Métriques d'Einstein,

Courbure de Weyl, &

Involutions Antiholomorphes

Claude LeBrun
Stony Brook University

La Géométrie Différentielle et l'Analyse Globale.
CRM, Montréal, Québec. 26 mai, 2021.

Références Principales:

Références Principales:

Einstein Manifolds, Self-Dual Weyl Curvature,
and Conformally Kähler Geometry

Références Principales:

Einstein Manifolds, Self-Dual Weyl Curvature,
and Conformally Kähler Geometry

Mathematical Reseach Letters

Références Principales:

Einstein Manifolds, Self-Dual Weyl Curvature,
and Conformally Kähler Geometry

Mathematical Reseach Letters
(2021) doi 10.4310/MRL.2021.v28.n1.a6

Références Principales:

Einstein Manifolds, Self-Dual Weyl Curvature,
and Conformally Kähler Geometry

Mathematical Reseach Letters
(2021) doi 10.4310/MRL.2021.v28.n1.a6

e-print arXiv:1908.01881 [math.DG]

Références Principales:

Références Principales:

Einstein Manifolds, Conformal Curvature, and Anti-Holomorphic Involutions

Références Principales:

Einstein Manifolds, Conformal Curvature, and Anti-Holomorphic Involutions

Annales Mathématiques du Québec
(2021) doi 10.1007/s40316-020-00154-2

Références Principales:

Einstein Manifolds, Conformal Curvature, and Anti-Holomorphic Involutions

Annales Mathématiques du Québec
(2021) doi 10.1007/s40316-020-00154-2

e-print arXiv:2007.01180 [math.DG]

Definition. *Une métrique riemannienne* h

Definition. *Une métrique riemannienne* h *est dite* d'Einstein

Definition. *Une métrique riemannienne* h *est dite* d'Einstein *si sa coubure de Ricci est constante*

Definition. *Une métrique riemannienne* h *est dite* d'Einstein *si sa coubure de Ricci est constante — c'est à dire, si*

$$r = \lambda h$$

Definition. *Une métrique riemannienne* h *est dite* d'Einstein *si sa coubure de Ricci est constante — c'est à dire, si*

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition. *Une métrique riemannienne* h *est dite* d'Einstein *si sa coubure de Ricci est constante — c'est à dire, si*

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

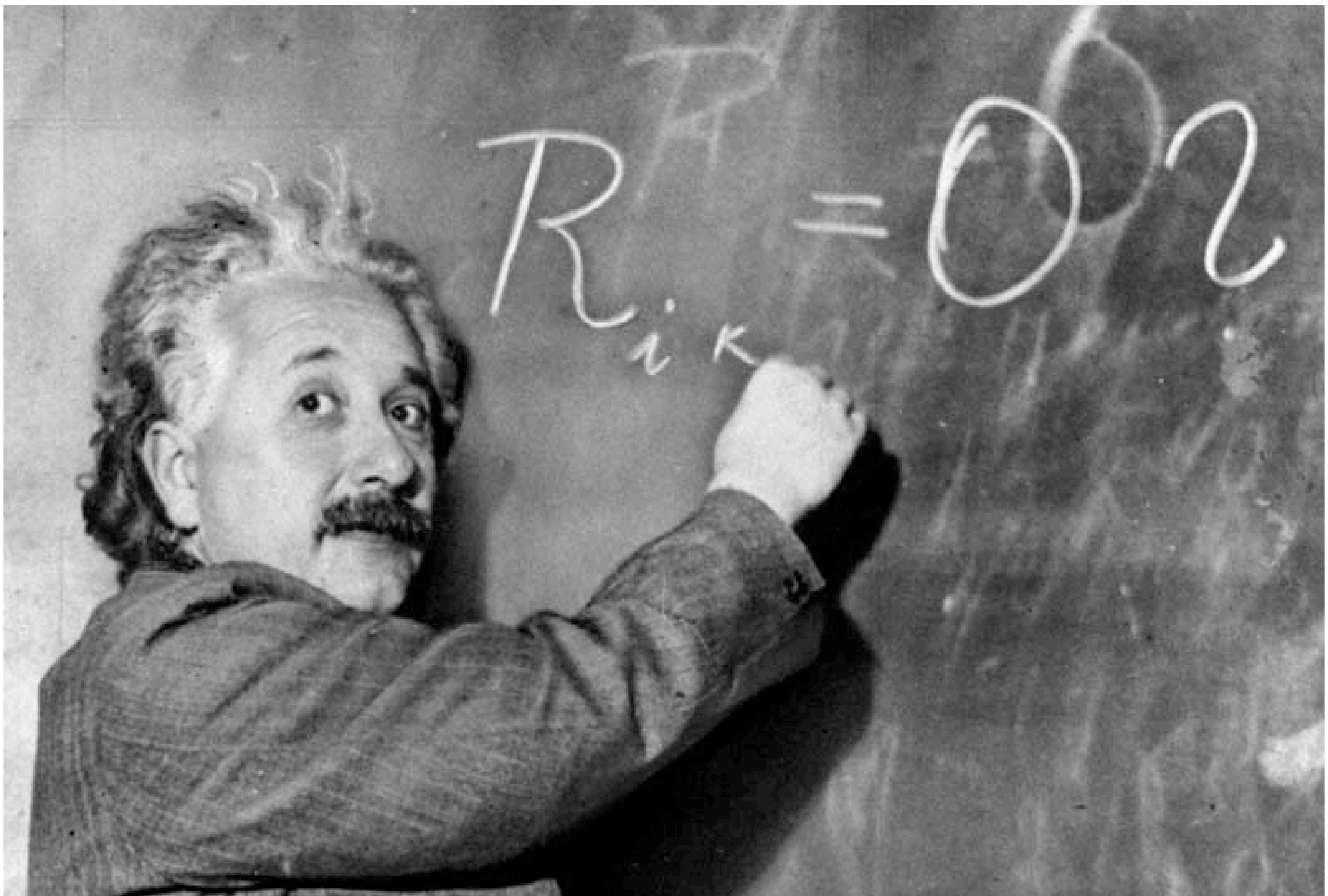
"…la plus grande bêtise de ma vie!"

— A. Einstein, à G. Gamow

Definition. *Une métrique riemannienne* h *est dite* d'Einstein *si sa coubure de Ricci est* constante — *c'est à dire, si*

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.



Definition. *Une métrique riemannienne* h *est dite* d'Einstein *si sa coubure de Ricci est constante — c'est à dire, si*

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc, afin de le punir . . .

Definition. *Une métrique riemannienne* h *est dite* d'Einstein *si sa coubure de Ricci est constante — c'est à dire, si*

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle λ la constante d'Einstein.

Definition. *Une métrique riemannienne* h *est dite* d'Einstein *si sa coubure de Ricci est constante — c'est à dire, si*

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

On appelle λ la constante d'Einstein.

Elle est du même signe que la *courbure scalaire*

Definition. *Une métrique riemannienne h est dite* d'Einstein *si sa coubure de Ricci est constante — c'est à dire, si*

$$r = \lambda h$$

pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle λ la constante d'Einstein.

Elle est du même signe que la *courbure scalaire*

$$s = r_j^{\ j} = \mathcal{R}^{ij}{}_{ij}.$$

Le Problème de Reconnaissance:

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h,

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M?

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h?

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le revêtement universel $\widetilde{M}$ est alors S^3, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{H}^3$...

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le revêtement universel $\widetilde{M}$ est alors S^3, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{H}^3$...

Mais lorsque $n \geq 5$, la situation semble désespérée.

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le revêtement universel $\widetilde{M}$ est alors S^3, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{H}^3$...

Mais lorsque $n \geq 5$, la situation semble désespérée.

$\{$métriques d'Einstein sur $S^n\}/\sim$ n'est pas connexe!

Le Problème de Reconnaissance:

Si M^n admet une métrique d'Einstein h,

est-ce-que cela nous aide à reconnaître M?

Qu'apprenons-nous de la géométrie de h?

Si $n = 3$, sa courbure sectionnelle est constante!

Le revêtement universel $\widetilde{M}$ est alors S^3, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{H}^3$...

Mais lorsque $n \geq 5$, la situation semble désespérée.

$\{$métriques d'Einstein sur $S^n\}/\sim$ n'est pas connexe!

Pour $n = 4$, la situation est plus encourageante...

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathscr{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\}/(\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathscr{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\}/(\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$$\mathscr{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\}/(\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M \quad =$$

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$\mathscr{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\}/(\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M = T^4,$$

Berger,

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$\mathscr{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\}/(\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M \quad = \quad T^4, \qquad K3,$$

Berger, Hitchin,

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$\mathscr{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\}/(\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M \quad = \quad T^4, \qquad K3, \qquad \mathcal{H}^4/\Gamma,$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot,

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$\mathscr{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\}/(\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M \quad = \quad T^4, \qquad K3, \qquad \mathcal{H}^4/\Gamma, \qquad \mathbb{C}\mathcal{H}_2/\Gamma.$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot, L.

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$\mathscr{E}(M) = \{$métriques d'Einstein $h\}/(\text{Difféos} \times \mathbb{R}^+)$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M \quad = \quad T^4, \qquad K3, \qquad \mathcal{H}^4/\Gamma, \qquad \mathbb{C}\mathcal{H}_2/\Gamma.$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot, L.

Reliés à plusieurs resultats de non-existence:

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$\mathscr{E}(M) = \{$métriques d'Einstein $h\}/($Difféos $\times \mathbb{R}^+)$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M \quad = \quad T^4, \qquad K3, \qquad \mathcal{H}^4/\Gamma, \qquad \mathbb{C}\mathcal{H}_2/\Gamma.$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot, L.

Reliés à plusieurs resultats de non-existence:
Beaucoup de M^4 n'admettent aucune métrique d'Einstein!

L'Espace de Modules des Métriques d'Einstein

$\mathscr{E}(M) = \{$métriques d'Einstein $h\}/($Difféos $\times \mathbb{R}^+)$

Connexe pour certaines variétés de dimension 4:

$$M \quad = \quad T^4, \qquad K3, \qquad \mathcal{H}^4/\Gamma, \qquad \mathbb{C}\mathcal{H}_2/\Gamma.$$

Berger, Hitchin, Besson-Courtois-Gallot, L.

Reliés à plusieurs resultats de non-existence:
Beaucoup de M^4 n'admettent aucune métrique d'Einstein!
Même plus extrême si on demande que $\lambda \geq 0\ldots$

Théorème (L '09).

