R}^n)$ (in)stabiler Unterraum des $\mathbb{R}^n$ | 8  |
| $A^{(u)s}$                  | (Expansion) Kontraktion   | 8  |
| $D_\cdot \cdot$             | Levi-Civita Zusammenhang  | 8  |
| $\mathcal{F}(M)$            | Ring der glatten reellwertigen Funktionen auf $M$                                   | 9  |
| $D \cdot$                   | Kovariantes Differential  | 9  |
| $\mathfrak{X}^*(M)$         | Menge der 1-Formen auf $M$  | 9  |
| $Dg(p, \xi)$                | Tangentialabbildung von $g: M \rightarrow N$  | 9  |
| $Dg(p)$                     | Linearisierung von $g: M \rightarrow N$   | 9  |
| $Ind(p)$                    | Index der hyperbolischen Singularität $p$   | 11 |
| $\nabla f$                  | Gradientenvektorfeld  | 13 |
| $H^f$                       | Hessesche von $f$   | 13 |
| $H_p^f$                     | Hesse-Matrix  | 14 |
| $Ind_f(p)$                  | Morse-Index des nichtdegenerierten kritischen Punktes $p$ von $f$                   | 15 |
| $(\nu_0, \dots, \nu_n)$     | Typ einer Morse-Funktion  | 16 |
| $H_k(X; \mathbb{K})$        | $k$ -te sing. Homologiegruppe des top. Raumes $X$ mit Koeff. in $\mathbb{K}$        | 17 |
| $\beta_k$                   | $k$ -te Bettizahl   | 17 |
| $\mathbb{T}^2$              | 2-Torus   | 17 |
| $\omega(q), \alpha(q)$      | $\omega$ - bzw. $\alpha$ -limes des Punktes $q$                                     | 21 |
| $W^{(u)s}(p)$               | (In)stabile Mannigfaltigkeit von $p$  | 23 |
| $W_{loc}^{(u)s}(p)$         | Lokale (in)stabile Mannigfaltigkeit von $p$   | 27 |
| $Crit f$                    | Menge der kritischen Punkte von $f$   | 29 |
| $C_{(S)W}^r(M, N)$          | $C^r(M, N)$ versehen mit der (starken) schwachen Topologie                          | 31 |
| $\pitchfork$                | Symbol für den transversalen Schnitt zweier Untermannigf.                           | 33 |

|   |  |     |
|---|--|-----|
| $Grad^\infty(M)$                                      | Menge der glatten Gradientenvektorfelder auf $M$   | 35  |
| $M_{x,y}$   | $x$ mit $y$ verbindende Mannigfaltigkeit   | 38  |
| $\hat{M}_{x,y}$                                       | Orbitraum von $x$ und $y$  | 39  |
| $\mathcal{O}(p)$                                      | Orbit durch $p$  | 40  |
| $\hat{p}_i \rightarrow (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_l)$ | Konvergenz gegen $(l-1)$ -fach gebrochenen Orbit   | 42  |
| $Mat(k,l)$  | Menge der $(k \times l)$ -Matrizen   | 56  |
| $Gl(k, \mathbb{R})$                                   | Menge der invertierbaren $(k \times k)$ -Matrizen  | 56  |
| $\#(A, B)$  | Schnittzahl  | 60  |
| $\hat{\#}$  | Glueing-Abbildung  | 61  |
| $\rho$  | Glueing-Parameter  | 61  |
| $\hat{\rho}_0$  | Universeller Glueing-Parameter für $M$   | 62  |
| $\omega^n$  | Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$  | 68  |
| $\sigma$  | Feste Wahl der Orientierungen aller instabilen Mf. von $M$                                 | 69  |
| $\Sigma$  | Menge aller möglichen Wahlen $\sigma$  | 69  |
| $n_u$   | Charakteristisches Vorzeichen des isolierten Orbits $\hat{u}$                              | 72  |
| $C_k(f, \sigma)$                                      | $k$ -te Kettengruppe des Morse-Witten Komplex  | 75  |
| $n(x, y)$   | Summe der char. Vorzeichen der isol. Orbits von $x$ nach $y$                               | 75  |
| $\partial_k$  | Randoperator des Morse-Witten Komplex  | 75  |
| $Z_k(f, g, \sigma)$                                   | $k$ -te Zyklengruppe des Morse-Witten Komplex  | 76  |
| $B_k(f, g, \sigma)$                                   | $k$ -te Rändergruppe des Morse-Witten Komplex  | 76  |
| $H_k(f, g, \sigma)$                                   | $k$ -te Homologiegruppe des Morse-Witten Komplex   | 76  |
| $\hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1$                           | Menge der 1-fach gebrochenen Orbits zwischen $x$ und $y$                                   | 76  |
| $\hat{\mathcal{O}}_{x,z}^1 / \sim$                    | Menge der Äquivalenzklassen von cobordanten 1-fach gebrochenen Orbits zwischen $x$ und $y$ | 76  |
| $n_2(x, y)$   | Anzahl der isolierten Orbits von $x$ nach $y$ modulo 2                                     | 78  |
| $I(N)$  | Maximal invariante Teilmenge der Menge $N$   | 81  |
| $A, R, A^*$   | Attraktor, Repeller, zu $A$ komplementärer Repeller  | 81  |
| $\mathcal{M}_{x^-, x^+}$                              | Trajektorienraum zu $x^-, x^+ \in Crit f$  | 94  |
| $\wedge^2 \mathbb{R}^2$                               | Schiefsymmetrisches Tensorprodukt des $\mathbb{R}^2$                                       | 100 |
| $\tilde{\#}$  | Spezielle Glueing-Abbildung  | 101 |
| $D\tilde{\#}^{Or(p,q)}$                               | Glueing-Abbildung für Orientierungen   | 102 |
| $[M_{x,z}^i]$   | Kanonische Orientierung von $M_{x,z}^i$  | 103 |