Théorème (L '09). *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4

Théorème (L '09)**.** *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω*.*

Théorème (L '09). *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω. *Alors,* M *admet également une métrique d'Einstein* h

Théorème (L '09)**.** *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω*. Alors,* M *admet également une métrique d'Einstein* h *à* $\lambda \geq 0$

Théorème (L '09). *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω*. Alors,* M *admet également une métrique d'Einstein* h *à* $\lambda \geq 0$ *si et seulement si*

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{\mathit{diff}}{\approx} \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right.$$

Théorème (L '09). *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω. *Alors,* M *admet également une métrique d'Einstein* h *à* $\lambda \geq 0$ *si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, & 0 \leq k \leq 8, \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

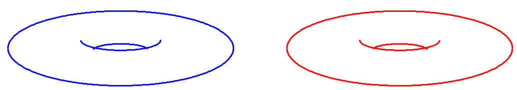
Conventions:

$\overline{\mathbb{CP}_2}$ = version anti-orientée de $\mathbb{CP}_2$.

Conventions:

$\overline{\mathbb{CP}}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{CP}_2$.

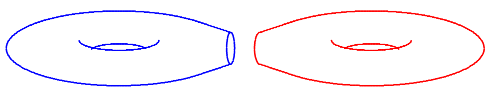
Somme connexe #:



Conventions:

$\overline{\mathbb{CP}}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{CP}_2$.

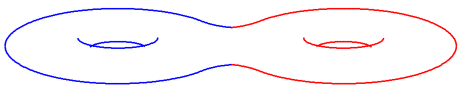
Somme connexe $\#$:



Conventions:

$\overline{\mathbb{CP}}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{CP}_2$.

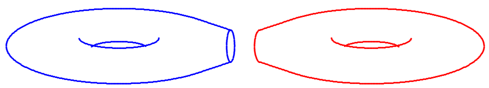
Somme connexe $\#$:



Conventions:

$\overline{\mathbb{CP}}_2$ = version anti-orientée de $\mathbb{CP}_2$.

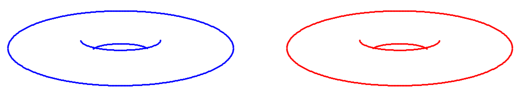
Somme connexe $\#$:



Conventions:

$\overline{\mathbb{CP}_2}$ = version anti-orientée de $\mathbb{CP}_2$.

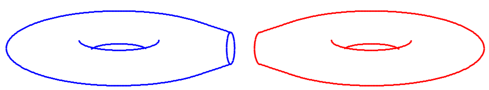
Somme connexe $\#$:



Conventions:

$\overline{\mathbb{CP}_2}$ = version anti-orientée de $\mathbb{CP}_2$.

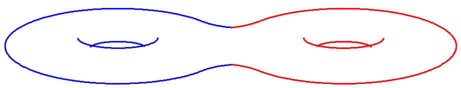
Somme connexe $\#$:



Conventions:

$\overline{\mathbb{CP}_2}$ = version anti-orientée de $\mathbb{CP}_2$.

Somme connexe $\#$:



Théorème (L '09). *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω. *Alors,* M *admet également une métrique d'Einstein* h *à* $\lambda \geq 0$ *si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, & 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, & \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

Théorème (L '09). *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω. *Alors,* M *admet également une métrique d'Einstein* h *à* $\lambda \geq 0$ *si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, & 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

$K3$ = surface Kummer-Kähler-Kodaira.

Surface complexe simplement connexe à $c_1 = 0$.

$K3$ = surface Kummer-Kähler-Kodaira.

Surface complexe simplement connexe à $c_1 = 0$.

Unique, à difféomorphisme près.

$K3$ = surface Kummer-Kähler-Kodaira.

Surface complexe simplement connexe à $c_1 = 0$.

Modèle standard: Quartique lisse en $\mathbb{CP}_3$.

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, & 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, & \\ K3, & \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}_2}, & 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Théorème (L '09). *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω. *Alors,* M *admet également une métrique d'Einstein* h *à* $\lambda \geq 0$ *si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, & 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, & \\ K3, & \\ K3/\mathbb{Z}_2, & \\ T^4, & \\ & \\ & \end{cases}$$

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, & 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, & \\ K3, & \\ K3/\mathbb{Z}_2, & \\ T^4, & \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, & \\ & \end{cases}$$

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \textit{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \textit{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

Chacune admet des métriques d'Einstein à $\lambda \geq 0$.

Théorème (L '09). *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω. *Alors,* M *admet également une métrique d'Einstein* h *à* $\lambda \geq 0$ *si et seulement si*

$$M \stackrel{\mathit{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, & 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \textit{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

Chacune admet des métriques d'Einstein à $\lambda \geq 0$.
Aucune autre admet aussi une forme symplectique.

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \textit{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \textit{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

surfaces de del Pezzo,

Théorème (L '09). *Soit* M *une variété compacte lisse de dimension* 4 *qui admet une structure symplectique* ω. *Alors,* M *admet également une métrique d'Einstein* h *à* $\lambda \geq 0$ *si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, & 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \textit{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

surfaces de del Pezzo,
surface K3,

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \textit{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

surfaces de del Pezzo,

surface K3, surface Enriques,

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

surfaces de del Pezzo,
surface K3, surface Enriques,
surface abélienne,

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \textit{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

surfaces de del Pezzo,
surface K3, surface Enriques,
surface abélienne, surfaces hyperelliptiques.

Il s'agit alors de la spécificité de la. . .

Géométrie en dimension 4:

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où $\Lambda^\pm$ sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \to \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où $\Lambda^\pm$ sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \to \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

$\Lambda^+ =$ les 2-formes auto-duales.
$\Lambda^- =$ les 2-formes anti-auto-duales.

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où $\Lambda^\pm$ sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \to \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

$\Lambda^+ =$ les 2-formes auto-duales.
$\Lambda^- =$ les 2-formes anti-auto-duales.

Cette dćomposition est conformément invariant!

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où $\Lambda^\pm$ sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \to \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

$\Lambda^+ =$ les 2-formes auto-duales.
$\Lambda^- =$ les 2-formes anti-auto-duales.

Cette dćomposition est conformément invariant!

$$h \rightsquigarrow u^2 h$$

Géométrie en dimension 4:

Sur une (M^4, h) orientée,

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

où $\Lambda^{\pm}$ sont les espaces propres à valeurs ± 1 de

$$\star : \Lambda^2 \to \Lambda^2,$$

$$\star^2 = 1.$$

$\Lambda^+ =$ les 2-formes auto-duales.
$\Lambda^- =$ les 2-formes anti-auto-duales.

Et pour cette raison. . .

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \to \Lambda^2$$

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \to \Lambda^2$$

décompose en 4 parties irréductibles:

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \to \Lambda^2$$

décompose en 4 parties irréductibles:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & \Lambda^{+*} & \Lambda^{-*} \\
\hline
\Lambda^{+} & W^{+} + \frac{s}{12} & \mathring{r} \\
\hline
\Lambda^{-} & \mathring{r} & W^{-} + \frac{s}{12} \\
\hline
\end{array}$$

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \to \Lambda^2$$

décompose en 4 parties irréductibles:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & \Lambda^{+*} & \Lambda^{-*} \\
\hline
\Lambda^{+} & W^{+} + \frac{s}{12} & \mathring{r} \\
\hline
\Lambda^{-} & \mathring{r} & W^{-} + \frac{s}{12} \\
\hline
\end{array}$$

Ici

$$\begin{aligned}
s &= \text{courbure scalaire} \\
\mathring{r} &= \text{tenseur de Ricci sans trace} \\
W^{+} &= \text{tenseur de Weyl auto-dual} \\
W^{-} &= \text{tenseur de Weyl anti-auto-dual}
\end{aligned}$$

Le tenseur de courbure de h

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 \to \Lambda^2$$

décompose en 4 parties irréductibles:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & \Lambda^{+*} & \Lambda^{-*} \\ \hline
\Lambda^+ & W^+ + \frac{s}{12} & \mathring{r} \\ \hline
\Lambda^- & \mathring{r} & W^- + \frac{s}{12} \\ \hline
\end{array}$$

Ici

$$\begin{aligned}
s &= \text{courbure scalaire} \\
\mathring{r} &= \text{tenseur de Ricci sans trace} \\
W^+ &= \text{tenseur de Weyl auto-dual} \quad \textit{(conformément invariant)} \\
W^- &= \text{tenseur de Weyl anti-auto-dual} \qquad\qquad ''
\end{aligned}$$

Théorème (L '09). *Soit M une variété compacte lisse de dimension 4 qui admet une structure symplectique ω. Alors, M admet également une métrique d'Einstein h à $\lambda \geq 0$ si et seulement si*

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \textit{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{cases}$$

surfaces de del Pezzo,
surface K3, surface Enriques,
surface abélienne, surfaces hyperelliptique.

$$\mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$
$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Liste définitive . . .

$$\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$
$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

$$\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$
$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}_2}, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$
$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8,$

$S^2 \times S^2,$

$K3,$

$K3/\mathbb{Z}_2,$

$T^4,$

$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$

$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3),$ ou $T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Au-dessous de la ligne:

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathscr{E}(M)$

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$
\begin{array}{l}
\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\
S^2 \times S^2, \\
\hline
K3, \\
K3/\mathbb{Z}_2, \\
T^4, \\
T^4/\mathbb{Z}_2,\ T^4/\mathbb{Z}_3,\ T^4/\mathbb{Z}_4,\ T^4/\mathbb{Z}_6, \\
T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2),\ T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).
\end{array}
$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathscr{E}(M) = \{\text{métriques d'Einstein } h\}/\sim$

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathscr{E}(M)$ parfaitement connu.

Mais quelques cas sont mieux compris que les autres!

$$\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathscr{E}(M)$ connexe!

$$\mathbb{CP}_2 \# k\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2,\ T^4/\mathbb{Z}_3,\ T^4/\mathbb{Z}_4,\ T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2),\ T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathscr{E}(M)$ connexe!

Au-dessus de la ligne:

$$\begin{array}{l}
\mathbb{CP}_2\#k\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\
S^2 \times S^2, \\
\hline
K3, \\
K3/\mathbb{Z}_2, \\
T^4, \\
T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\
T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).
\end{array}$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathscr{E}(M)$ connexe!

Au-dessus de la ligne:

Chaque variété admet une métrique d'Einstein.

$$\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8,$$
$$S^2 \times S^2,$$

$$K3,$$
$$K3/\mathbb{Z}_2,$$
$$T^4,$$
$$T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6,$$
$$T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathscr{E}(M)$ connexe!

Au-dessus de la ligne:

Espace de modules $\mathscr{E}(M) \neq \varnothing$.

$$\begin{array}{l} \mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\ S^2 \times S^2, \\ \hline K3, \\ K3/\mathbb{Z}_2, \\ T^4, \\ T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\ T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4). \end{array}$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathscr{E}(M)$ connexe!

Au-dessus de la ligne:

Espace de modules $\mathscr{E}(M) \neq \varnothing$. Est-il connexe?

$$
\begin{array}{l}
\mathbb{CP}_2 \# k \overline{\mathbb{CP}}_2, \quad 0 \leq k \leq 8, \\
S^2 \times S^2, \\
\hline
K3, \\
K3/\mathbb{Z}_2, \\
T^4, \\
T^4/\mathbb{Z}_2, T^4/\mathbb{Z}_3, T^4/\mathbb{Z}_4, T^4/\mathbb{Z}_6, \\
T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2), T^4/(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3), \text{ou } T^4/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4).
\end{array}
$$

Au-dessous de la ligne:

Chaque métrique d'Einstein est Ricci-plate et kählérienne.

Espace de modules $\mathscr{E}(M)$ connexe!

Surfaces de del Pezzo:

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points,

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points,
en position générale,

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale,

Surfaces de del Pezzo:

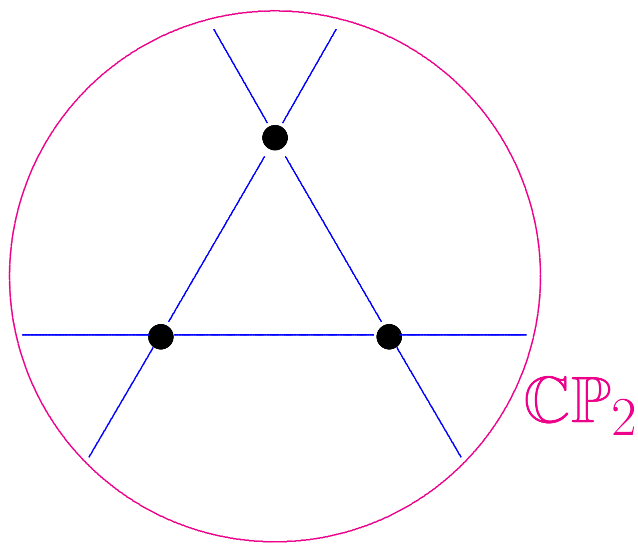
(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

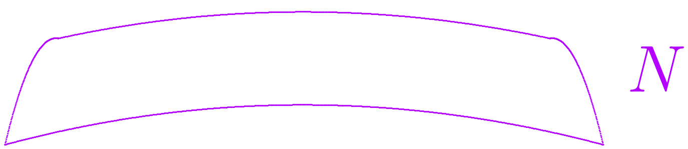
Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.



Éclatement:

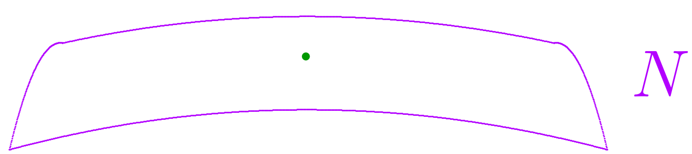
Éclatement:

Si N est une surface complexe,



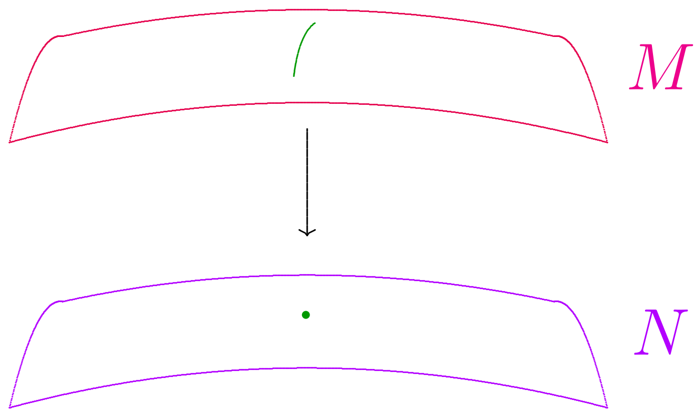
Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$



Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$ par un $\mathbb{CP}_1$,

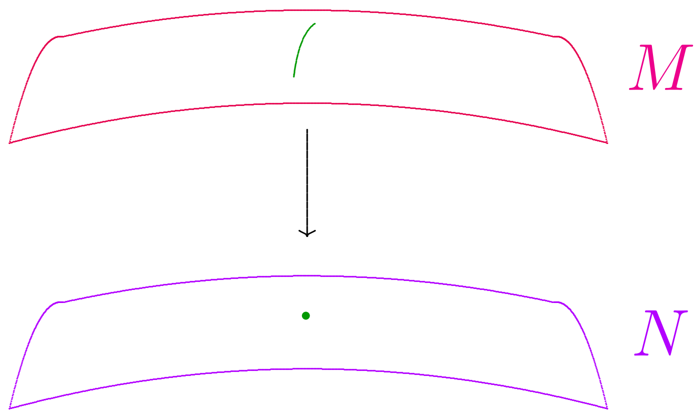


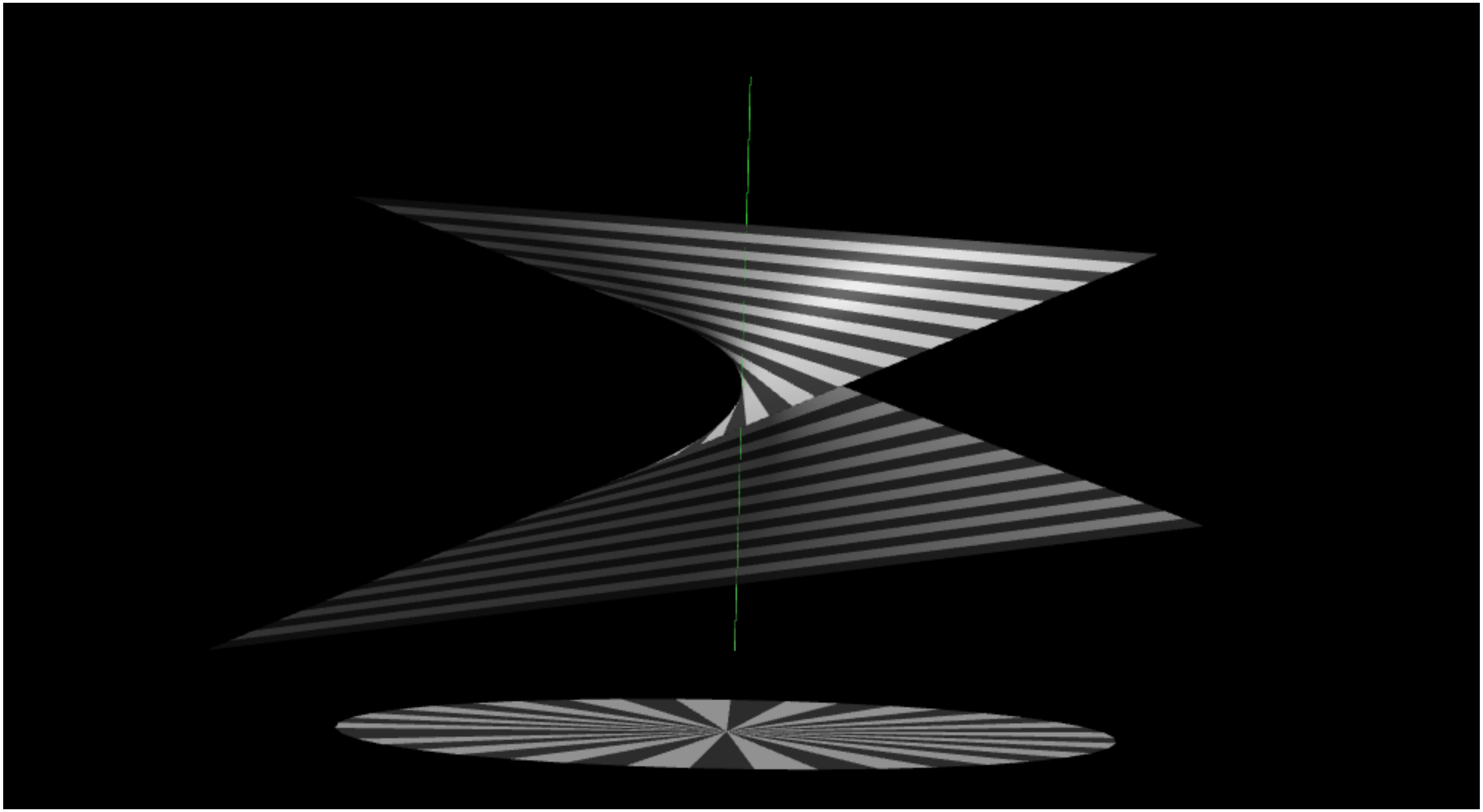
Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$ par un $\mathbb{CP}_1$, afin d'obtenir la surface l'éclatée

$$M \approx N \# \overline{\mathbb{CP}}_2$$

dans laquelle ce $\mathbb{CP}_1$ a fibré normal $\mathcal{O}(-1)$.