# Index

- Abbildung
  - Graph einer-, 56, 57
  - Linearisierung einer-, 9
  - Tangential-, 9
  - transversal zu einer U.Mf., 32, 33
- allgemeine Lage, 33
- Alternierungsoperator, 100
- Attraktor, 81
  - komplementärer-, 81
  - Repeller Paar, 81
- AWP, 2
  
- Betti-Zahl, 17
  
- charakteristische Vorzeichen, 67, 70, 72
- Cobordismus, 51, 76
  - Äquivalenzklassen bzgl. -, 76, 77
  
- Diffeomorphismus, 3
  - einparametrische Gruppe von-, 5
- Differential
  - kovariantes, 9
  
- Einbettung, 19
- $\epsilon C^r$ -nahe, 51
- Exponentialabbildung, 5
  
- Fixpunkt
  - der Zeit- $t$ -Abbildung, 5
  - hyperbolischer-, 11
  - nichtdegenerierter, 9
  - isolierter-, 9, 10
- Floer, A., 48
- Fluß
  - von einem Vektorfeld erzeugt-, 3, 4
  - (negativer) Gradienten-, 20, 21
- Frame, 37
  
- Glueing, 51
  - Abbildung, 51, 61
  - spezielle-, 101
  - Orientierungs-, 99, 101, 102
  - Parameter, 61
  - Verträglichkeit mit char. Vorzeichen, 103
  
- Hesse-
  - sche, 13
  - Matrix, 14
- Homöomorphismus, 3
  
- Immersion, 19
- Intervall
  - maximales-, 2
- Isomorphismus
  - kanonischer, 76
  - linearer hyperbolischer-, 7
  - orientierungserhaltender-, 68
  - orientierungsumkehrender-, 68
  
- Kettenkomplex
  - algebraischer, 76
- Kodimension, 19
- Kompaktheit bis auf gebrochene Orbits, 41, 42, 64
- Kontraktion, 8
  - strikte-, 57
  
- $\lambda$ -Lemma, 51
- Lipschitz-Bedingung, 42
- Limes
  - $\alpha$ -, 21, 22
  - $\omega$ -, 21, 22
- Lyapunov-Funktion, 81
  