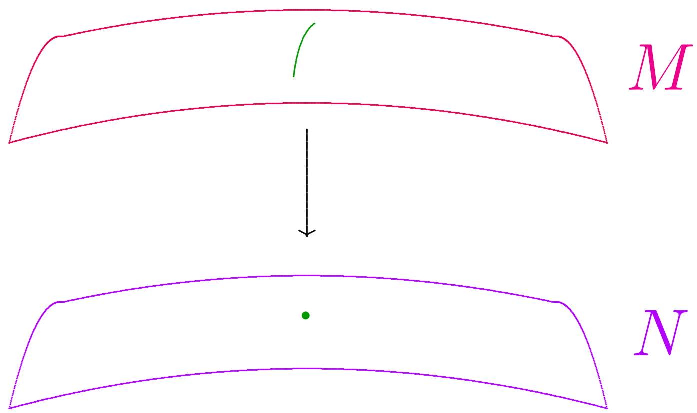


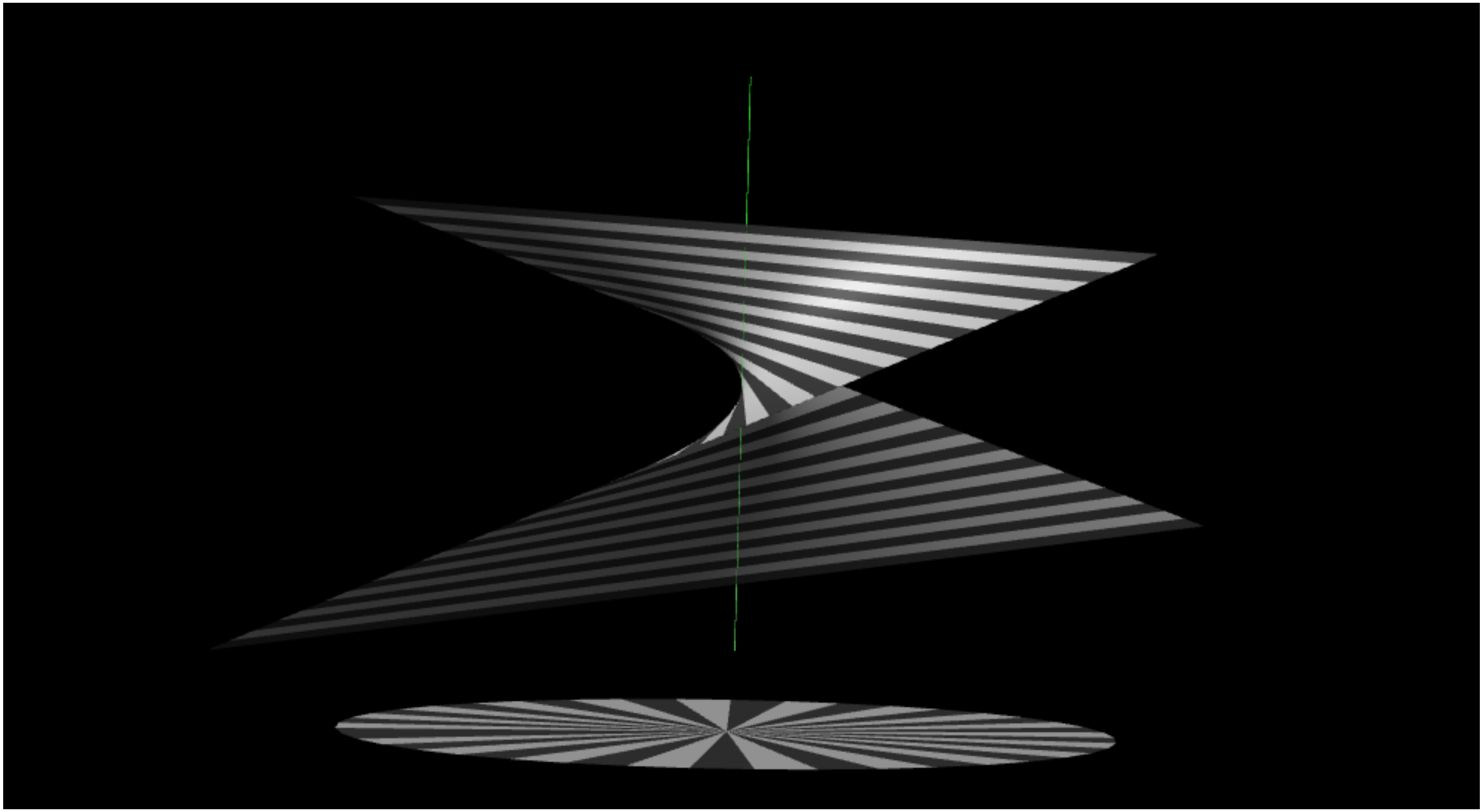
Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$ par un $\mathbb{CP}_1$, afin d'obtenir la surface l'éclatée

$$M \approx N \# \overline{\mathbb{CP}}_2$$

dans laquelle ce $\mathbb{CP}_1$ a fibré normal $\mathcal{O}(-1)$.



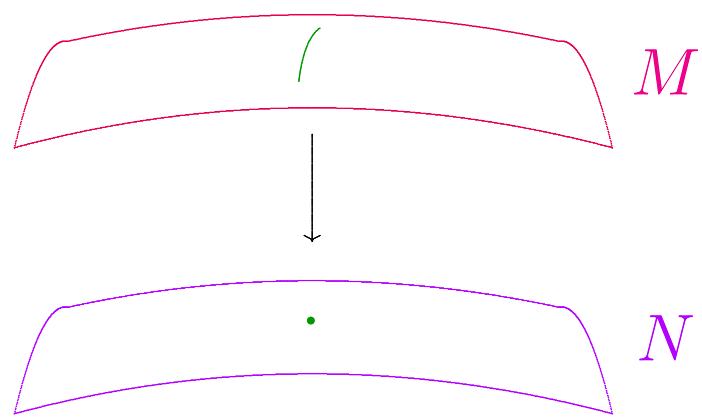


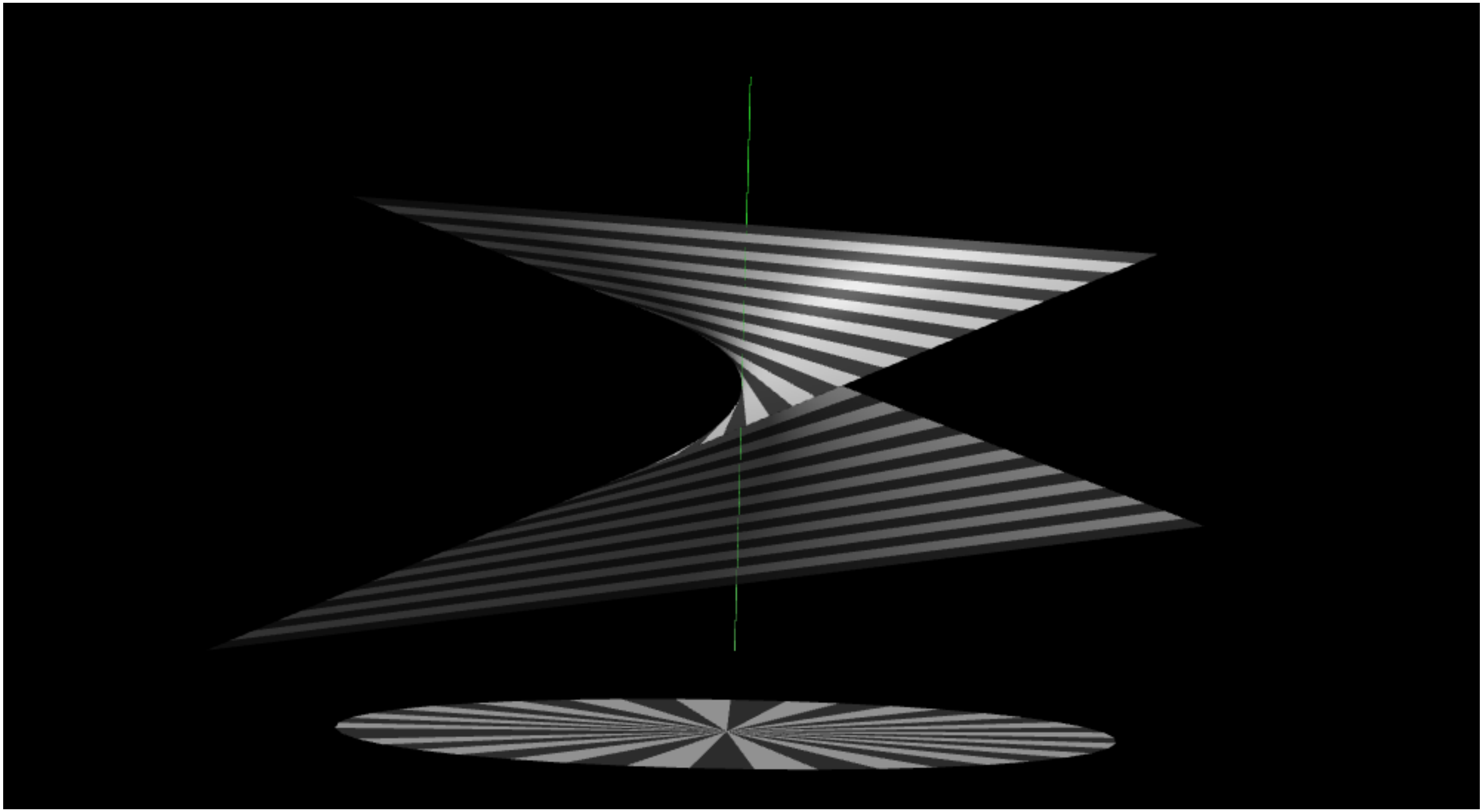
Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$ par un $\mathbb{CP}_1$, afin d'obtenir la surface l'éclatée

$$M \approx N \# \overline{\mathbb{CP}}_2$$

dans laquelle ce $\mathbb{CP}_1$ a fibré normal $\mathcal{O}(-1)$.



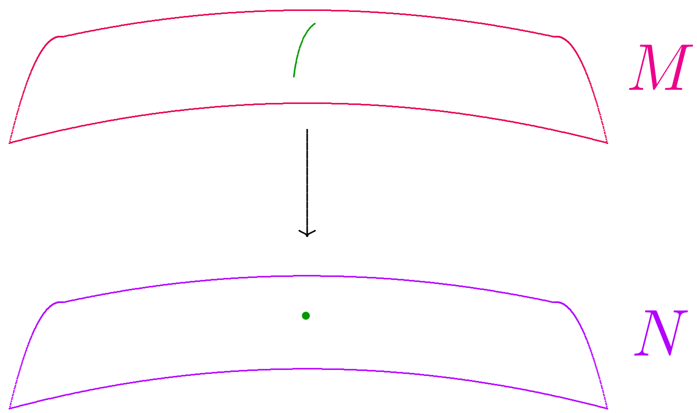


Éclatement:

Si N est une surface complexe, on remplace $p \in N$ par un $\mathbb{CP}_1$, afin d'obtenir la surface l'éclatée

$$M \approx N \# \overline{\mathbb{CP}}_2$$

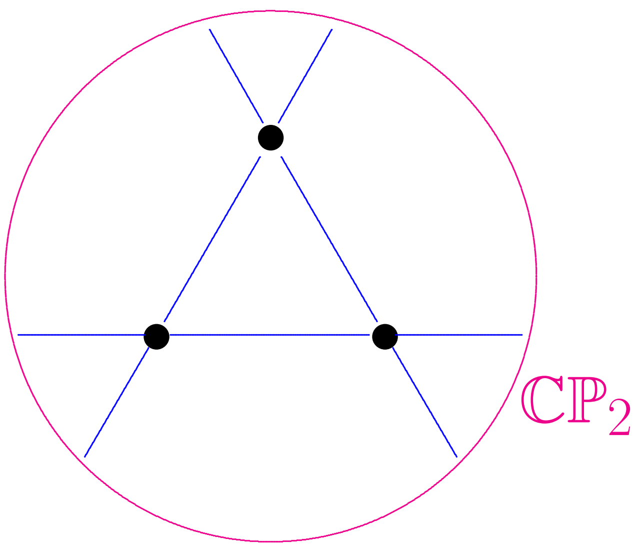
dans laquelle ce $\mathbb{CP}_1$ a fibré normal $\mathcal{O}(-1)$.



Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

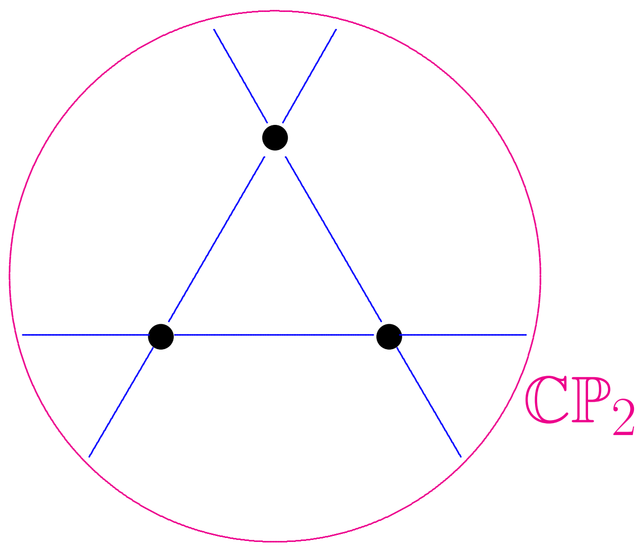
Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.



Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

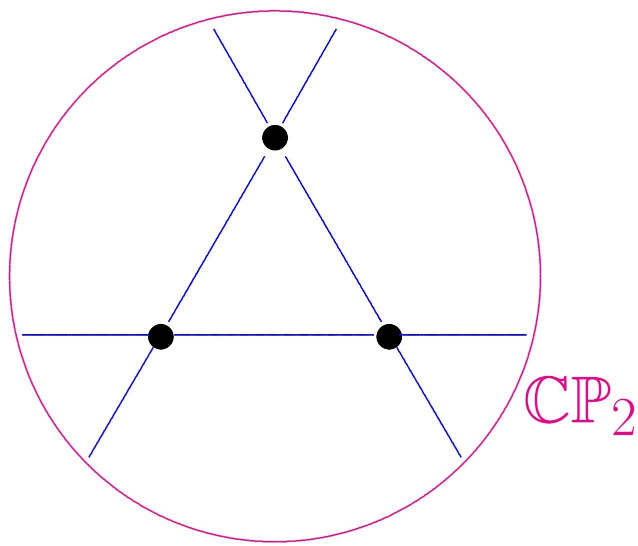


Les points sont tous distincts;

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

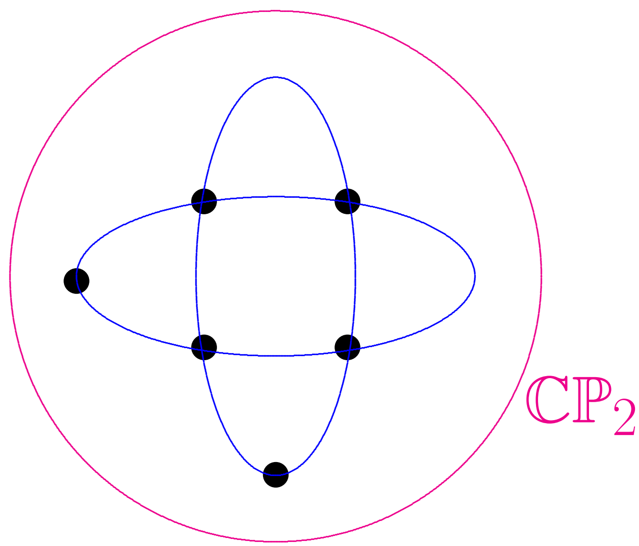


Aucune droite ne passe par 3 points;

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \le k \le 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

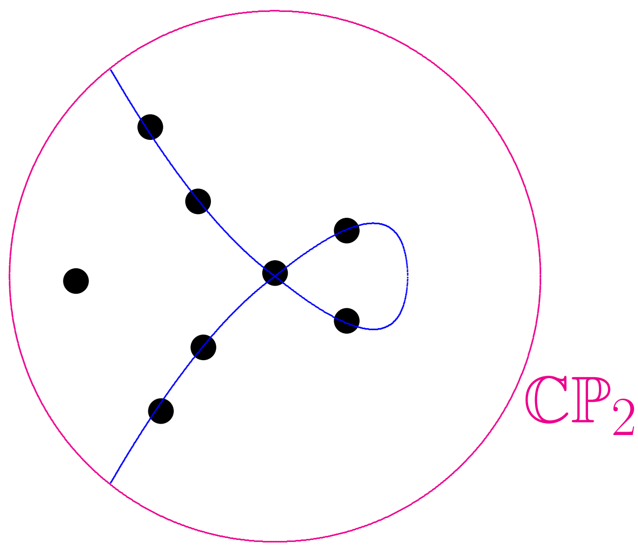


Aucune conique ne passe par 6 points;

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.



Aucune cubique nodale ne passe par 8 points...

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème.

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J)

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J)
admet une métrique d'Einstein h

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J) *admet une métrique d'Einstein* h *qui est conformément kählérienne et compatible avec* J*.*

Géométrie Conforme:

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}^+$.

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne $\Longrightarrow$

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne $\Longrightarrow$ g est Bach-plate

$$B_{ab} = (2\nabla^c\nabla^d + r^{cd}){W^+}_{acbd} = 0$$

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne $\Longrightarrow$ g est Bach-plate $\Longrightarrow$ g kählérienne extrémale:

$$\bar{\partial}\nabla^{1,0} s = 0.$$

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne $\Longrightarrow$ g est Bach-plate $\Longrightarrow$ g kählérienne extrémale.

(M^4, h) compacte, mais non de Kähler-Einstein $\Longrightarrow$

Géométrie Conforme:

Les deux métriques riemanniennes g et h sont reliées conformément si

$$h = f^2 g$$

pour une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}^+$.

Si g est kählérienne, h est dite conformément kählérienne.

(M^4, h) d'Einstein et conformément kählérienne $\Longrightarrow$ g est Bach-plate $\Longrightarrow$ g kählérienne extrémale.

(M^4, h) compacte, mais non de Kähler-Einstein $\Longrightarrow$

$$s_g > 0 \quad \text{et} \quad h = \text{ const } s^{-2} g$$

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J) *admet une métrique d'Einstein* h *qui est conformément kählérienne et compatible avec* J*.*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$, en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J) *admet une métrique d'Einstein* h *qui est conformément kählérienne et compatible avec* J. *En outre, cette métrique est unique,*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J. En outre, cette métrique est unique, à changements d'échelle et automorphismes complexes près.*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J. En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J) *admet une métrique d'Einstein* h *qui est conformément kählérienne et compatible avec* J*. En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Existence: Page

1978

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J) *admet une métrique d'Einstein* h *qui est conformément kählérienne et compatible avec* J. *En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński,

1983

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J. En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu,

1986

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J) *admet une métrique d'Einstein* h *qui est conformément kählérienne et compatible avec* J. *En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu, Tian-Yau,

1987

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J) *admet une métrique d'Einstein* h *qui est conformément kählérienne et compatible avec* J*. En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu, Tian-Yau, Tian,

1990

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J) *admet une métrique d'Einstein* h *qui est conformément kählérienne et compatible avec* J. *En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu, Tian-Yau, Tian, Odaka-Spotti-Sun,

2016

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$, en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo* (M^4, J) *admet une métrique d'Einstein* h *qui est conformément kählérienne et compatible avec* J. *En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Existence: Page-Derdziński, Siu, Tian-Yau, Tian, Odaka-Spotti-Sun, Chen-L-Weber.

2008

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$,
en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J. En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Unicité: Bando-Mabuchi '87

Surfaces de del Pezzo:

(M^4, J) pour lesquelles c_1 classe kählérienne $[\omega]$.
Notation abrégée: $c_1 > 0$.

Éclatement de $\mathbb{CP}_2$ en k points, $0 \leq k \leq 8$, en position générale, ou $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$.

Théorème. *Chaque surface de del Pezzo (M^4, J) admet une métrique d'Einstein h qui est conformément kählérienne et compatible avec J. En outre, cette métrique est géometriquement unique.*

Unicité: Bando-Mabuchi '87, L '12.

Problème central:

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Est-ce-que l'espace de modules $\mathscr{E}(M)$ est connexe?

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Est-ce-que l'espace de modules $\mathscr{E}(M)$ est connexe?

Progrès jusqu'à présent:

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Est-ce-que l'espace de modules $\mathscr{E}(M)$ est connexe?

Progrès jusqu'à présent:

Caractérisation complète des métriques connues.

Problème central:

Classifier chaque métrique d'Einstein sur chaque surface de del Pezzo.

Est-ce-que l'espace de modules $\mathscr{E}(M)$ est connexe?

Progrès jusqu'à présent:

Caractérisation complète des métriques connues.

Remplissent exactement une composante de $\mathscr{E}(M)$!

Théorème (L '15)**.**

Théorème (L '15)**.** *Sur chaque variété lisse* M^4 *de del Pezzo,*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse* M^4 *de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse* M^4 *de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse* M^4 *de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse* M^4 *de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M*,*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse* M^4 *de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M*, pour une 2-forme harmonique auto-duale globale* ω*.*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M, pour une 2-forme harmonique auto-duale globale ω.

Corollaire. *Ces métriques d'Einstein sur une variété lisse M^4 de del Pezzo quelconque*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M, pour une 2-forme harmonique auto-duale globale ω.

Corollaire. *Ces métriques d'Einstein sur une variété lisse M^4 de del Pezzo quelconque remplissent exactement une composante connexe*

Théorème (L '15). *Sur chaque variété lisse M^4 de del Pezzo, les métriques d'Einstein conformément kählérienne sont exactement celles pour lesquelles*

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

en chaque point de M, pour une 2-forme harmonique auto-duale globale ω.