- Mannigfaltigkeit, 3
  - Atlas einer-, 3
  - maximaler-, 3
  - differenzierbare Struktur einer-, 3
  - orientierte-, 68
  - geschlossene, 3
  - glatte-, 30
  - (in)stabile-, 23, 24
  - Karte einer-, 3
  - Koordinatenwechsel, 3
  - $C^r$ -Überlapp, 3
  - lokale (in)stabile-, 27
  - orientierbare-, 68, 69
  - parakompakte-, 86
  - Unter-, 19
  - immersierte-, 20
  - Karte einer-, 19
  - nette-, 60
  - verbindende-, 38
  - mögliche Typen der 2-dim. Zsh.Komp. der-, 79
- Menge

- invariante-, **81**
- isolierte invariante-, **81**
- maximal invariante Teil-, **81**
- Morse
  - Funktion, **16, 17**
    - Existenz einer glatten--, **31**
    - Modifikation einer--, **88**
    - Typ einer--, **16, 31, 38**
  - Index, **15**
  - Karte, **16**
  - Lemma, **16**
  - Ungleichungen
    - starke--, **17**
    - schwache--, **17**
- Morse-Smale Bedingung, **30, 34, 38**
- Morse-Witten Komplex, **76**
  - Homologiegruppen des-, **76**
  - kanonischer Randoperator des-, **75, 76**
  - Kettengruppen des-, **75**
  - mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}^2$ , **78**
  - Rändergruppen des-, **76**
  - Zyklengruppen des-, **76**
- Novikov, S.P., **48**
- ODE, **2**
- Orbit
  - 1-fach gebrochener-, **51**
  - eines Vektorfeldes, **2**
  - isolierter-, **42, 93**
- Orbitraum, **39, 41**
- Orientierbarkeitsannahmen, **67**
- Orientierung
  - eines Vektorraumes, **68, 100**
  - induzierte-, **68, 99**
  - Standard- des  $\mathbb{R}^n$ , **68**
- Parameterintegral, **85**
- Punkt
  - kritischer-, **15**
  - nichtdegenerierter--, **15, 16**
  - regulärer-, **15**
- Repeller, **81**
- Salamon, D.A., **93**
- Schnittpunkt
  - eindeutiger-, **51, 57**
  - Existenz eines-, **57, 59**
- Schnittzahl, **60**
- Singularität
  - eines Vektorfeldes, **5**
  - nichtdegenerierte-, **9, 31**
    - isolierte--, **9, 10**
  - hyperbolische-, **10, 11, 16**
    - Index einer--, **10**
- Spektrum einer linearen Abbildung
  - komplexes-, **7**
- Tangentialbündel
  - einer Mannigfaltigkeit, **3**
  - Schnitt des-, **3**
- Tangentialfluß, **6, 54, 70**
- topologischer Raum
  - zusammenziehbarer, **69**
  - einfach zusammenhängender, **69**
- Theorem
  - Brouwersches Fixpunkt-, **57**
  - Grobman-Hartman-, **42**
  - regular value-, **20**
  - stable manifold-, **23**
  - über inverse Funktionen, **10**
- Trajektorie
  - eines Vektorfeldes, **2, 3, 4**
  - isolierte-, **42**
- Trajektorienraum, **94**
- transversaler Schnitt zweier U.Mf., **33**
- Überdeckung
  - lokal endliche-, **86**
- Umgebung
  - isolierende-, **50, 81**
- Unterraum
  - (in)stabiler-, **8**
- Vektor
  - dualer-, **13**
- Vektorfeld
  - auf einem Gebiet, **2**
  - auf einer Mannigfaltigkeit, **3**
  - Gradienten-, **13, 21, 35**
  - hyperbolisches-, **10**
    - Typ eines--, **11, 38**
  - lineares hyperbolisches-, **7, 31**
    - Index eines--, **7**
  - vollständig integrables-, **5**
- Vektorraum
  - äquivalente Basen eines-, **68**
  - exakte Sequenz von-, **68**
    - kurze--, **68**
  - orientierter-, **68**
- Wert
  - kritischer-, **15**
  - regulärer-, **15**
- Zeit- $t$ -Abbildung
  - von einem Vektorfeld erzeugte-, **5**
  - des (negativen) Gradientenflusses, **21**
- Zerlegung der Eins, **86**
- Zusammenhang
  - Levi-Civita-, **9**