Corollaire. *Ces métriques d'Einstein sur une variété lisse M^4 de del Pezzo quelconque remplissent exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein $\mathscr{E}(M)$.*

Un résultat assez satisfaisant…

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^{+}(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+.

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+.

Kähler $\Longrightarrow \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re e \Lambda^{2,0}$

$$W^+ = \text{partie sans trace de } \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \frac{s}{4} \end{bmatrix}$$

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+.

Kähler $\Longrightarrow \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re e \Lambda^{2,0}$

$$W^+ = \begin{bmatrix} -\frac{s}{12} & & \\ & -\frac{s}{12} & \\ & & \frac{s}{6} \end{bmatrix}$$

Un résultat assez satisfaisant. . .

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+.

Kähler $\Longrightarrow \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re e \Lambda^{2,0}$

$$\det(W^+) = \det \begin{bmatrix} -\frac{s}{12} & & \\ & -\frac{s}{12} & \\ & & \frac{s}{6} \end{bmatrix} = \frac{s^3}{864} > 0$$

pour ces métriques

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation
par une condition purement locale sur W^+.

Kähler $\Longrightarrow \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re e\Lambda^{2,0}$

$$\det(W^+) = \det \begin{bmatrix} -\frac{s}{12} & & \\ & -\frac{s}{12} & \\ & & \frac{s}{6} \end{bmatrix} = \frac{s^3}{864} > 0$$

pour ces métriques & leurs classes conformes…

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+.

Kähler $\Longrightarrow \Lambda^+ = \mathbb{R}\omega \oplus \Re e \Lambda^{2,0}$

$$g \rightsquigarrow h = f^2 g \quad \Longrightarrow \quad \det(W^+) \rightsquigarrow f^{-6} \det(W^+).$$

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+.

Critère de Wu:

$$\det(W^+) > 0.$$

Un résultat assez satisfaisant. . .

Mais la condition

$$W^{+}(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^{+}.

Critère de Wu:

$$\det(W^{+}) > 0.$$

Wu (2021): brève preuve cryptique de $\Longleftrightarrow$.

Un résultat assez satisfaisant...

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+.

Critère de Wu:

$$\det(W^+) > 0.$$

Wu (2021): brève preuve cryptique de $\Longleftrightarrow$.

L (2021): preuve complètement différente...

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^{+}(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^{+}.

Critère de Wu:

$$\det(W^{+}) > 0.$$

Wu (2021): brève preuve cryptique de $\Longleftrightarrow$.

L (2021): …qui implique aussi…

Un résultat assez satisfaisant…

Mais la condition

$$W^+(\omega, \omega) > 0$$

n'est pas purement locale!

Elle implique une 2-forme harmonique globale.

Peng Wu a découvert une caractérisation par une condition purement locale sur W^+.

Critère de Wu:

$$\det(W^+) > 0.$$

Wu (2021): brève preuve cryptique de $\Longleftrightarrow$.

L (2021): … des resultats supplémentaires.

Théorème A.

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein*

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M*.*

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M. *Alors* $h = s^{-2}g$

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M. *Alors* $h = s^{-2}g$ *pour une métrique kählérienne Bach-plate*

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M*. Alors* $h = s^{-2}g$ *pour une métrique kählérienne Bach-plate à coubure scalaire* $s > 0$*, adaptée à l'orientation de* M*.*

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

est donc du même signe que $-\beta$.

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \iff \beta < 0$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \iff \beta < 0$$

$$W^+ \sim \begin{bmatrix} + & & \\ & - & \\ & & - \end{bmatrix}$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ est de multiplicité 1.}$$

Donc $\alpha = \alpha_h : M \to \mathbb{R}^+$ est une fonction lisse, et

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \implies \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Donc $\alpha = \alpha_h : M \to \mathbb{R}^+$ est une fonction lisse, et on peut chosir ω avec $W^+(\omega) = \alpha\omega$, $|\omega|_h \equiv \sqrt{2}$,

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ est de multiplicité 1.}$$

Donc $\alpha = \alpha_h : M \to \mathbb{R}^+$ est une fonction lisse, et on peut chosir ω avec $W^+(\omega) = \alpha\omega$, $|\omega|_h \equiv \sqrt{2}$, soit sur M, soit sur un double revêtement $\widetilde{M}$.

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

$\Rightarrow$ structure presque-complexe J sur M ou $\widetilde{M}$ par

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

$\Rightarrow$ structure presque-complexe J sur M ou $\widetilde{M}$ par

$$\omega = h(J\cdot, \cdot).$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

$\Rightarrow$ structure presque-complexe J sur M ou $\widetilde{M}$ par

$$\omega = h(J\cdot, \cdot).$$

Énoncé: (M, h) compacte d'Einstein $\Longrightarrow$ J intégrable.

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M. *Alors* $h = s^{-2}g$ *pour une métrique kählérienne Bach-plate à coubure scalaire* $s > 0$, *adaptée à l'orientation de* M.

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M*. Alors* $h = s^{-2}g$ *pour une métrique kählérienne Bach-plate à coubure scalaire* $s > 0$*, adaptée à l'orientation de* M*.*

Corollaire. *Chaque* (M^4, h) *compacte simplement connexe orientée d' Einstein à* $\det(W^+) > 0$ *est difféomorphe à une surface de del Pezzo.*

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M*. Alors* $h = s^{-2}g$ *pour une métrique kählérienne Bach-plate à coubure scalaire* $s > 0$*, adaptée à l'orientation de* M*.*

Corollaire. *Chaque* (M^4, h) *compacte simplement connexe orientée d' Einstein à* $\det(W^+) > 0$ *est difféomorphe à une surface de del Pezzo. Inversement, chaque* M^4 *de del Pezzo admet de telles métrique, et ces métrique remplissent exactement une composante connexe de l'espace de modules* $\mathscr{E}(M)$*.*

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M*. Alors* $h = s^{-2}g$ *pour une métrique kählérienne Bach-plate à coubure scalaire* $s > 0$*, adaptée à l'orientation de* M*.*

Théorème A. *Soit* (M^4, h) *une variété compacte simplement connexe orientée d'Einstein pour laquelle la courbure de Weyl*

$$W^+ : \Lambda^+ \to \Lambda^+$$

satisfait à

$$\det(W^+) > 0$$

en chaque point de M. *Alors* $h = s^{-2}g$ *pour une métrique kählérienne Bach-plate à coubure scalaire* $s > 0$, *adaptée à l'orientation de* M.

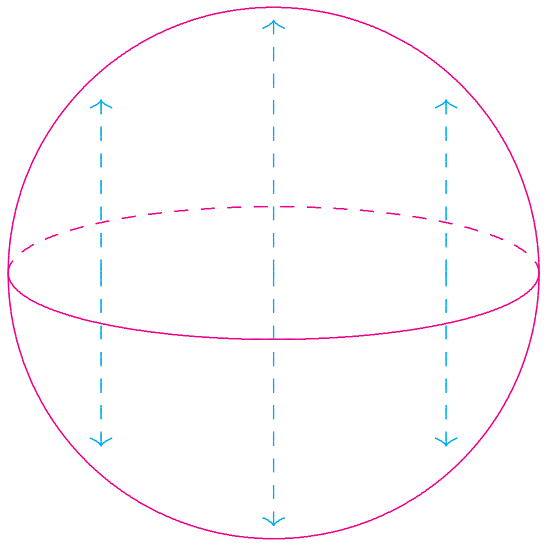
L'hypothèse de connexité simple est essentielle!

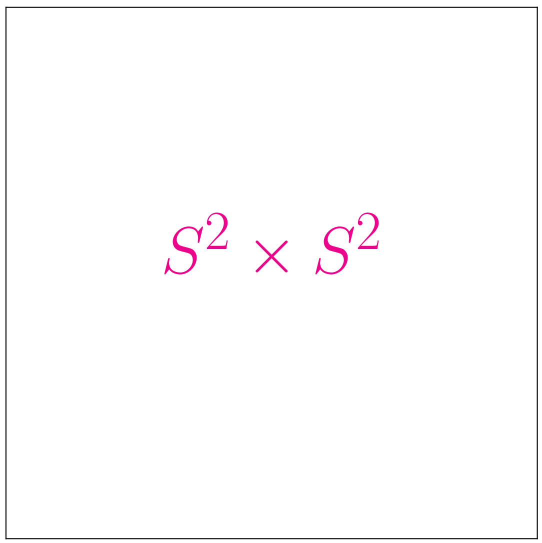
Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$.

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \Longleftrightarrow$

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \Longleftrightarrow$

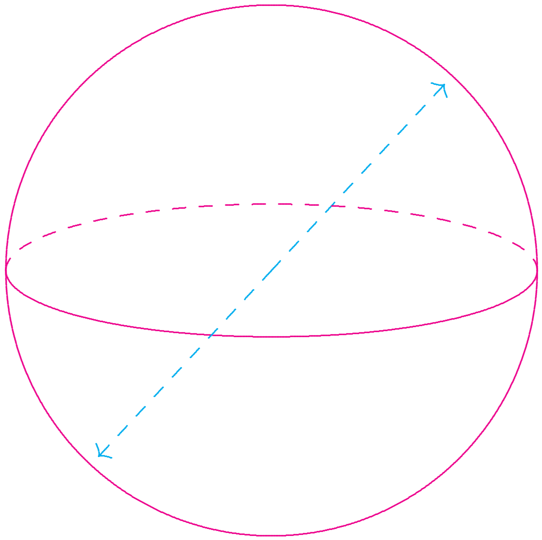
$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$





Variété orientée de spin

$$\mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle$$

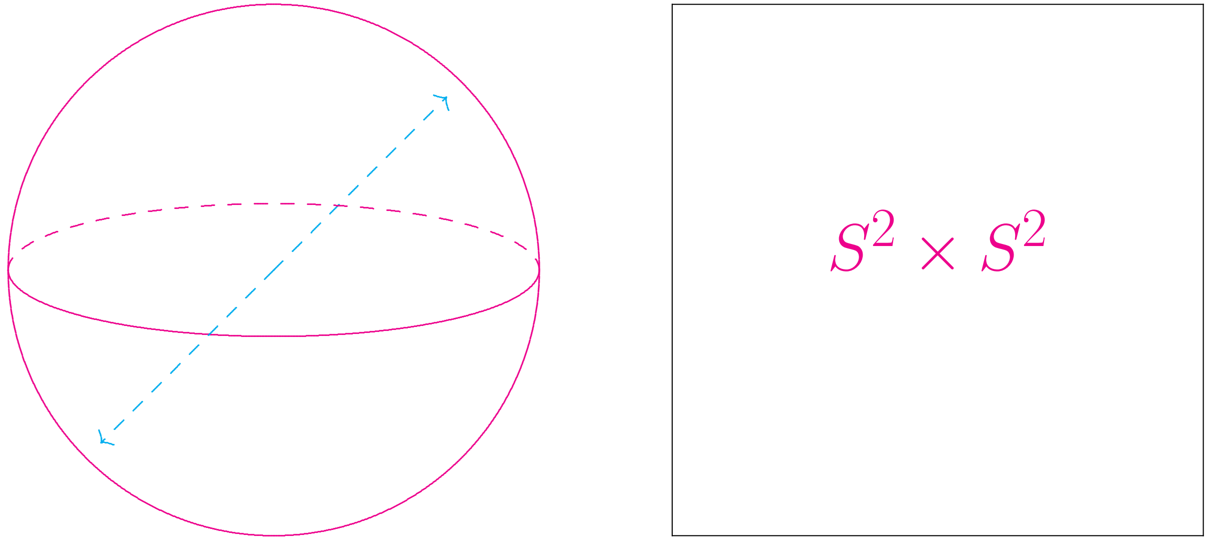


Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

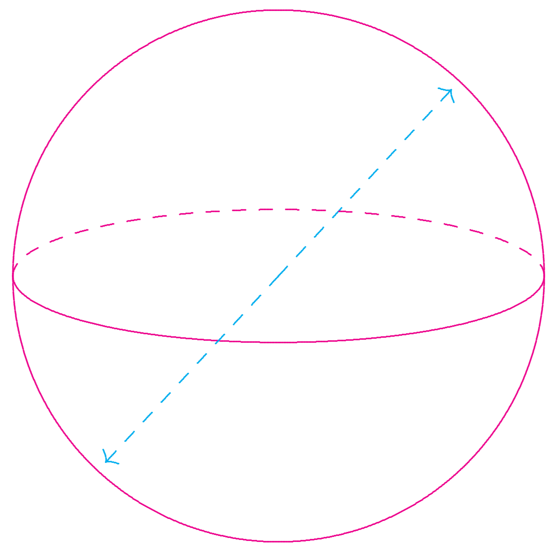
Théorème B. *Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à* $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \\ \\ \end{cases}$$



Variété orientée non-spin

$\mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle$



Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \Longleftrightarrow$

$$M \overset{\text{diff}}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \Longleftrightarrow$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Théorème B. *Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à* $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \end{cases}$$

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \quad ou \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$*. Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \textit{ou} \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chacque telle métrique h,

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \qquad ou \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chacque telle métrique h*, le revêtement universel* $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$

Théorème B. *Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à* $\det(W^+) > 0 \Longleftrightarrow$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \qquad ou \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chacque telle métrique h, le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ est de Kähler-Einstein,

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \Longleftrightarrow$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \textit{ou} \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chacque telle métrique h, *le revêtement universel* $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ *est de Kähler-Einstein, et*

$$\widetilde{M} \overset{diff}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \\ \\ \end{cases}$$

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \qquad ou \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chacque telle métrique h, *le revêtement universel* $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ *est de Kähler-Einstein, et*

$$\widetilde{M} \overset{diff}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{CP}_2 \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \textit{ou} \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chacque telle métrique h, *le revêtement universel* $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ *est de Kähler-Einstein, et*

$$\widetilde{M} \overset{diff}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{CP}_2 \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathbb{CP}_2 \# 5\overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \\ \end{cases}$$

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \Longleftrightarrow$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chacque telle métrique h, *le revêtement universel* $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ *est de Kähler-Einstein, et*

$$\widetilde{M} \overset{diff}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{CP}_2 \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathbb{CP}_2 \# 5\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathbb{CP}_2 \# 7\overline{\mathbb{CP}}_2, \end{cases}$$

Théorème B. *Soit M^4 une variété compacte lisse orientée à $\pi_1 \neq 0$. Alors M admet une métrique d'Einstein h à $\det(W^+) > 0$ $\Longleftrightarrow$*

$$M \stackrel{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chacque telle métrique h, le revêtement universel $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ est de Kähler-Einstein, et

$$\widetilde{M} \stackrel{diff}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{CP}_2 \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathbb{CP}_2 \# 5\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \text{ou} \\ \mathbb{CP}_2 \# 7\overline{\mathbb{CP}}_2, \end{cases}$$

est une del Pezzo definie sur $\mathbb{R}$,

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \iff$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \textit{ou} \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

En outre, pour chacque telle métrique h, *le revêtement universel* $(\widetilde{M}, \widetilde{h})$ *est de Kähler-Einstein, et*

$$\widetilde{M} \overset{diff}{\approx} \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{CP}_2 \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathbb{CP}_2 \# 5\overline{\mathbb{CP}}_2, \quad \textit{ou} \\ \mathbb{CP}_2 \# 7\overline{\mathbb{CP}}_2, \end{cases}$$

est une del Pezzo definie sur $\mathbb{R}$, *à lieu reél* $\varnothing$.

Théorème B. *Soit* M^4 *une variété compacte lisse orientée à* $\pi_1 \neq 0$. *Alors* M *admet une métrique d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0 \Longleftrightarrow$

$$M \overset{diff}{\approx} \begin{cases} \mathscr{P} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} \rangle, \\ \mathscr{Q} := (S^2 \times S^2)/\langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rangle, \\ \mathscr{Q} \# \overline{\mathbb{CP}}_2, \\ \mathscr{Q} \# 2\overline{\mathbb{CP}}_2, \qquad ou \\ \mathscr{Q} \# 3\overline{\mathbb{CP}}_2. \end{cases}$$

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée* M^4 *qui admettent des métriques d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0$.

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement* 15 *variété compacte lisse orientée* M^4 *qui admettent des métriques d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0$*. Pour chacune, l'espace* $\mathscr{E}_{\det}(M)$ *de modules de ces métriques speciales est connexe,*

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée* M^4 *qui admettent des métriques d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0$. *Pour chacune, l'espace* $\mathscr{E}_{\det}(M)$ *de modules de ces métriques speciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein* $\mathscr{E}(M)$.

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée* M^4 *qui admettent des métriques d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0$*. Pour chacune, l'espace* $\mathscr{E}_{\det}(M)$ *de modules de ces métriques speciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein* $\mathscr{E}(M)$*.*

Pourquoi $\mathscr{E}_{\det}(M) \subset \mathscr{E}(M)$ est-il ouvert et fermé?

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement* 15 *variété compacte lisse orientée* M^4 *qui admettent des métriques d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0$. *Pour chacune, l'espace* $\mathscr{E}_{\det}(M)$ *de modules de ces métriques speciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein* $\mathscr{E}(M)$.

Pourquoi $\mathscr{E}_{\det}(M) \subset \mathscr{E}(M)$ est-il ouvert et fermé?

Ouvert: $\det(W^+) > 0$.

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement 15 variété compacte lisse orientée M^4 qui admettent des métriques d'Einstein h à $\det(W^+) > 0$. Pour chacune, l'espace $\mathscr{E}_{\det}(M)$ de modules de ces métriques speciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein $\mathscr{E}(M)$.*

Pourquoi $\mathscr{E}_{\det}(M) \subset \mathscr{E}(M)$ est-il ouvert et fermé?

Ouvert: $\det(W^+) > 0$.

Fermé: $\det(W^+) = \frac{1}{3\sqrt{6}}|W^+|^3$ et $s \geq 0$.

Théorème C. *À difféomorphisme près, il y a exactement* 15 *variété compacte lisse orientée* M^4 *qui admettent des métriques d'Einstein* h *à* $\det(W^+) > 0$. *Pour chacune, l'espace* $\mathscr{E}_{\det}(M)$ *de modules de ces métriques speciales est connexe, et égale exactement une composante connexe de l'espace de modules d'Einstein* $\mathscr{E}(M)$.

Théorème D. *Si une variété compacte orientée d'Einstein* (M^4, h) *satisfait à*

$$\det(W^+) > -\frac{5\sqrt{2}}{21\sqrt{21}}|W^+|^3$$

en chaque point de M*, alors* $\det(W^+) > 0$*. Par conséquence, tous les résultats précédents s'appliquent avec cette hypothèse (apparemment) plus faible.*

Idées de la preuve:

Pour simplicité, supposons que $\det(W^+) > 0 \ldots$

Idées de la preuve:

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

h Einstein $\Longrightarrow \delta W^+ = (\delta W)^+ = 0.$

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

h Einstein $\Longrightarrow \delta W^{+} = (\delta W)^{+} = 0.$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c} r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c} \nabla_{d]} s$$

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

h Einstein $\Longrightarrow \delta W^{+} = (\delta W)^{+} = 0.$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c}r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c}\nabla_{d]} s$$

La stratégie:

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

h Einstein $\Longrightarrow \delta W^{+} = (\delta W)^{+} = 0.$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c} r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c} \nabla_{d]} s$$

La stratégie:

Étudier l'équation plus faible

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

h Einstein $\Longrightarrow \delta W^+ = (\delta W)^+ = 0.$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c} r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c} \nabla_{d]} s$$

La stratégie:

Étudier l'équation plus faible

$$\boxed{\delta W^+ = 0}$$

Idées de la preuve:

Par la seconde identité de Bianchi,

h Einstein $\Longrightarrow \delta W^+ = (\delta W)^+ = 0.$

$$(\delta W)_{bcd} := -\nabla_a W^a{}_{bcd} = -\nabla_{[c} r_{d]b} + \frac{1}{6} h_{b[c} \nabla_{d]} s$$

La stratégie:

Étudier l'équation plus faible

$$\boxed{\delta W^+ = 0}$$

qui bénéficie de bonnes propriétés conformes.

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g, par contre, satisfait à

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g, par contre, satisfait à

$$\boxed{\delta(f W^+) = 0}$$

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g, par contre, satisfait à

$$\boxed{\delta(fW^+) = 0}$$

ce qui implique la formule de Weitzenböck

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g, par contre, satisfait à

$$\boxed{\delta(fW^+) = 0}$$

ce qui implique la formule de Weitzenböck

$$\boxed{0 = \nabla^*\nabla(fW^+) + \frac{s}{2}fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I}$$

$\delta W^+ = 0$ est conformément invariant à poids.

Si $h = f^2 g$ satisfait à

$$\delta W^+ = 0$$

alors g, par contre, satisfait à

$$\boxed{\delta(fW^+) = 0}$$

ce qui implique la formule de Weitzenböck

$$\boxed{0 = \nabla^*\nabla(fW^+) + \frac{s}{2} fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I}$$

pour $fW^+ \in \mathrm{End}(\Lambda^+)$.

Choisirons $g = f^{-2}h$

Choisirons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

Choisirons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

Choisirons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$\boxed{0 = \nabla^*\nabla(fW^+) + \frac{s}{2}fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I}$$

Choisirons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$\boxed{0 = \nabla^*\nabla(fW^+) + \frac{s}{2}fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I}$$

avec $\omega \otimes \omega$,

Choisirons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$\boxed{0 = \nabla^*\nabla(fW^+) + \frac{s}{2}fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I}$$

avec $\omega \otimes \omega$,

$$\boxed{0 = \int_M \left[\langle \nabla^*\nabla(fW^+), \omega \otimes \omega\rangle + \cdots \right] d\mu}$$

Choisirons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$\boxed{0 = \nabla^*\nabla(fW^+) + \frac{s}{2}fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I}$$

avec $\omega \otimes \omega$, et intégrerons par parties.

$$\boxed{0 = \int_M \left[\langle \nabla^*\nabla(fW^+), \omega \otimes \omega \rangle + \cdots \right] d\mu}$$

Choisirons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$\boxed{0 = \nabla^*\nabla(fW^+) + \frac{s}{2}fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I}$$

avec $\omega \otimes \omega$, et intégrerons par parties.

$$\boxed{0 = \int_M \left[\langle fW^+, \nabla^*\nabla(\omega \otimes \omega)\rangle + \cdots\right] d\mu}$$

Choisirons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$\boxed{0 = \nabla^*\nabla(fW^+) + \frac{s}{2}fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I}$$

avec $\omega \otimes \omega$, et intégrerons par parties.

$$\boxed{0 = \int_M \left[\langle W^+, \nabla^*\nabla(\omega \otimes \omega)\rangle + \cdots\right] f \; d\mu}$$

Choisirons $g = f^{-2}h$ et ω adaptées au problème,

prendrons le produit L^2 de la formule de Weitzenböck

$$\boxed{0 = \nabla^*\nabla(fW^+) + \frac{s}{2}fW^+ - 6fW^+ \circ W^+ + 2f|W^+|^2 I}$$

avec $\omega \otimes \omega$, et intégrerons par parties. Et voilà!

$$0 = \int_M \left[\langle W^+, \nabla^*\nabla(\omega \otimes \omega)\rangle + \frac{s}{2}W^+(\omega, \omega) - 6|W^+(\omega)|^2 + 2|W^+|^2|\omega|^2\right] f\, d\mu$$

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \quad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Alors $\alpha = \alpha_h : M \to \mathbb{R}^+$ est lisse.

Soient $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ les valeurs propres de W^+:

$$W^+ = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \gamma < 0, \qquad \text{if } W^+ \neq 0$$

$$\det(W^+) = \alpha\beta\gamma$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ est de multiplicité } 1.$$

Alors $\alpha = \alpha_h : M \to \mathbb{R}^+$ est lisse. Définissons

$$f = {\alpha_h}^{-1/3}, \qquad g = f^{-2}h = {\alpha_h}^{2/3}h.$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha & & \\ & f^2\beta & \\ & & f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha & & \\ & f^2\beta & \\ & & f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha & & \\ & f^2\beta & \\ & & f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

$$\alpha = \alpha^{1/3} = f^{-1}$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha & & \\ & f^2\beta & \\ & & f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

$$\alpha = \alpha^{1/3} = f^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha f = 1$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha & & \\ & f^2\beta & \\ & & f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

$$\alpha = \alpha^{1/3} = f^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha f = 1$$

Choisissons $\omega \in \Gamma\Lambda^+$ telles que

$$W_g^+(\omega) = \alpha\,\omega, \quad |\omega|_g \equiv \sqrt{2},$$

Les valeurs propres de W^+ ont un poids conforme:

Pour $g = f^{-2}h$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^2\alpha & & \\ & f^2\beta & \\ & & f^2\gamma \end{bmatrix}$$

Alors notre choix de $f = \alpha^{-1/3}$ implique

$$\alpha = \alpha^{1/3} = f^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha f = 1$$

Choisissons $\omega \in \Gamma\Lambda^+$ telles que

$$W_g^+(\omega) = \alpha\, \omega, \quad |\omega|_g \equiv \sqrt{2},$$

peut-être sur un double revêtement $\hat{M} \to M$.

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\hat{M}} \Big[& \langle W^+, \nabla^*\nabla(\omega \otimes \omega)\rangle \\
& + \frac{s}{2} W^+(\omega, \omega) - 6|W^+(\omega)|^2 + 2|W^+|^2|\omega|^2 \Big] f \; d\mu
\end{aligned}
$$

$$0 = \int_M \Big[\langle W^+, \nabla^*\nabla(\omega \otimes \omega)\rangle$$
$$+\frac{s}{2} W^+(\omega,\omega) - 6|W^+(\omega)|^2 + 2|W^+|^2|\omega|^2 \Big] f \, d\mu$$

$$
\begin{aligned}
0 = \int_M \Big[& -2W^+(\nabla_e\omega, \nabla^e\omega) - 2W^+(\omega, \nabla^e\nabla_e\omega) \\
& + \frac{s}{2}W^+(\omega,\omega) - 6|W^+(\omega)|^2 + 2|W^+|^2|\omega|^2 \Big] f \; d\mu
\end{aligned}
$$

$$0 = \int_M \Big[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) - 2\alpha \langle \omega, \nabla^e \nabla_e \omega \rangle$$
$$+\frac{s}{2}\alpha|\omega|^2 - 6\alpha^2|\omega|^2 + 2|W^+|^2|\omega|^2\Big] f \, d\mu$$

parce que

$$W_g{}^+(\omega) = \alpha\omega$$

$$0 = \int_M \Big[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) + 2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle$$

$$+\frac{s}{2}\alpha|\omega|^2 - 6\alpha^2|\omega|^2 + 2|W^+|^2|\omega|^2\Big] f \; d\mu$$

$$0 \geq \int_M \Big[-2W^+(\nabla_e\omega, \nabla^e\omega) + 2\alpha\langle\omega, \nabla^*\nabla\omega\rangle$$

$$+\frac{s}{2}\alpha|\omega|^2 - 6\alpha^2|\omega|^2 + 3\alpha^2|\omega|^2\Big] f \, d\mu$$

parce que

$$|W_g{}^+|^2 \geq \frac{3}{2}\alpha^2$$

$$0 \geq \int_M \Big[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) + 2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle$$

$$+\frac{s}{2}\alpha |\omega|^2 - 3\alpha^2 |\omega|^2 \Big] f \, d\mu$$

$$|\omega|^2_g = 2 \quad \Longrightarrow \quad (\nabla_e \omega) \perp \omega$$

$$0 \geq \int_M \Big[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) + 2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle + \frac{s}{2}\alpha |\omega|^2 - 3\alpha^2 |\omega|^2 \Big] f \, d\mu$$

$$|\omega|^2_g = 2 \quad \Longrightarrow \quad (\nabla_e \omega) \perp \omega$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad W^+ \sim \begin{bmatrix} + & & \\ & - & \\ & & - \end{bmatrix}$$

$$0 \geq \int_M \Big[-2W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) + 2\alpha\langle \omega, \nabla^*\nabla\omega\rangle$$
$$+\frac{s}{2}\alpha|\omega|^2 - 3\alpha^2|\omega|^2\Big] f \; d\mu$$

$$|\omega|^2_g = 2 \implies (\nabla_e \omega) \perp \omega$$

$$\det(W^+) > 0 \implies W^+(\nabla_e \omega, \nabla^e \omega) \leq 0$$

$$0 \geq \int_M \Big[\qquad 2\alpha\langle\omega, \nabla^*\nabla\omega\rangle$$

$$+\frac{s}{2}\alpha|\omega|^2 - 3\alpha^2|\omega|^2\Big] f \; d\mu$$

$$|\omega|_g^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad (\nabla_e\omega) \perp \omega$$

$$\det(W^+) > 0 \quad \Longrightarrow \quad -W^+(\nabla_e\omega, \nabla^e\omega) \geq 0$$

$$0 \geq \int_M \left[2\alpha \langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle + \frac{s}{2} \alpha |\omega|^2 - 3\alpha^2 |\omega|^2 \right] f \, d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[2\langle \omega, \nabla^*\nabla\omega \rangle + \frac{s}{2}|\omega|^2 - 3\alpha|\omega|^2 \right] (\alpha f) \; d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[2\langle \omega, \nabla^*\nabla\omega \rangle + \frac{s}{2}|\omega|^2 - 3\alpha|\omega|^2 \right] (\alpha f) \, d\mu$$

Mais

$$\alpha f \equiv 1$$

$$0 \geq \int_M \left[2\langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle + \frac{s}{2} |\omega|^2 - 3|\omega|^2 \alpha \right] d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[2\langle \omega, \nabla^* \nabla \omega \rangle - 3W^+(\omega, \omega) + \frac{s}{2}|\omega|^2 \right] d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[\frac{1}{2}|\nabla\omega|^2 + \frac{3}{2}\langle\omega, \left(\nabla^*\nabla - 2W^+ + \frac{s}{3}\right)\omega\rangle\right] d\mu$$

$$0 \geq \int_M \left[\frac{1}{2}|\nabla\omega|^2 + \frac{3}{2}\langle\omega, \quad (d+d^*)^2 \quad \omega\rangle\right] d\mu$$

Parce que

$$(d+d^*)^2 = \nabla^*\nabla - 2W^+ + \frac{s}{3}$$

sur $\Gamma(\Lambda^+)$.

$$0 \geq \frac{1}{2} \int_M |\nabla \omega|^2 \, d\mu + 3 \int_M |d\omega|^2 \, d\mu$$

$$0 \geq \frac{1}{2}\int_M |\nabla\omega|^2 \, d\mu + 3\int_M |d\omega|^2 \, d\mu$$

Donc $\nabla\omega \equiv 0$, et g est kählérienne!

Merci de m'avoir invité!




Bon rétablissement à la pandémie!